

CTB2110

Vloeistofmechanica

**Tentamenbundel Civiele Techniek
Het Gezelschap "Practische Studie"**



LET OP! EEN REPRODUCERENDE
LEERSTIJL IS SCHADELIJK VOOR
DE ACADEMISCHE VORMING



Januari 2018

Januari 2017

Januari 2016

November 2017

November 2016

November 2015

**Questions**

1	2	3	4
---	---	---	---

Name student

Student ID

1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
7	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
8	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
9	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
0	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

CTB2110 Vloeistofmechanica**Tentamen**

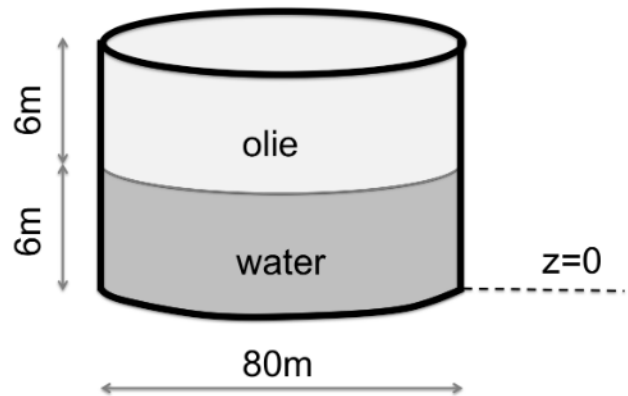
22 January 2018, 13:30 - 16:30

Ieder vraagstuk dient op een afzonderlijk antwoordformulier ingeleverd te worden! Bij de beoordeling van het examenwerk zal voornamelijk worden gelet op een goede systematische aanpak en een juiste toepassing van de theorie. Indien bij de uitwerkingen aannames worden gedaan, dan moeten deze duidelijk worden vermeld. Geef waar nodig een beknopt commentaar. Wanneer het antwoord op een subvraag in vervolgvragen nodig is, maar niet kan worden berekend, neem dan een plausibele waarde daarvoor aan in de beantwoording van de vervolgvragen. Getalsmatige grootheden moeten, in ieder geval in de eindantwoorden, van de juiste eenheden worden voorzien.



Vraag 1: Opslagtank

We beschouwen een opslagtank voor olie met een diameter van 80m en een hoogte van 12m. Per abuis is de tank voor de helft met olie (dichtheid is 900 kg/m^3) en voor de helft met water (dichtheid is 1000 kg/m^3) gevuld.



- 1p **1a Bereken de horizontale kracht per eenheid van breedte op de wand van de tank.**

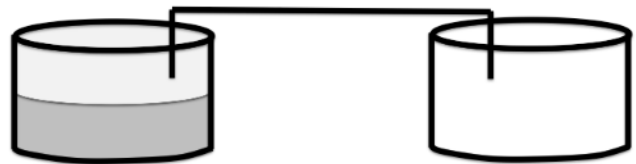
Onderin ($z = 0$) wordt een gat gemaakt om de tank te legen. De effectieve doorstroomopening bedraagt $\mu A = 0,2 \text{ m}^2$.

- 1p **1b Bereken de snelheid van de uittredende vloeistof op het moment dat het gat geopend wordt.**

- 1.5p **1c** Door de uitstroom zal het olie-water-interface zakken. Aangenomen mag worden dat dit interface horizontaal blijft. Op een gegeven moment zal het water op zijn en zal er olie uit het vat stromen.

Na hoeveel tijd zal er olie het vat uitstromen?

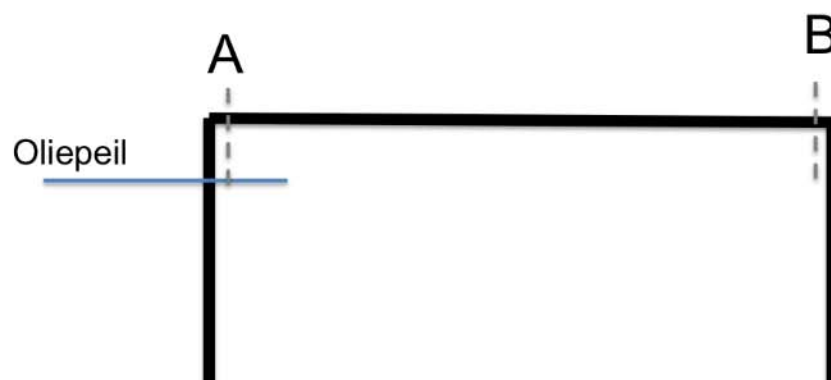
In plaats van een opening onderin te maken, wordt voorgesteld om de olie over te hevelen naar een ander vat (zie schets).



- 1p **1d** **Schets voor deze situatie (i) het energieniveau; en (ii) het piëzometrisch niveau tussen de doorsnedes A en B.** Doe dit in onderstaande schets van de hevel. Maak gebruik van het reeds aangegeven peil van de olie. **Geef in het tekstvak duidelijk aan welke energieverliezen je verwacht.**

This answerbox continues on the next page.

This answerbox belongs to the question on the previous page.



- 1p **1e** Persoon A stelt voor om de uitstroomopening te verlagen, door de pijp te verlengen, om zo het debiet te vergroten. Persoon B geeft aan dat dat averechts werkt vanwege de extra wrijving.

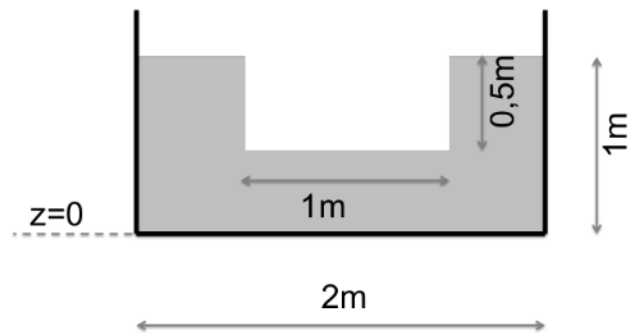
Voor welke conditie heeft persoon A gelijk en voor welke conditie heeft persoon B gelijk? Geef een duidelijk maar beknopte uitleg, eventueel met schets.

Vraag 2: stuw in poldersloot

We beschouwen een sloot met een rechthoekige doorsnede. Om de waterstanden te regelen wordt een stuw in de sloot geplaatst. De stuw heeft een rechthoekige opening, zie schets van het vooraanzicht van de stuw. Ter vereenvoudiging mag contractie verwaarloosd worden. De bodem van de sloot is horizontaal en ligt op $z = 0$.

Voor alle deelvragen geldt: Er stroomt 300 liter per seconde door de sloot.

Voor deelvragen 2a-2c: de benedenstroomse waterdiepte is 50cm.



1p **2a Bereken de snelheid door de opening.**

1p **2b Bereken de waterdiepte op enige afstand bovenstrooms van de stuw.**

- 1p **2c** Bereken de netto horizontale kracht van het water op de stuw. Ga uit van een bovenstroomse waterdiepte van 0,9m indien je geen (of een onrealistisch) antwoord had in deelvraag 2b.

- 1p **2d** De benedenstroomse waterstand stijgt.

Vanaf welke benedenstroomse waterstand zal ook de bovenstroomse waterstand gaan stijgen?

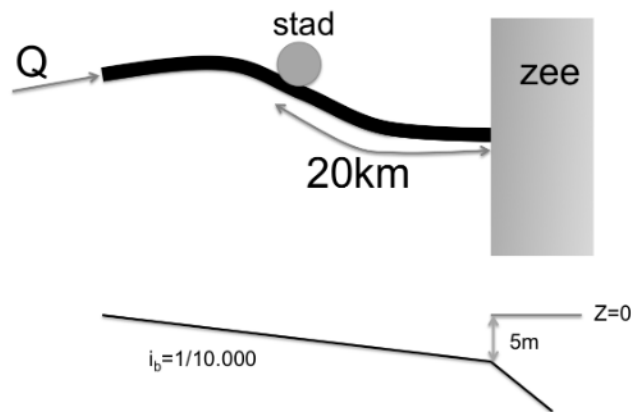
1.5p **2e** De benedenstroomse waterstand stijgt verder tot 0,8m.

Hoe groot is in dit geval het energieverlies over de stuw?

Vraag 3: Verhanglijnen

Beschouw een rivier met een breedte $B = 200$ m en uniforme bodemligging in dwarsrichting. In langsrichting is het bodemverhang flauw: $i_b = 1/10.000$. De bodemligging bij de uitstroming in zee is $z_{monding} = -5$ m. Het zeeniveau wordt constant verondersteld op $z = 0$. De rivier heeft een ruwheid van $c_f = 0,003$.

Op 20km bovenstrooms van de monding ligt een stad. De dijken in de stad zijn ontworpen voor een ontwerpdebiet van $3000 \text{ m}^3/\text{s}$.



- 1p **3a (i) Geef in woorden aan welke twee krachten in evenwicht zijn bij een eenparige stationaire stroming?**
(ii) Welke kracht wordt toegevoegd voor een niet-eenparige stationaire stroming?

- 1p **3b Bepaal de waterdiepte van de rivier bij de stad (20km stroomopwaarts van de monding).**

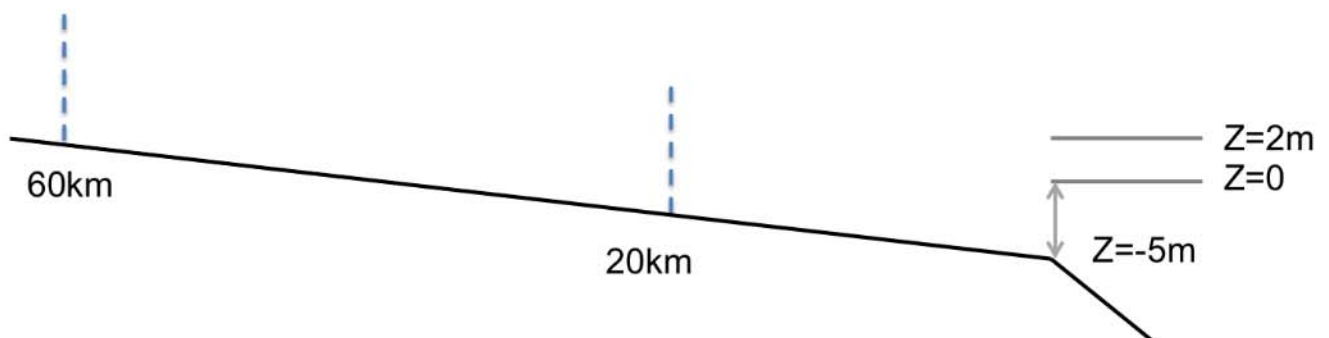
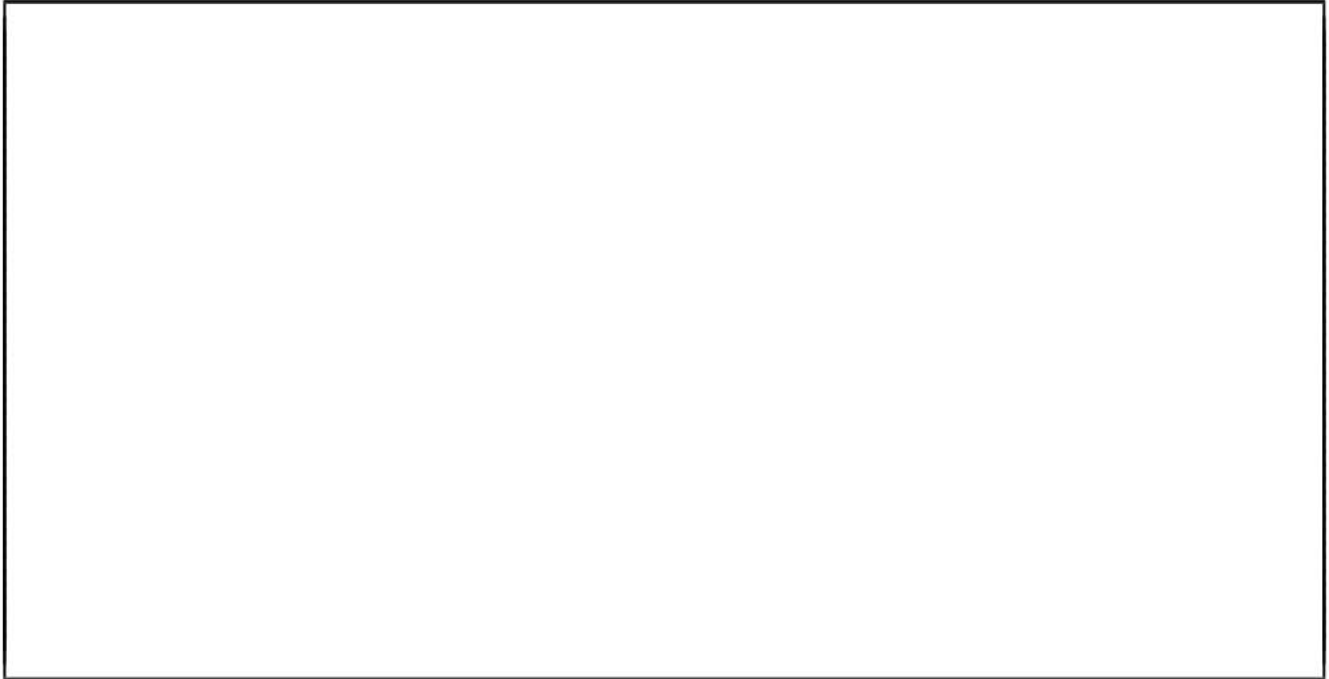
- 1p **3c** Om de waterstand bij de stad te verlagen wordt voorgesteld om de rivier over een lengte van 10km uit te diepen.

Zou je deze verdieping bovenstrooms of benedenstrooms van de stad uitvoeren? Geef een duidelijke uitleg, indien nodig met schets.

- 1p **3d** Klimaatverandering heeft (versnelde) zeespiegelstijging tot gevolg. De ontwerpwaterstand op zee voor 2100 wordt geschat op $z = +2\text{m}$. Er wordt voorgesteld de rivier te verbreden tot 300m tussen de stad en de monding (over de volledige 20km). De bodemligging verandert niet.

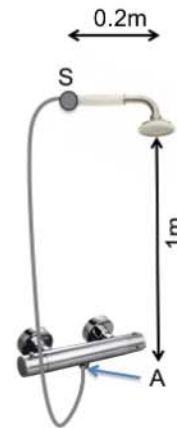
Bereken de waterdiepte op 20km en 60km bovenstrooms van de monding.

Teken het verloop van de waterstand in onderstaande figuur. Geef daarin ook de evenwichtsdieptes aan.



Vraag 4: Douche

In een douche wordt water met een debiet van 10 liter/minuut van de kraan via een slang met diameter $D=1\text{cm}$ en lengte 1,5m, naar de douchekop gevoerd. De binnenwand van de slang wordt hydraulisch glad verondersteld. We nemen een stationaire stroming aan in de slang die overal als volledig ontwikkeld mag worden beschouwd.



1p **4a** Waarom is de schuifspanning in de as van de slang gelijk aan nul?

1p **4b** Bereken voor deze hydraulisch gladde situatie de Darcy-Weisbach coefficient.

Reken in vervolgvragen verder met een Darcy-Weisbach coefficient van 0,02 indien je het antwoord op deze vraag niet kon geven.

- 1.5p **4c** Bereken het vermogen dat nodig is om het water door de slang van doorsnede A tot aan doorsnede S te laten stromen.

- 1p **4d** De gaatjes in de douchekop zorgen ervoor dat de gemiddelde snelheid waarmee het water uit de douchekop stroomt twee keer zo groot is als die in de slang.

Bereken het krachtmoment dat de douchekophouder in S (zie schets) moet leveren als gevolg van het uitstromende water uit de douchekop.

- 4e** Gebruik deze pagina in het geval je extra ruimte nodig hebt. Geef wel duidelijk aan welke vraag het is. Geef dit ook aan bij de betreffende vraag.

This page is left blank intentionally

Vraag 1a

De dichtheid varieert over de diepte. Beschouw daarom het water deel en het olie deel afzonderlijk:

$$F_o = \frac{1}{2} \rho g d_o^2 = \frac{1}{2} 900 \cdot 9.81 \cdot 6^2 = 159 \text{ kN/m}$$

$$F_w = \left(\frac{1}{2} \rho g d_w + \rho g d_o \right) d_w = \left(\frac{1}{2} 1000 \cdot 9.81 \cdot 6 + 900 \cdot 9.81 \cdot 6 \right) 6 = 494 \text{ kN/m}$$

$$F_{tot} = F_o + F_w = 653 \text{ kN/m}$$

Vraag 1b:

De combinatie van water en olie maakt dat we Toricelli niet direct kunnen gebruiken. De olie geeft een druk op het water die gelijk is aan:

$$p = \rho_o g d_o = \rho_w g \frac{\rho_o}{\rho_w} d_o$$

Bij de opening op $z=0$ wordt de druk daarmee:

$$p = \rho_w g \left(\frac{\rho_o}{\rho_w} d_o + d_w \right)$$

we kunnen daarmee Torricelli toepassen met de aangepaste waterhoogte:

$$u = \sqrt{2g \left(\frac{\rho_o}{\rho_w} d_o + d_w \right)} = \sqrt{2 \cdot 9.81 (0.9 \cdot 6 + 6)} = 14.96 \text{ m/s}$$

Vraag 1c:

De olie drukt op het water. Alleen de druk van de olie is daarmee relevant. We schrijven de druk van de olie daarmee al een waterdruk, met beperkte diepte.

De volumebalans geeft:

$$A \frac{dh}{dt} = -Q = -\mu A \sqrt{2g(h)}$$

herschikken geeft:

$$\frac{1}{\sqrt{h}} dh = -\frac{\mu A}{A} \sqrt{2g} dt$$

Integreren geeft:

$$2\sqrt{h} = -\frac{\mu A}{A} \sqrt{2g} t$$

De beginconditie is: $h(t=0) = d_w + \frac{\rho_o}{\rho_w} d_o$ en de eindconditie is: $h(t=T) = \frac{\rho_o}{\rho_w} d_o$.

Dit geeft:

$$2 \left(\sqrt{\frac{\rho_o}{\rho_w} d_o} - \sqrt{d_w + \frac{\rho_o}{\rho_w} d_o} \right) = -\frac{\mu A}{A} \sqrt{2g}(T)$$

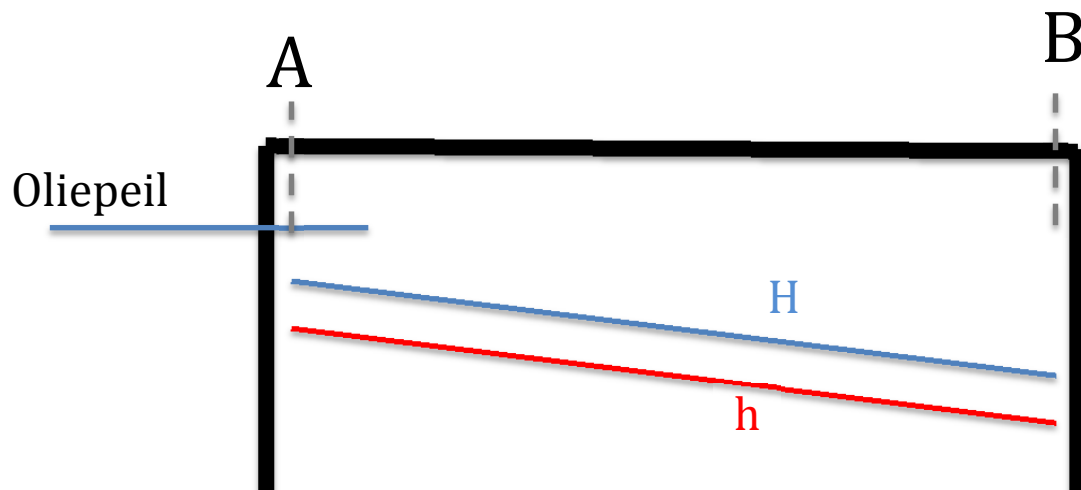
$$T = \frac{2}{\sqrt{2g}} \frac{A}{\mu A} \left(\sqrt{d_w + \frac{\rho_o}{\rho_w} d_o} - \sqrt{\frac{\rho_o}{\rho_w} d_o} \right)$$

$$T = 4778 \text{ s} = 1,32 \text{ hr}$$

vraag 1d:

Het energieniveau in A ligt lager vanwege intreeverlies en bochtverlies (en een beetje wandwrijving over de buis tot aan A). Tussen A en B speelt wandwrijving een rol. Daarom daalt het energieniveau.

Het piezometrisch niveau loopt parallel aan het energieniveau, vanwege de uniforme snelheidshoogte. H en h moeten bij B boven de uitstroomopening liggen.



vraag 1e:

Persoon A heeft gelijk als de uitstroomopening niet in de vloeistof steekt. Dan wordt het energieniveaueverschil bepaald door de uitstroomopening: hoe lager hoe groter het debiet.

Persoon B heeft gelijk als het de uitstroomopening in de vloeistof steekt. Dan wordt het energieverschil bepaald door het verschil in peil tussen de twee tanks. Een langere buis zorgt dan voor meer wrijving.

Vraag 2a

De benedenstroomse waterstand ligt onder de kruinhoogte. De stroming over de overlaat is daarmee kritisch. Het debiet is gegeven:

$$u = \sqrt{gd_k}$$

$$Q = bd\sqrt{gd_k}$$

$$d_k = \left(\frac{Q}{b\sqrt{g}} \right)^{2/3} = 0,21m$$

$$u = \sqrt{gd_k} = 1,43m/s$$

Vraag 2b

De energiebalans geldt voor het gedeelte bovenstrooms tot aan de kruin:

$$H_1 = H_2$$

$$h_1 + \frac{Q^2}{B^2 2g} = \Delta z_k + d_k + \frac{Q^2}{b^2 d_k^2 2g}$$

$$h_1 = \Delta z_k + d_k + \frac{Q^2}{b^2 d_k^2 2g} - \frac{Q^2}{B^2 h_1^2 2g}$$

$$d_{\text{bovenstrooms}} = h_1 = 0,81m$$

iteratie is nodig om h1 te bepalen. Echter, h1 zal zeer vergelijkbaar zijn met H1, aangezien de snelheid gering is. Een eerste schatting van h1=H1 is daarmee vrij nauwkeurig. Een keer itereren is daarmee eigenlijk al voldoende.

Vraag 2c

Stel de impulsbalans op (uitgaande van een bovenstroomse waterdiepte van 0,9m):

$$F_L + F_R + K = 0$$

$$F_L = \frac{1}{2} \rho g B d_L^2 + \rho Q \frac{Q}{B d_L} = 8 kN$$

$$F_R = -\frac{1}{2} \rho g B d_R^2 - \rho Q \frac{Q}{B d_R} = -2,4 kN$$

$$K = -5,6 kN$$

Vraag 2d:

De bovenstroomse waterstand gaat stijgen bij een stigende benedenstroomse waterstand als de stroming op de kruin subkritisch is.

Stel de impulsbalans op van de kruin (net achter de kruin) tot benedenstrooms.

Ga daarmee uit van een kritische stroming op de kruin.

$$\frac{1}{2} \rho g B (d_k + \Delta z_k)^2 + \rho Q \frac{Q}{b d_k} = \frac{1}{2} \rho g B d_R^2 + \rho Q \frac{Q}{B d_R}$$

de diepte op de kruin is $d_k=0,2m$, zie deelvraag a. Iteratie is benodigd. De kruinhoogte komt op: $d_R=0,74m$.

Als de benedenstroomse waterstand/diepte verder stijgt zal het linkerlid ook moeten toenemen. Daarmee zal de stroming niet meer kritisch zijn en zal de waterstand moeten stijgen.

Vraag 2e:

De benedenstroomse waterstand is gegeven, evenals het debiet. Om het energieverlies te bepalen wordt eerst de waterstand op de kruin bepaald, met de impulsbalans:

$$\frac{1}{2} \rho g B (d_k + \Delta z_k)^2 + \rho Q \frac{Q}{b d_k} = \frac{1}{2} \rho g B d_R^2 + \rho Q \frac{Q}{B d_R}$$

De diepte op de kruin is dan: $d_k=0,28m$.

De bovenstroomse energiehoogte is gelijk aan de energiehoogte op de kruin:

$$H_k = d_k + \Delta z_k + \frac{Q^2}{b^2 d_k^3 2g} = 0,84 m$$

$$H_R = d_R + \frac{Q^2}{B^2 d_R^3 2g} = 0,80 m$$

$$\Delta H = H_k - H_R = 0,04 m$$

Vraag 3a

De zwaartekrachtsterm of drukkrachtterm is in evenwicht met de wrijvingsterm.

In niet-eenparige stationaire stroming wordt de term als gevolg van meevoering eveneens belangrijk.

Vraag 3b

De bodemhelling is flauw, we kunnen daarmee uitgaan van een subkritische stroming. Tussen de stad en de monding zijn de volgende variabelen constant en uniform: Q, i_b, c_f, B . Daarmee kunnen we de evenwichtsdiepte en de lengteschaal bepalen:

$$d_e = \left(\frac{c_f Q^2}{i_b g B^2} \right)^{1/3} = 8,82 \text{ m}$$

$$L = \frac{1 - i_b / c_f}{3i_b} d_e = 28,4 \text{ km}$$

De waterdiepte bij de stad is daarmee:

$$d(s) = d_e + \Delta d_0 \exp\left(\frac{s - s_0}{L}\right) = 8,82 + (5 - 8,82) \exp\left(\frac{-20000 - 0}{28.400}\right) = 6,93 \text{ m}$$

Check: de waterdiepte moet kleiner zijn dan de evenwichtsdiepte, aangezien de diepte in de monding kleiner is dan de evenwichtsdiepte.

Vraag 3c

Het gaat om een subkritische stroming. Daarmee werken verstoringen door naar bovenstrooms. Oftewel, de verdieping moet benedenstrooms van de stad aangelegd worden.

Ps: alleen een verandering in debiet bovenstrooms zou effect hebben benedenstrooms.

3d

Deel de rivier op in twee delen: bovenstrooms van de stad en benedenstrooms van de stad.

	$Q = 3000 \text{ m}^3 / \text{s}$		$Q = 3000 \text{ m}^3 / \text{s}$
Benedenstrooms:	$i_b = 1/10.000$	Bovenstrooms:	$i_b = 1/10.000$
	$c_f = 0,003$		$c_f = 0,003$
	$B = 300 \text{ m}$		$B = 200 \text{ m}$

Daarmee worden de evenwichtsdiepte en de lengteschaal:

	$d_e = 6,73 \text{ m}$		$d_e = 8,82 \text{ m}$
Benedenstrooms:	$L = 21,7 \text{ km}$	Bovenstrooms:	$L = 28,4 \text{ km}$
	$d(-20 \text{ km}) = 6,84 \text{ m}$		$d(-60 \text{ km}) = 8,34 \text{ m}$

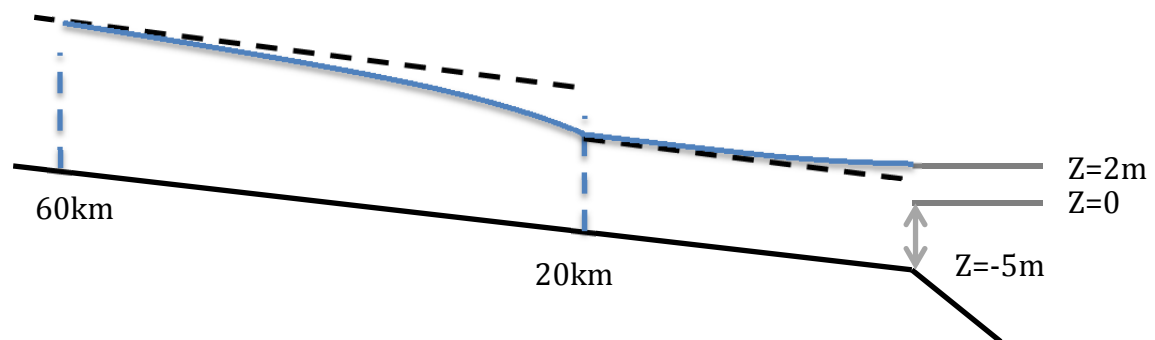
Let op voor het bovenstroomse deel zijn d_e en L nog steeds gelijk. Voor de bepaling van het bovenstroomse deel maak je gebruik van

$$d_0 = 6,84 \text{ m}$$

$$s = -60 \text{ km} \quad s_0 = -20 \text{ km}$$

Let bij het tekenen op:

- evenwichtsdiepte bovenstrooms is groter dan benedenstrooms van de stad.
- Waterstand ligt boven de evenwichtsdiepte in het benedenstroomse deel en onder de evenwichtsdiepte in het bovenstroomse deel.
- De waterdieptes bij 20km en 60km bovenstrooms zijn bijna gelijk aan de evenwichtsdieptes.



Vraag 4a

De schuifspanning in de as van de slang is gelijk aan nul, aangezien daar de snelheidsgradient in dwarsrichting gelijk is aan nul.

Extra: de schuifspanning verloopt lineair tussen de wand en de as. De maximale waarde wordt bij de wand gevonden.

Vraag 4b:

De combinatie van stroomsnelheid en wandruwheid leidt tot hydraulisch gladde condities. Daarmee wordt de Darcy-Weisbach coefficient gedefinieerd door:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{2,5}{\text{Re} \sqrt{f}} \right)$$

$$\text{Re} = \frac{UD}{\nu}$$

Bepaal eerst het Reynolds getal :

$$U = \frac{Q}{\pi(D/2)^2} = 2,1 \text{ m/s}$$

$$\text{Re} = \frac{UD}{\nu} = 21 \cdot 10^3$$

Iteratie is nodig om f te bepalen. Start daarmee met een waarde $f=0.02$. Dit geeft: $f=0,025$.

Vraag 4c:

Het vermogen wordt bepaald gegeven door:

$$P = \rho g Q \Delta H$$

$$\Delta H = dz + f \frac{L U^2}{D 2g} = 1 + 0,024 \frac{1,5}{0,01} \frac{2,1^2}{2 \cdot 9,81} = 1,87 \text{ m}$$

$$P = 3,06 \text{ W}$$

Vraag 4d:

De kracht van het instromende water heft geen effect op het krachtmoment (arm is gelijk aan nul). De kracht van het uitstromende water is gelijk aan de kracht door meevoering:

$$F = \rho Q u = \rho \frac{Q^2}{A}$$

$$A = \frac{1}{2} A_{\text{slang}} = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 = 3,9 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$$

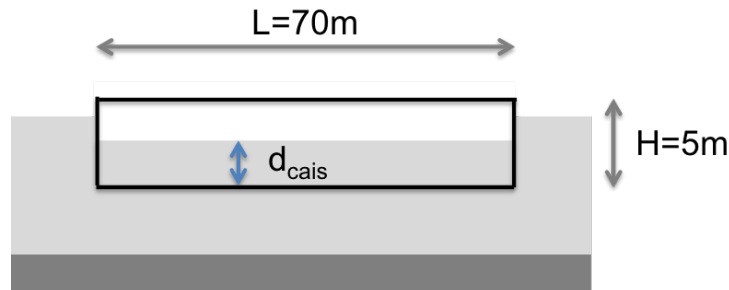
$$F = 0,7 \text{ N}$$

De arm is 0.2m. Daarmee wordt het krachtmoment:

$$M = F \lambda = 0,7 \cdot 0,2 = 0,14 \text{ Nm}$$

Vraagstuk I (caisson)

Een caisson kan geschematiseerd worden tot een rechthoekige bak, met een hoogte H van 5 m, een breedte B van 11 m en een lengte L van 70 m. De massa M van het caisson bedraagt 700.000 kg. Ter vereenvoudiging mag de dikte van de caissonwand verwaarloosd worden. Zie de onderstaande figuur.



In eerste instantie ligt het caisson stil in stilstaand water. Voor de stabiliteit is het caisson gevuld met water, zodanig dat er nog 1 m van het caisson boven water uitsteekt. De luchtdruk in het caisson is gelijk aan de atmosferische druk.

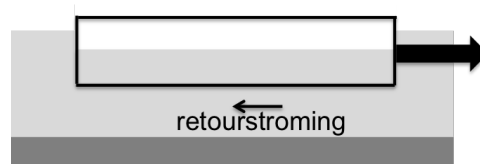
I.1^{1,0} Wat is voor de gegeven situatie de waterdiepte d_{cais} in het caisson?

I.2^{1,0} Bereken de netto kracht per eenheid van breedte van het water op de zijwanden van het caisson. (Gebruik een waterdiepte $d_{\text{cais}} = 2,5$ m in het caisson als je Vraag I.1 niet kon beantwoorden.)

Het caisson wordt met een sleepboot verplaatst naar de lokatie waar het moet worden afgezonken. De coëfficiënt voor de sleepkracht (c_w) is gelijk aan 1,05.

I.3^{1,0} Bereken de benodigde kracht om het caisson met een snelheid van 0,25 m/s voort te slepen.

Tijdens het slepen van het caisson ontstaat er een retourstroming (een stroming tegengesteld aan de vaarrichting van het caisson) onder het caisson. Zie de onderstaande figuur.



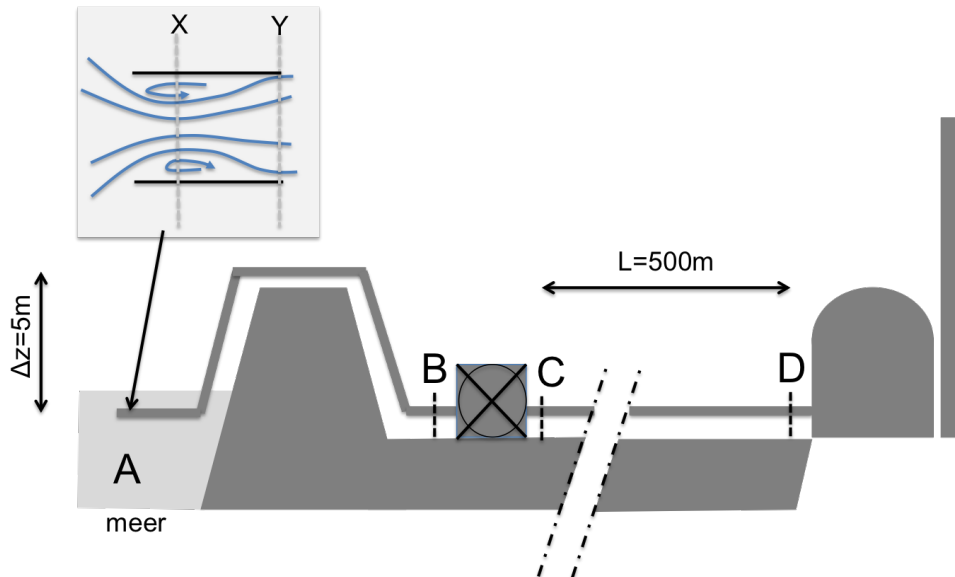
I.4^{1,0} Beredeneer of het caisson door deze retourstroming hoger, lager of op gelijke hoogte in het water zal liggen vergeleken met de situatie waarin het caisson stil ligt; gebruik de vergelijking van Euler.

Aangekomen op de plaats van bestemming wordt het caisson afgezonken. Hiertoe wordt een klein gat met een netto doorstroomopening $\mu A = 50 \text{ cm}^2$ in de bodem gemaakt waardoor het water naar binnen stroomt. Gaten aan de bovenkant van het caisson zorgen er voor dat de luchtdruk in het caisson gelijk blijft aan de atmosferische druk.

I.5^{1,5} Verklaar waarom het debiet Q door het gat stationair is gedurende de periode dat het caisson nog drijft; bereken dat debiet.

Vraagstuk II (koelwaterleiding)

Een kerncentrale gebruikt water uit een meer als koelwater. De centrale ligt achter een dijk waar de aanvoerleiding voor het koelwater overheen moet. Net achter de dijk staat een pompstation om het water door de lange leiding naar de centrale te laten stromen. Een schets van de situatie is gegeven in onderstaande figuur.



II.1^{1,5} Stel de impulsbalans en de energiebalans op voor het gebied tussen de doorgangen X en Y (zie inzet); leid hiermee de regel van Carnot af gebruikmakend van $\mu U_X = U_Y$.

Het netto doorstroomoppervlak bij het instroompunt bedraagt 70% van de leidingdoorsnede. Naast het intreeverlies treedt er ook energieverlies op bij de bochtstukken. Het netto doorstroomoppervlak in de bochten bedraagt 90% van de leidingdoorsnede. Over het leidingdeel A-B is de invloed van de wandwrijving verwaarloosbaar klein. Het ontwerpdebiet Q voor de leiding bedraagt $4 \text{ m}^3/\text{s}$. De leiding heeft een rond dwarsprofiel met een inwendige diameter D van 1,5 m.

II.2^{1,5} Bereken de energiehogte in doorgang B en teken/schets het verloop van het energieniveau en het piëzometrisch niveau tussen A en B. Gebruik de waterstand in het meer als referentiehogte.

Over het 500 m lange leidingdeel tussen C en D is de wandwrijving wèl relevant. Hydraulisch ruwe condities mogen aangenomen worden in de leiding, met een Darcy-Weisbach weerstandscoefficiënt f van 0,015.

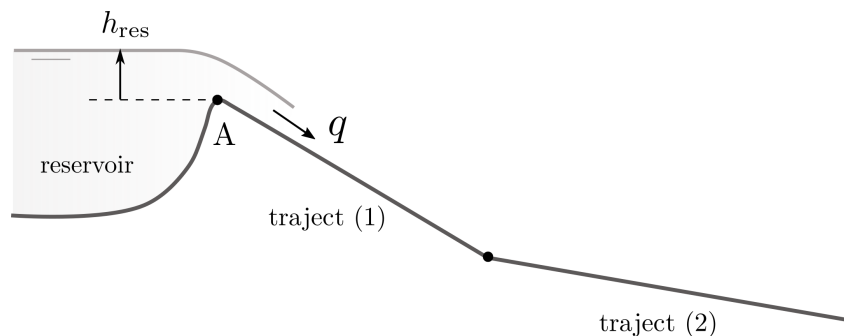
II.3^{1,0} Bereken het gedissipeerde vermogen over leidingdeel C-D bij het ontwerpdebiet van $4 \text{ m}^3/\text{s}$.

Door de aangroei van schelpdieren wordt de binnenwand van de leiding ruwer.

II.4^{1,0} Beredeneer waarom, bij een gelijkblijvend pompvermogen, (i) het debiet door de leiding afneemt en (ii) de energiehogte net na de pomp (doorgang C) toeneemt.

Vraagstuk III (dambreuk)

Als gevolg van een orkaan is in de dam van een groot waterreservoir een bres ontstaan waaruit het water via een rivierbedding een nabijgelegen vallei instroomt. In deze rivierbedding zijn twee trajecten te onderscheiden: een traject (1) met een *steile* bodemhelling dat direct aansluit op het reservoir, en een verderop gelegen traject (2) met een *flauwe* bodemhelling. Zie onderstaande schets van de situatie.



III.1^{1,0} Leg in de context van de theorie van de verhanglijnen uit wat de fysische betekenis is van de begrippen *steile* - respectievelijk *flauwe* bodemhelling, en geef een criterium op basis waarvan dit onderscheid in de praktijk gemaakt kan worden.

De bres in de dam (punt A in de figuur) vormt een vloeiende overgang tussen het reservoir en het aansluitende traject (1) van de rivierbedding, waarbij de benedenstroomse randvoorwaarden geen invloed hebben op de waterdiepte langs dit traject. Zou dit traject een *flauwe* bodemhelling hebben, dan zou de waterdiepte in punt A de evenwichtsdiepte aannemen. Vanwege de *steile* bodemhelling is in dit geval de diepte ter plaatse van A echter gelijk aan de grensdiepte.

III.2^{1,0} Verklaar waarom de waterdiepte in A gelijk is aan de grensdiepte.

Voor het doen van enkele inleidende berekeningen wordt aangenomen dat de beide trajecten een uniforme en gelijke breedte hebben waarbij we de situatie per eenheid van breedte beschouwen. Daarnaast wordt verondersteld dat de stroming stationair is met een constant waterpeil h_{res} in het reservoir van 3,0 m ten opzichte van de bodemhoogte ter plaatse van de bres in de dam. Gegevens traject (1): bodemhelling $i_{b,1} = 5 \times 10^{-2}$, weerstandscoefficiënt $c_{f,1} = 3 \times 10^{-3}$.

III.3^{1,0} Bereken de waterdiepte in punt A, en bereken vervolgens de evenwichtsdiepte voor traject (1).

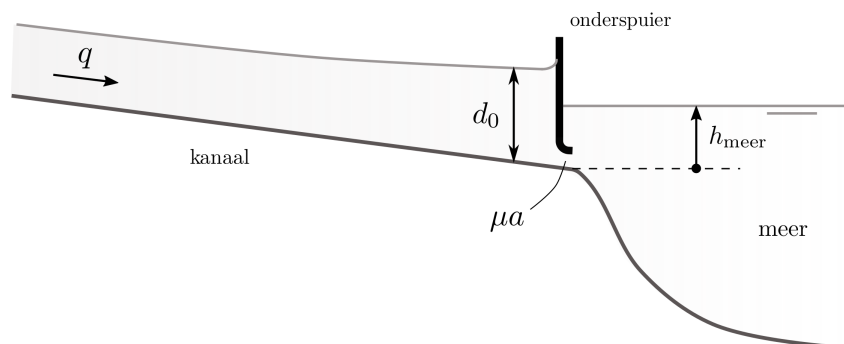
Ergens langs traject (2) treedt een watersprong op. De invloed van eventueel benedenstrooms gelegen randvoorwaarden is ter plaatse van de watersprong niet merkbaar. Gegevens traject (2): bodemhelling $i_{b,2} = 1 \times 10^{-3}$, weerstandscoefficiënt $c_{f,2} = 4 \times 10^{-3}$.

III.4^{1,5} Bereken de waterdiepten aan de boven- en benedenstroomse zijde van de watersprong.

III.6^{1,5} Neem bovenstaande schets van het reservoir en de rivierbedding over en plot daarin het verloop van de grensdiepte, de evenwichtsdiepte en de waterdiepte en voorzie deze van alle in de vorige deelvragen berekende getalswaarden; benoem de verschillende typen verhanglijnen die zich voordoen, en geef per type de plaats aan van de bijbehorende randvoorwaarde en de richting waarin de verhanglijn moet worden opgelost.

Vraagstuk IV (drainagekanaal)

Een drainagekanaal is via een in hoogte verstelbare schuif verbonden met een groot en diep meer. Door de doorstroomhoogte onder de schuif aan te passen kan de waterstand in het drainagekanaal geregeld worden. Het kanaal heeft een uniform, rechthoekig dwarsprofiel zodat we situatie per eenheid van breedte kunnen beschouwen. Zie onderstaande schets van de situatie.



Gedurende het droge seizoen is de afvoer q door het kanaal gelijk aan $4,0 \text{ m}^2/\text{s}$. De waterstand op het meer (h_{meer}) bedraagt gedurende deze periode $2,0 \text{ m}$ ten opzichte van de bodemhoogte ter plaatse van de schuif. De netto doorstroomhoogte μa onder de schuif is daarbij gelijk aan $0,75 \text{ m}$.

IV.1^{1,0} Bereken de bijbehorende waterdiepte d_0 in het kanaal op *korte* afstand bovenstrooms van de schuif, neem daarbij aan dat de stroomsnelheid in het meer verwaarloosbaar klein is.

In het natte seizoen neemt de afvoer q toe tot $8,0 \text{ m}^2/\text{s}$. Teneinde wateroverlast langs het kanaal te voorkomen mag de waterdiepte op een afstand van 2 km bovenstrooms van de schuif niet groter zijn dan $4,0 \text{ m}$. Overige gegevens kanaal: bodemhelling $i_b = 4 \times 10^{-4}$, weerstandscoefficiënt $c_f = 3 \times 10^{-3}$.

IV.2^{1,5} Bereken de maximale waterdiepte $d_{0,\text{max}}$ ter plaatse van de schuif waarbij er nog net geen sprake is van wateroverlast; je mag ervan uitgaan dat de in het kanaal optredende afwijkingen van de eenparige toestand klein zijn.

In het natte seizoen is het waterpeil in het meer (h_{meer}) gestegen tot $3,0 \text{ m}$ ten opzichte van de bodemhoogte bij de schuif.

IV.3^{1,5} Bereken de minimale netto doorstroomhoogte μa_{min} onder de schuif zodanig dat er geen wateroverlast (maximale diepte van 4 m op 2 km bovenstrooms van de schuif) langs het kanaal optreedt, gebruikmakend van het resultaat van vraag IV.2 (gebruik $d_{0,\text{max}} = 4,40 \text{ m}$ indien je het antwoord op deze vraag niet kon berekenen).

IV.4^{1,0} Bereken voor de situatie tijdens het natte seizoen met de minimale doorstroomhoogte μa_{min} de netto horizontale kracht K_H die door het stromende water op de schuif wordt uitgeoefend.

In het natte seizoen neemt tijdens zware regenbuien het debiet q tijdelijk toe en wordt de schuif uit voorzorg volledig geopend. Het waterpeil in het meer wordt niet door deze regenval beïnvloed.

IV.5^{1,0} Bereken het maximum debiet q_{max} waarvoor de waterdiepte langs het *gehele kanaal* hoogstens gelijk is aan de eerder gegeven maximum diepte van $4,0 \text{ m}$.

Vraagstuk I (Caisson)

I.1 Gebruik Archimedes. De massa van de verplaatste hoeveelheid water is: $m = \rho_w * (L * B * (H - 1)) = 1000 * 70 * 11 * 4 = 3.080.000$ kg. Deze hoeveelheid moet gelijk zijn aan de massa van het caisson, inclusief het water in het caisson. De diepte in het caisson wordt daarmee: $d = \frac{1}{BL} * \frac{m - M}{\rho} = \frac{1}{11 * 70} * \frac{3.080.000 - 700.000}{1000} = 3,09$ m.

I.2 Aan de buitenkant staat, tov de bodem van het caisson, een waterdiepte van 4 m. Dit geeft een kracht $F_{buiten} = \frac{1}{2} \rho g d^2 = \frac{1}{2} 10009,814^2 = 78,5$ kN. Aan de binnenkant is de waterdiepte 3,09 m, waardoor de kracht gelijk is aan $F_{binnen} = \frac{1}{2} \rho g d^2 = \frac{1}{2} 10009,813,09^2 = 46,8$ kN. De netto kracht is daarmee: $F_{net} = F_{buiten} - F_{binnen} = 31,6$ kN. Deze kracht is naar binnen gericht.

I.3 De sleepkracht is gegeven door $F = c_w \rho \frac{1}{2} U^2 A$, met $A = (H - 1) * B = 44$ m², $U = 0,25$ m/s, zodat resulteert: $F = 1,05 * 1000 * \frac{1}{2} 0,25^2 44 = 1444$ N. **I.4** Beschouw een doorsnede voor het caisson en een doorsnede onder het caisson en het tussenliggende balansgebied. Bij stilstaand water is er geen versnelling in horizontale richting. De piëzometrische niveau's zullen daarmee gelijk zijn. Bij een bewegend caisson zal het water versnellen in horizontale richting (x): $a_x > 0$. Gebruikmakend van de Euler vergelijking $a_x = -\frac{\partial h}{\partial x}$ betekent dit dat dat het piëzometrisch niveau onder het caisson lager moet zijn dan ervoor. Aangezien de druk aan de onderzijde van het caisson gelijk moet blijven (om het gewicht van het caisson te dragen), zal de plaatshoogte kleiner moeten worden om te voldoen aan het lagere piëzometrische niveau. Het bewegende caisson zal daarmee iets lager liggen dan het stilliggende caisson.

I.5 Het debiet door het gat wordt bepaald door de Torricelli vergelijking: $Q = \mu A \sqrt{2g(h_{buiten} - h_{binnen})}$. Door de instroming van het water zal het totale gewicht van het caisson toenemen. Het caisson zal daarmee zakken. Het hoogteverschil blijft echter constant tussen buiten en binnen.

$$\begin{aligned} h_{buiten} &= \frac{M_{water} + M_{caisson}}{\rho_w * B * L} \\ h_{buiten} &= \frac{\rho * B * L * h_{bin} + M_{caisson}}{\rho_w * B * L} \\ h_{buiten} &= h_{bin} + \frac{M_{caisson}}{\rho_w * B * L} \end{aligned}$$

Het verschil tussen binnen en buiten is daarmee:

$$\Delta h = h_{buiten} - h_{binnen} = \frac{M_{caisson}}{\rho_w * B * L}$$

en daarmee onafhankelijk van de tijd. Het debiet is gegeven door:

$$\begin{aligned} Q &= \mu A \sqrt{2g(h_{buiten} - h_{binnen})} \\ Q &= \mu A \sqrt{2g \frac{M_{caisson}}{\rho_w * B * L}} \end{aligned}$$

Vraagstuk II (Koelwater)

II.1 De energiebalans met de de referentiehoogte $z = 0$ in het midden van de buis:

$$\begin{aligned} \frac{p_X}{\rho g} + \frac{U_X^2}{2g} &= \frac{p_Y}{\rho g} + \frac{U_Y^2}{2g} + \Delta H \\ \frac{p_X - p_Y}{\rho g} &= \frac{U_Y^2 - U_X^2}{2g} + \Delta H \end{aligned}$$

De impulsbalans:

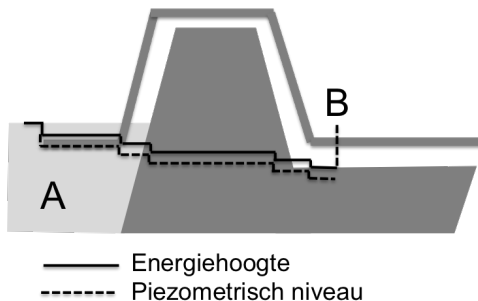
$$\begin{aligned} p_X A + \rho U_X^2 \mu A &= p_Y A + \rho U_Y^2 A \\ p_X - p_Y &= \rho (U_Y^2 - \mu U_X^2) \\ p_X - p_Y &= \rho (U_Y^2 - U_X U_Y) \end{aligned}$$

Substitueer de impulsvergelijking in de energievergelijking:

$$\begin{aligned} \frac{\rho (U_Y^2 - U_X U_Y)}{\rho g} &= \frac{U_Y^2 - U_X^2}{2g} + \Delta H \\ \frac{2U_Y^2 - 2U_X U_Y - U_Y^2 + U_X^2}{2g} &= \Delta H \\ \frac{U_Y^2 - 2U_X U_Y + U_X^2}{2g} &= \Delta H \\ \frac{(U_X - U_Y)^2}{2g} &= \Delta H \\ \left(\frac{1}{\mu} - 1\right)^2 \frac{U^2}{2g} &= \Delta H \end{aligned}$$

II.2

Het intreeverlies is volgens Carnot: $\Delta H_{intree} = \left(\frac{1}{\mu} - 1\right)^2 \frac{U^2}{2g} = \left(\frac{1}{0,7} - 1\right)^2 \frac{U^2}{2g} = 0,18 \frac{U^2}{2g}$. De bochtverliezen bedragen: $\Delta H_{bochten} = 4 \left(\frac{1}{\mu} - 1\right)^2 \frac{U^2}{2g} = 4 \left(\frac{1}{0,9} - 1\right)^2 \frac{U^2}{2g} = 0,05 \frac{U^2}{2g}$. Het totale energieverlies is daarmee: $\Delta H_{tot} = (0,18 + 0,05) \frac{U^2}{2g}$. Met $U = Q / (0,25\pi D^2) = 2,26$ m/s, geeft dit: $\Delta H_{tot} = 0,06$ m. De energiehogte in B is daarmee: $H_B = z_0 - \Delta H_{tot} = -0,06$ m.



II.3 Het pompvermogen is gegeven door $P = \rho g Q \Delta H$, waarbij ΔH het te overwinnen energieverlies is door de leiding. Daarom berekenen we eerst $\Delta H = f \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g} = 0,015 \frac{500}{1,5} \frac{2,26^2}{2 * 9,81} = 1,31$ m. Het pompvermogen is daarmee: $P = 1000 * 9,81 * 4 * 1,31 = 51$ kWatt.

II.4 Het pompvermogen wordt gebruikt om een energiehogte ΔH te overwinnen voor een bepaald debiet Q . Door de aangroei zal de weerstand toenemen. Bij een gelijk debiet, zou daarmee meer energie verloren gaan (ΔH_{CD} zou groter worden). Daarmee zou $Q \Delta H_{CD}$ toe moeten nemen. Dit kan echter niet, omdat het pompvermogen gelijk moet blijven. Het debiet moet daarmee afnemen.

Bij een afnemend debiet en een gelijkblijvend pompvermogen zal ΔH_{tot} toe moeten nemen, aangezien $Q \Delta H_{tot}$ gelijk blijft (al het pompvermogen wordt immers gebruikt, aangezien anders Q weer aanpast). Dit zal vooral gebeuren door de extra weerstand in ΔH_{CD} . Ondanks dat de snelheid afneemt zal het energieverlies in de pijp CD toenemen (de verhoging van de weerstandscoefficient is dominant over de afname van de snelheid). Het energieverlies in het deel AB zal iets afnemen, aangezien de snelheid afneemt.

$$P_{CD} = \rho g Q \Delta H_{CD}$$

$$P_{CD} = \rho g Q f \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g}$$

$$P_{CD} = \rho g Q^3 f \frac{L}{D} \frac{1}{A^2 2g}$$

Aangezien P, L, D, g constant zijn geeft dit: $Q \sim \frac{1}{f^{1/3}}$. Dit betekent dat $\Delta H \sim f^{1/3}$ (omdat $\Delta H \sim f Q^2$). Dit betekent dat bij een toenemende f : Q neemt af en ΔH neemt toe.

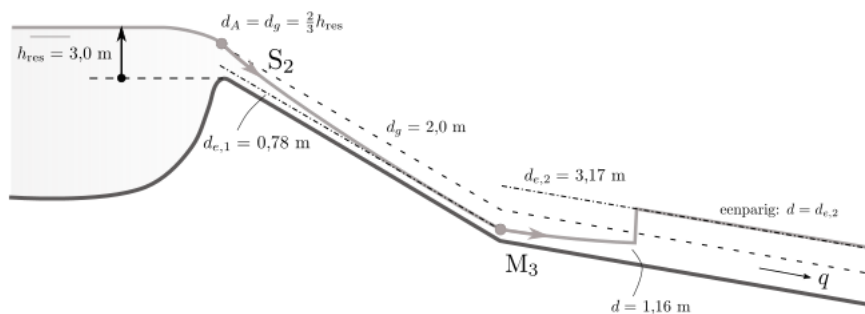
Vraagstuk III (dambreuk)

III.1 Flauwe bodemhelling: de stroming in de eenparige toestand is subkritisch (evenwichtsdiepte groter dan de grensdiepte); steile bodemhelling: de stroming in de eenparige toestand is superkritisch (evenwichtsdiepte kleiner dan grensdiepte). Een praktisch criterium op basis waarvan dit onderscheid gemaakt kan worden is de verhouding tussen de bodemhelling i_b en de weerstandscoefficiënt c_f ; voor $i_b < c_f$ is de bodemhelling flauw, en voor $i_b > c_f$ is de bodemhelling steil.

III.2 Veronderstel dat de bodemhelling van traject (1) in eerste instantie flauw is. Als de benedenstroomse randvoorwaarden geen invloed hebben neemt de waterdiepte in punt A daarbij de evenwichtsdiepte aan (subkritische stroming). Zouden we nu de bodemhelling van traject (1) iets groter maken, dan zou de waterdiepte in A (de evenwichtsdiepte) dichter bij de grensdiepte komen te liggen (vanwege $d_e = (c_f/i_b)^{1/3} d_g$). Bij een verdere toename van het bodemverhang wordt de diepte in A uiteindelijk gelijk aan de grensdiepte. De stroming in A is nu kritisch en de invloed van een verdere toename van de bodemhelling (die inmiddels steil is) op de waterdiepte kan zich vanaf punt A niet meer in bovenstroomse richting voortplanten. De waterdiepte in A blijft vanaf dit moment gelijk en neemt zodoende voor $i_b > c_f$ de grensdiepte aan.

III.3 De specifieke energiehoogte in A (E_A) is gelijk aan het waterniveau in het reservoir ten opzichte van de bodemhoogte in A (h_{res}). Omdat de waterdiepte in A (d_A) gelijk is aan de grensdiepte geldt $d_A = \frac{2}{3} E_A = \frac{2}{3} h_{\text{res}} = 2,0$ m. De evenwichtsdiepte voor traject (1) is nu gelijk aan $d_{e,1} = (c_{f,1}/i_{b,1})^{1/3} d_g$. Met $d_g = d_A = 2,0$ m, en invullen van de gegeven bodemhelling en weerstandscoefficiënt geeft dit $d_{e,1} = 0,78$ m.

III.4 Omdat benedenstroomse randvoorwaarden niet merkbaar zijn ter plaatse van de watersprong is de waterdiepte aan de benedenstroomse zijde van de watersprong gelijk aan de evenwichtsdiepte van traject (2): $d_{e,2} = (c_{f,2}/i_{b,2})^{1/3} d_g = 3,17$ m. De waterdiepte aan de bovenstroomse zijde van de watersprong is de geconjugeerde hiervan. Bereken nu eerst de impulsoverdracht F benedenstrooms: $F = \rho(\frac{1}{2} g d_{e,2}^2 + q^2/d_{e,2}) = 74,0$ kN/m (gebruikmakend van $q = d_g \sqrt{g d_g} = 8,86$ m²/s. Oplossen van d uit $\rho(\frac{1}{2} g d^2 + q^2/d) = F$ (superkritische oplossing nemen) geeft uiteindelijk de gevraagde diepte: $d = 1,16$ m (dit is groter dan de evenwichtsdiepte in traject (1), vandaar dat de watersprong in traject (2) optreedt).



III.5 De stroming in traject (1) is superkritisch (steile helling, stroming in A is kritisch en de watersprong treedt pas op in traject (2)). De bijbehorende randvoorwaarde ligt in punt A waarbij de waterdiepte zich in benedenstroomse richting aanpast, via een S_2 type verhanglijn, tot de evenwichtsdiepte bereikt is (superkritische stroming). De randvoorwaarde voor traject (2) ligt in het knikpunt met een waterdiepte gelijk aan de evenwichtsdiepte van traject (1). De stroming is hier superkritisch en past zich in benedenstroomse richting aan tot de evenwichtsdiepte bereikt is. Aanvankelijk via een M_3 verhanglijn gevolgd door een watersprong op de plaats waar de geconjugeerde waterdiepte gelijk is aan de nieuwe evenwichtsdiepte (subkritische stroming). Dit laatste gegeven volgt uit de afwezigheid van benedenstroomse randvoorwaarden. Zie de begeleidende figuur.

Vraagstuk IV (drainagekanaal)

IV.1 Pas de energievergelijking tot tussen de doorgang bij d_0 en de minimale doorgang onder de schuif (met doorstroomhoogte μa). Ter plaatse van deze laatste doorgang is de waterstand gelijk aan het waterpeil in het meer (vrije uitstroming in groot reservoir). De energievergelijking geeft nu $d_0 + q^2/(2gd_0^2) = h_{\text{meer}} + q^2/(2g(\mu a)^2)$. Invullen van de gegeven getalswaarden voor q , μa en h_{meer} in het rechterlid leidt tot: $d_0 + q^2/(2gd_0^2) = 3,45$ m. Oplossen (grafisch of iteratief) geeft uiteindelijk $d_0 = 3,38$ m (subkritische tak van de oplossing nemen).

IV.2 In het kanaal treedt een M-type verhanglijn op met als benaderende oplossing (kleine afwijkingen van de eenparige toestand): $d(s) = d_e + \Delta d_0 \exp(\Delta s/L)$. Vanwege het gestelde criterium moet gelden dat 2 km bovenstrooms van de schuif (waarvoor $\Delta s = -2000$ m) de waterdiepte $d(s)$ gelijk is aan $d_{\text{max}} = 4,0$ m. Hieruit kan de maximum toelaatbare opstuwing $\Delta d_{0,\text{max}}$ bij de schuif berekend worden. Bereken daartoe eerst de evenwichtsdiepte $d_e = (c_f/i_b)^{1/3}(q^2/g)^{1/3} = 3,66$ m, en vervolgens de aanpassingslengte $L = d_e(1/c_f - 1/i_b)/3 = 2642$ m. Invullen van $d(s) = d_{\text{max}}$ in de benaderende oplossing en enig omwerken geeft nu voor de maximale opstuwing ter plaatse van de schuif: $\Delta d_{0,\text{max}} = (d_{\text{max}} - d_e)/\exp(\Delta s/L) = 0,73$ m.

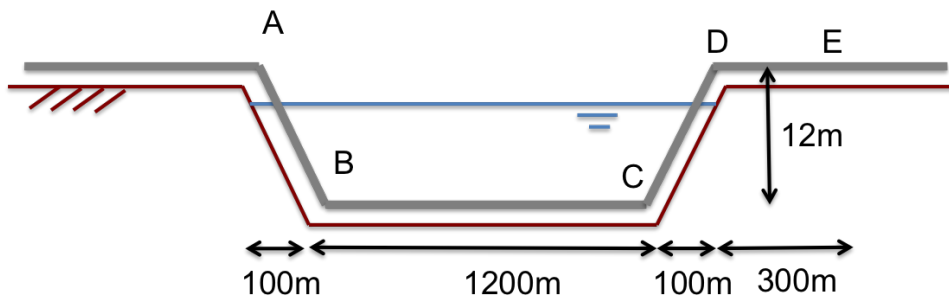
IV.3 Gebruik nogmaals de energievergelijking voor twee doorgangen aan weerszijden van de schuif, maar nu met μa als onbekende. Overige gegevens: waterdiepte $d_0 = d_e + \Delta d_{0,\text{max}} = 4,39$ m, $h_{\text{meer}} = 3,0$ m. Via $d_0 + q^2/(2gd_0^2) = h_{\text{meer}} + q^2/2g(\mu a)^2 = 4,56$ m volgt nu $\mu a = 1,45$ m.

IV.4 Pas de balansvergelijking voor horizontale impuls toe tussen de doorgang vlak voor de schuif (t.p.v. d_0) en de minimale doorgang onder de schuif. De hoogte van de waterkolom waarover in deze laatste doorgang de hydrostatische drukkracht werkt is gelijk aan h_{meer} . De doorstroomhoogte ervan bedraagt $\mu a = 1,45$ m. Dit geeft voor de horizontale kracht op de schuif (per eenheid van breedte): $K_H = F_0 - F_{\mu a} = \rho(\frac{1}{2}gd_0^2 + q^2/d_0 - \frac{1}{2}gh_{\text{meer}}^2 - q^2/\mu a)$, waaruit na invullen van alle getalswaarden direct volgt (geen iteratie nodig) $K_H = 20,65$ kN/m.

IV.5 De randvoorwaarde ter plaatse van de uitstroming in het meer is bij een volledige geopende schuif gelijk aan $d_0 = h_{\text{meer}} = 3,0$ m. Omdat $d_{\text{max}} > d_0$ is voor het maximum debiet de bijbehorende verhanglijn van het type M_2 met als maximum diepte de evenwichtsdiepte: $d_{\text{max}} = d_e$. Dit geeft $(c_f/i_b)^{1/3}(q_{\text{max}}^2/g)^{1/3} = 4,0$ m. Voor de gegeven waarden van het bodemverhang en de weerstandscoefficiënt volgt zo een maximum debiet $q_{\text{max}} = 9,15$ m²/s.

Vraagstuk I (Pijpleiding)

Een pijpleiding kruist een rivier. Hierbij wordt de pijpleiding over de bodem van de rivier gelegd, zie figuur. Let op: de verticale schaal is niet gelijk aan de horizontale schaal. De pijpdiameter bedraagt $D_{pijp} = 1\text{m}$. De pijp heeft een ruwheidscoëfficiënt van $c_f = 0.005$. Het debiet door de pijp bedraagt $Q = 0.5\text{m}^3/\text{s}$.



I.1¹ Laat zien dat hydraulisch ruwe condities gelden.

I.2^{1.5} Leid de vergelijking voor het energieverhang door wandwrijving af: $\frac{\Delta H}{\Delta s} = -c_f \frac{U^2}{gR}$, met s de coördinaat langs de pijp en R de *hydraulische* straal. Bereken het energieverlies als gevolg van wandwrijving tussen A en E.

I.3¹ (i) Geef aan waarom er energieverlies optreedt in de bochten. (ii) Bepaal het energieverlies in een enkele bocht. Introduceer indien nodig nieuwe parameters en geef daar een schatting voor.

In E wordt een piëzometrisch niveau van $h_E = 2\text{m}$ gemeten.

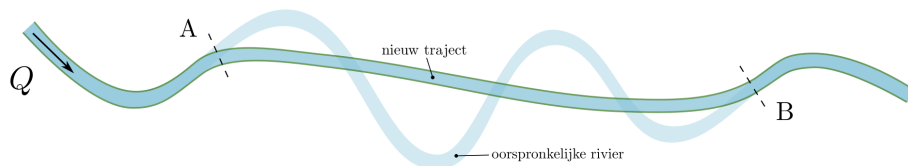
I.4¹ Teken/schets het verloop van het energieniveau en het piëzometrisch niveau tussen A en E. Exacte waarden hoeven niet berekend te worden. Geef wel een beknopte uitleg.

De pijp tussen B en C moet vervangen worden. Er wordt voorgesteld om de de pijp dan direct een grotere diameter te geven. De nieuwe diameter bedraagt $D_{BC} = 1.5\text{m}$.

I.5¹ Wat is het gevolg voor het energieniveau in punt A en in punt D in vergelijking met de voorgaande situatie? Geef een duidelijke uitleg.

Vraagstuk II (bochtafsnijding rivier)

Ten behoeve van de scheepvaart wordt in een sterk meanderende rivier een reeks opeenvolgende bochten afgesneden en afgedamd. Het resulterende traject A-B is korter dan het oorspronkelijke riviertraject tussen deze twee punten en heeft daardoor een grotere bodemhelling. Deze ingreep beïnvloedt uiteraard het verloop van de waterstand in de rivier. Zie onderstaande figuur.



II.1¹ Omschrijf de betekenis van de begrippen *flauwe bodemhelling* respectievelijk *steile bodemhelling*, en leg uit waarom het in de context van bovenstaand probleem van belang is dit onderscheid te maken.

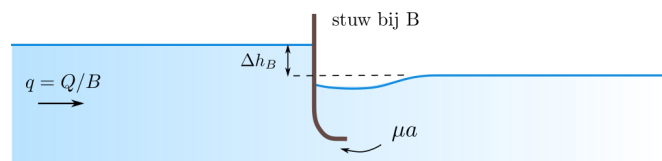
We nemen aan dat de rivier, met inbegrip van het verkorte traject A-B, een uniforme breedte B heeft van 300 m en een uniforme weerstandscoefficiënt c_f van 5×10^{-3} . De bodem verloopt continu met een bodemverhang i_b van 4×10^{-5} in het onaangepaste deel van de rivier; het bodemverhang in het verkorte traject A-B is anderhalf keer zo groot. Het debiet Q in de rivier bedraagt $800 \text{ m}^3/\text{s}$. De randvoorwaarde(n) benedenstrooms van punt B liggen op een zodanig grote afstand dat zij de waterdiepte in B niet beïnvloeden.

II.2¹ Bereken de grensdiepte en de evenwichtsdiepte van de oorspronkelijke rivier en van het verkorte traject A-B en maak een schets van het verloop van de bodemhoogte en de waterstand langs het in de bovenstaande figuur weergegeven deel van de rivier; geef in de schets ook de grensdiepte, de evenwichtsdiepte en het type verhanglijn aan.

Het verkorte traject A-B heeft een lengte L van 12 km.

II.3^{1,5} Bereken de waterdiepte d_A in punt A voor en na de bochtafsnijding; gebruik indien nodig de theorie voor kleine afwijkingen van de eenparige toestand.

De resulterende waterdiepte langs het verkorte traject blijkt bij nader inzien te beperkend voor de scheepvaart. Men overweegt daarom om in punt B een stuw te plaatsen teneinde de waterdiepte in het verkorte traject A-B te vergroten. Zie onderstaande figuur.



II.4^{1,5} Bereken de minimaal benodigde opstuwing Δh_B ter plaatse van punt B zodanig dat de waterdiepte in het traject A-B overall groter is dan de waterdiepte tussen A en B voor de bochtafsnijding.

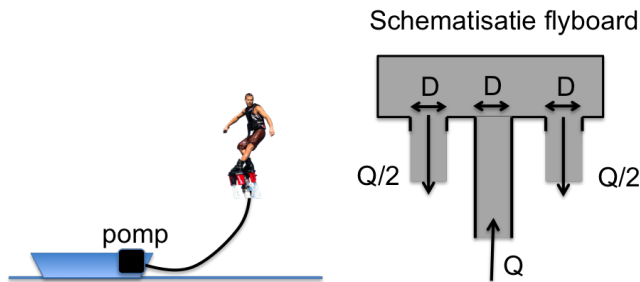
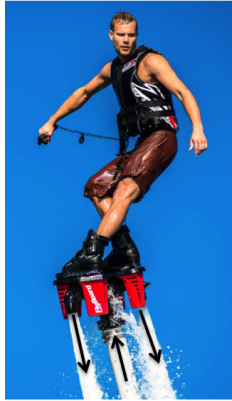
De stuw bestaat uit een verstelbare schuif over de volledige breedte B van de rivier. De opstuwing Δh_B hangt af van de netto doorstroomhoogte μa onder de schuif en van de benedenstroomse waterdiepte.

II.5¹ Geef de twee vergelijkingen waarmee je de netto doorstroomhoogte μa kunt berekenen waarvoor de opstuwing Δh_B bedraagt, en leg in woorden uit hoe je dit stelsel vergelijkingen kunt oplossen.

II.6^{bonuspunt} Bereken voor de minimaal benodigde opstuwing Δh_B van vraag II.4 de vereiste netto doorstroomhoogte μa onder de schuif.

Vraagstuk III (Flyboarder)

In een flyboard wordt de stroming die uit een slang komt omgebogen. Op deze manier kan een persoon op het flyboard staan. Een voorbeeld is gegeven in bijgaande figuur. Een flyboard is verbonden met een bootje waar een pomp op zit om het benodigde vermogen te leveren. Een schematisatie van een flyboard is gegeven in de schets. Een inkomende stroming uit een slang stroomt door de behuizing en stroomt vervolgens als twee vrije stralen weer uit. De diameter van de slang is gelijk aan de diameter van elk van de twee uitgaande stralen: $D = 10\text{cm}$. De flyboarder is 80 kilogram.



II.1¹ Bereken het benodigde debiet om de flyboarder stil in de lucht te laten hangen. Beschouw alleen het verticale evenwicht. De druk in het flyboard mag uniform aangenomen worden.

Iemand argumenteert: "Als het flyboard zich net op het wateroppervlak begeeft is de benodigde opvoerhoogte gelijk aan nul. Daarmee is geen vermogen nodig, aangezien het vermogen wordt bepaald door $P = \rho g Q \Delta H$ ".

II.2¹ Leg uit waarom deze redenering niet klopt.

Aan het begin van de show zweeft de flyboarder ruim boven het wateroppervlak. Vervolgens verhoogt hij het vermogen en dit vermogen houdt hij constant.

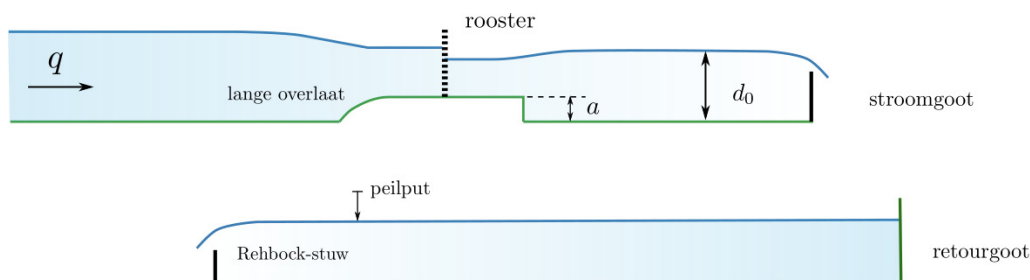
II.3¹ Geef aan wat er zal gebeuren met de flyboarder. Een voorbeeldberekening mag, maar een duidelijke uitleg volstaat ook.

Om het pompvermogen te optimaliseren wordt voorgesteld om de diameter van de slang te veranderen.

II.4¹ Geef een argument om de diameter te vergroten en geef een argument om de diameter te verkleinen.

Vraagstuk IV (overlaat met begroeiing)

In een experimenteel onderzoek wordt nagegaan hoe de aanwezigheid van begroeiing op de kruin van een lange overlaat de bovenstroomse waterstand opstuwt. Hiertoe wordt in een horizontale stroomgoot met een uniforme breedte een lange overlaat gemonteerd. Door middel van het aanbrengen van een fijnmazig rooster op de kruin van de overlaat kan de begroeiing worden nagebootst. Zie onderstaande schets van de situatie.



De stroomgoot heeft een breedte B van 35 cm. Het specifieke debiet q in de stroomgoot wordt op de gebruikelijke wijze bepaald via een zogenaamde retourgoot. Deze laatste heeft een breedte b van 23 cm en aan het uiteinde een Rehbock stuw met een afvoercoëfficiënt m van 1,05. In de bijbehorende peilput wordt een energiehogte E_k gemeten van 12 cm ten opzichte van de kruinhoogte van de Rehbock stuw.

IV.1¹ Bereken het bijbehorende specifieke debiet q in de stroomgoot waarin de overlaat staat.

De lange overlaat in de stroomgoot heeft een kruinhoogte a van 10 cm ten opzichte van het bodemniveau. In eerste instantie doet men een meting zonder rooster. De waterdiepte d_0 benedenstrooms van de overlaat bedraagt daarbij 18 cm.

IV.2^{1,5} Bereken de bijbehorende waterdiepte $d_{k,1}$ op de kruin van de overlaat, en vervolgens de waterdiepte d_1 bovenstrooms van de overlaat; gebruik $q = 4,5 \times 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}$ indien je het antwoord op vraag IV.1 niet hebt kunnen berekenen.

Vervolgens wordt in het midden van de kruin van de overlaat een fijnmazig rooster aangebracht. Het debiet in de goot en de stand van de schuif aan het benedenstroomse uiteinde van de stroomgoot blijven daarbij ongewijzigd.

IV.3¹ Leg uit waarom door het aanbrengen van het rooster, waarbij alle overige instellingen van de goot gelijk blijven, alleen de waterstand bovenstrooms van het rooster beïnvloed wordt.

Ter plaatse van het rooster treedt een verlies aan energiehogte op van $\xi U_{k,2}^2/2g$; hierin is ξ de verliescoëfficiënt van het rooster en $U_{k,2}$ de stroomsnelheid op de overlaat *bovenstrooms* van het rooster. Voor het in het experiment toegepaste rooster is ξ gelijk aan 2.

IV.4^{1,5} Bereken de waterdiepte $d_{k,2}$ op de kruin aan de bovenstroomse zijde van het rooster, en vervolgens de waterdiepte d_2 bovenstrooms van de overlaat (het verschil $d_2 - d_1$ is nu de door het rooster veroorzaakte opstuwning).

Vraagstuk I (Pijpleiding)

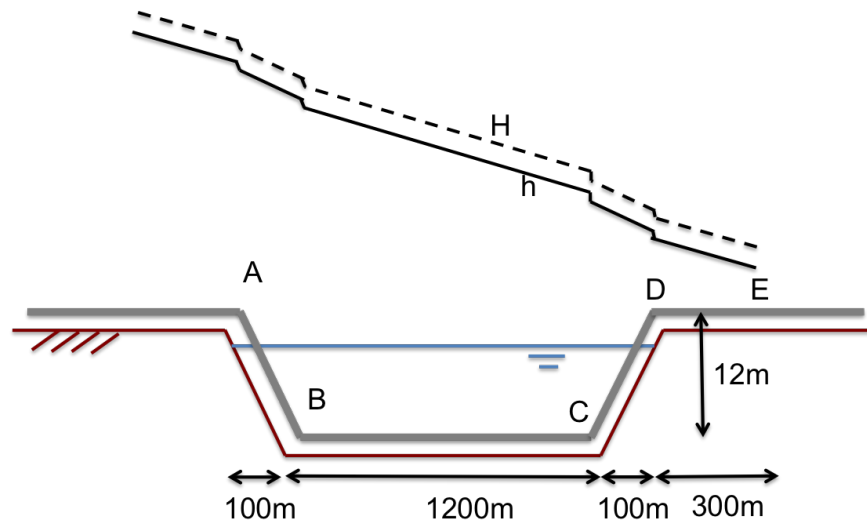
I.1¹ De White-Colebrook vergelijking geeft: $\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(0.27 \frac{k}{D} + \frac{2.5}{Re\sqrt{f}} \right)$. Het linker deel geeft $\frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{1}{\sqrt{8c_f}} = 5$. Daarmee dient te gelden $10^{-2.5} = 0.0032 = \left(0.27 \frac{k}{D} + \frac{2.5}{Re\sqrt{f}} \right)$. k is onbekend. Met $Re = \frac{Q/AD}{\nu} = 6.310^5$ wordt de term $\frac{2.5}{Re\sqrt{f}} = 1.910^{-5}$. Daarmee is $0.27 \frac{k}{D} \gg \frac{2.5}{Re\sqrt{f}}$. Dit houdt in dat er hydraulisch ruwe condities gelden.

I.2¹ Beschouw een deel pijp met lengte Δs en pas een impulsbalans toe. Kracht links: $F_L = p_L A + \rho U_L^2 A$; kracht rechts: $F_R = p_R A + \rho U_R^2 A$; en kracht door wandwrijving: $F_w = \tau \Delta s \pi \frac{D^2}{4}$. De krachten door meevoering zijn links en rechts gelijk, aangezien een uniforme pijp diameter wordt beschouwd. Daarmee wordt de krachtenbalans: $p_L A - p_R A - \tau \Delta s \pi \frac{D^2}{4} = 0$. Dit herschrijven we door gebruik te maken van $\Delta p = p_R - p_L$ en $\tau_b = \rho c_f u^2$: $\frac{dp}{ds} = \rho c_f u^2 \pi \frac{D^2}{4}$. Gebruikmaken van de definitie voor de hydraulische straal: $R = \frac{A}{\pi \frac{D^2}{4}} = \frac{D}{4}$ en door $p = \rho gh$ geeft: $\frac{\Delta h}{\Delta s} = -c_f \frac{U^2}{gR}$. Voor een uniforme snelheid geldt: $\frac{\Delta H}{\Delta s} = \frac{\Delta h}{\Delta s} = -c_f \frac{U^2}{gR}$.

De totale lengte tussen A en E bedraagt: $L = 300 + 1200 + 2 * \sqrt{(100^2 + 12^2)} = 1701\text{m}$. Het verval door wandwrijving in de pijpleiding kan berekend worden met: $\Delta H_{AE} = L_{AE} c_f \frac{U^2}{g(D/4)}$ (dit volgt uit de impulsbalans, of zie formuleblad). Het verval is daarmee: $\Delta H_{AE} = 1701 * 0.005 \frac{0.64^2}{9.81 * (1/4)} = 1701 * 0.00083 = 1.4\text{m}$.

I.3¹ (i) Energieverlies treedt op als er loslating ontstaat in de bochten. Er treedt dan contractie op. Na de contractie treedt energieverlies op. (ii) Om het energieverlies te bepalen wordt gebruik gemaakt van de vergelijking voor verlies bij lokale vernauwingen: $\Delta H = \left(\frac{1}{\mu} - 1 \right)^2 \frac{U^2}{2g}$. Een realistische waarde voor μ ligt tussen de 0.5 en 1.

I.4¹ Het energieniveau neemt lineair af in de pijpleiding door wandwrijving (de snelheid is immers uniform). In de bochten neemt het energieniveau extra af. De snelheid is overal uniform en daarmee de snelheidshoogte $\frac{u^2}{2g}$ ook. Het piëzometrisch niveau loopt daarmee parallel aan het energieniveau. Let op: het energieniveau en het piëzometrisch niveau volgen daarmee niet de vorm van de leiding!



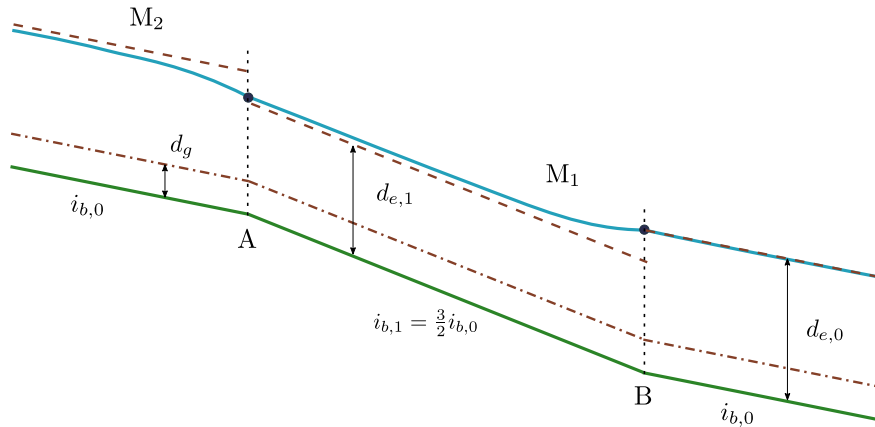
I.5¹ De pijpdiameter verandert niets aan het debiet. Er verandert daarmee niets aan het deel vanaf C. Het energieniveau wordt vanaf C bepaald door het debiet en het benedenstroomse energieniveau. Door de grotere diameter in B-C zal de snelheid over dit deel afnemen en zal ook het wrijvingsverlies afnemen. Het energieniveau in B zal daarmee lager liggen. Dit heeft eveneens gevolgen voor punt A. Ook daar zal het energieniveau lager liggen. Oftewel: in D verandert niets en in A zal het energieniveau lager liggen.

Vraagstuk II (bochtafsnijding rivier)

II.1¹ Flauwe bodemhelling: de stroming in de eenparige toestand is subkritisch (evenwichtsdiepte groter dan de grensdiepte); steile bodemhelling: de stroming in de eenparige toestand is superkritisch (evenwichtsdiepte kleiner dan grensdiepte). Of de bodemhelling flauw danwel steil is is bepalend voor het type verhanglijn dat optreedt (M- respectievelijk S-type) en waar de randvoorwaarden moeten worden opgelegd: benedenstrooms bij subkritische stroming (M_{1,2} en S₁ type verhanglijnen en bovenstrooms bij superkritische stroming (M₃ en S_{2,3} type verhanglijnen).

II.2¹ Grensdiepte: $d_g = (q^2/g)^{1/3}$; met $q = Q/B = 2,67 \text{ m}^2/\text{s}$ geeft dit $d_g = 0,90 \text{ m}$. Evenwichtsdiepte: $d_e = d_g(c_f/i_b)^{1/3}$. Vanwege het verschil in bodemverhang maken we onderscheid tussen de oorspronkelijke rivier ($i_{b,0} = 4 \times 10^{-5}$) en het verkorte traject A-B ($i_{b,1} = 6 \times 10^{-5}$); dit geeft respectievelijk $d_{e,0} = 4,49 \text{ m}$ (oorspronkelijke rivier) en $d_{e,1} = 3,92 \text{ m}$ (traject A-B).

Benedenstrooms van B heerst de eenparige toestand (randvoorwaarden hebben geen invloed) met een diepte gelijk aan $d_{e,0}$. Tussen A en B is de evenwichtsdiepte gelijk aan $d_{e,1} < d_{e,0}$ resulterend in een M₁-type verhanglijn langs dit traject (met de randvoorwaarde in B). Bovenstrooms van A is de evenwichtsdiepte gelijk aan $d_{e,0} > d_A$ resulterend in een M₂-type verhanglijn. Zie onderstaande schets.



II.3^{1,5} In de oorspronkelijke situatie heerst in punt A de oorspronkelijke evenwichtsdiepte $d_{e,0} = 4,49 \text{ m}$ (geen beïnvloeding door eventuele randvoorwaarden benedenstrooms). In de nieuwe situatie treedt tussen A en B een M₁-type verhanglijn op met de waterdiepte in A gegeven door (zie formuleblad): $d_A = d_{e,1} + (d_B - d_{e,1}) \exp((s_A - s_B)/L)$, waarin $d_B = d_{e,0}$ de waterdiepte in punt B is, $s_{A,B}$ de coördinaat in stroomrichting en L de aanpassingslengte van het traject A-B. Deze laatste is gegeven door: $L = d_{e,1}(1/i_{b,1} - 1/c_f)/3 = 21,53 \text{ km}$. Invullen van een en ander (met $s_A - s_B = -12 \text{ km}$) geeft uiteindelijk $d_A = 4,29 \text{ m}$.

II.4¹ Om aan de voorwaarde te voldoen moet gelden dat $d_A \geq d_{e,0}$. Voor het grensgeval $d_A = d_{e,0}$ (voldoet nog net) geeft de verhanglijnvergelijking: $d_A = d_{e,0} = d_{e,1} + (d_B - d_{e,1}) \exp((s_A - s_B)/L)$, met d_B als enige onbekende. Uitwerken geeft $d_B = 4,91 \text{ m}$. Omdat de waterdiepte benedenstrooms van de stuw gelijk is aan $d_{e,0}$ is de minimaal benodigde opstuwing gelijk aan $\Delta h_B \equiv d_B - d_{e,0} = 0,42 \text{ m}$.

II.5¹ De stroming onder de schuif wordt berekend via de energievergelijking (van bovenstrooms tot punt van maximum contractie, en de balansvergelijking voor horizontale impuls (van maximum contractie tot het punt benedenstrooms waar de stroming weer verticaal uniform is). Dit geeft, respectievelijk,

$$d_B + (q/d_B)^2/2g = d_* + (q/\mu a)^2/2g \quad (\text{energie}) \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}gd_*^2 + q^2/\mu a = \frac{1}{2}gd_{e,0}^2 + q^2/d_{e,0} \quad (\text{impuls}) \quad (2)$$

waarin d_* de waterdiepte achter de schuif is ter plaatse van het maximum contractie punt. Dit zijn twee vergelijkingen met twee onbekenden (d_* en μa). Het linkerlid van vergelijking (1) en het rechterlid van vergelijking (2) volgen direct uit de reeds bekende gegevens. Via vergelijking (1) kan d_* worden uitgedrukt in termen van μa . Invullen van deze uitdrukking in vergelijking (2) geeft tenslotte een vergelijking met als enige onbekende μa .

II.6^{bonuspunt} Noem het linkerlid van vergelijking (1) E_B en het rechterlid van vergelijking (2) F_0 ; deze volgen rechtstreeks uit de gegevens. Uit vergelijking (1) volgt nu: $d_* = E_B - (q/\mu a)^2/2g$. Invullen hiervan in vergelijking (2) geeft: $\frac{1}{2}g(E_B - (q/\mu a)^2/2g)^2 + q^2/\mu a = F_0$. Deze vergelijking kan worden opgelost voor de onbekende μa (grafische rekenmachine), met als resultaat $\mu a = 0,77$ m.

Vraagstuk III

III.1¹ Om de flyboarder in evenwicht te houden moeten een krachtenevenwicht gelden. De zwaartekracht werkt naar beneden: $G = mg = 80 * 9.81 = 784.8$ N. Aangenomen mag worden dat de druk in het flyboard gelijk is aan de atmosferische druk (aangegeven was dat de druk uniform is). Alleen de krachten door advectie moeten daarom meegenomen worden. De aanvoerbuis levert een kracht F_{in} en de twee uitvoerbuisen leveren een kracht F_{uit} . Beide krachten zijn naar boven gericht. Het krachtenevenwicht wordt daarmee: $F_{in} + 2F_{uit} = G$.

De kracht door de aanvoerbuis is: $F_{in} = \rho_w u Q = \rho_w \frac{Q^2}{\pi 0.25 D^2} = 4\rho_w \frac{Q^2}{\pi D^2}$. De kracht door een uitstroomopening: $F_{uit} = \rho_w \frac{(0.5*Q)^2}{\pi 0.25 D^2} = \rho_w \frac{Q^2}{\pi D^2}$. Het krachtenevenwicht wordt daarmee $G = (4 + 2)\rho_w \frac{Q^2}{\pi D^2}$. Uitgaande van Aangezien moet gelden $F_{flyboard} - G = 0$, wordt $G = 6\rho_w \frac{Q^2}{\pi D^2}$, resulterend in $Q = D\sqrt{\frac{G\pi}{6\rho_w}} = 0.1\sqrt{\frac{784.8*\pi}{6*1000}} = 0.064$ m³/s. De bijbehorende snelheid door de invoerslang is $u = 8.1$ m/s.

III.2¹ De benodigde opvoerhoogte is niet gelijk aan nul. Er is nog een snelheidshoogte en er is energieverlies door de aanvoerslang. Daarmee wordt de te overwinnen energiehooft: $\Delta H = \frac{f}{8} \frac{U^2}{gR} + \frac{U^2}{2g}$. De laatste term is al 3.3m.

III.3¹ Zoals aangegeven in de vergelijking voor het vermogen, kan het vermogen gebruikt worden voor extra debiet of voor extra hoogte. Als het vermogen plotseling verhoogd wordt is op dat moment de hoogte nog niet verandert. Het debiet wordt daarmee groter en de flyboarder zal omhoog versnellen. Bij de toename in hoogte zal bij gelijkblijvend vermogen het debiet echter afnemen. Als het debiet echter kleiner wordt dan het benodigde draagdebet (zie III.1) dan zal de persoon weer naar beneden versnellen. Oftewel, er is evenwicht als de hoogte bereikt is als het vermogen precies het draagdebet levert. Dit is hoger dan de initiële hoogte.

III.4¹ Vergroting van de diameter geeft een verlaging van het wrijvingsverlies. Verkleining van de diameter geeft een hogere snelheid en daarmee een grotere kracht bij een gelijk debiet. Een optimum dient daarmee gezocht te worden voor een zo groot mogelijke kracht, bij een beperkt energieverlies door wandwrijving.

Vraagstuk IV (overlaat met begroeiing)

IV.1¹ Voor het debiet over de Rehbock stuw geldt: $Q = m b d_k \sqrt{g d_k}$, waarin de diepte op de kruin $d_k = \frac{2}{3} E_k = 0,08$ m. Hieruit volgt $Q = 0,017$ m³/s. Voor het specifieke debiet q in de stroomgoot geldt nu, vanwege continuïteit, $q = Q/B = 0,049$ m²/s.

IV.2^{1,5} Pas de balansvergelijking voor horizontale impuls toe op een balansgebied met als verticale begrenzingen de doorgang vlak achter de overlaat en de doorgang waar de diepte d_0 is gegeven. Op een constante factor ρB na geeft dit: $\frac{1}{2} g (d_{k,1} + a)^2 + q^2/d_{k,1} = \frac{1}{2} g d_0^2 + q^2/d_0$. Het rechterlid volgt rechtstreeks uit de gegeven waarde van d_0 en het berekende specifieke debiet q : $F_{H,0} = 0,17$ m³/s². De diepte op de kruin $d_{k,1}$ kan nu (grafische rekenmachine of iteratie) bepaald worden, met als resultaat $d_{k,1} = 6,7$ cm.

De waterdiepte d_1 bovenstrooms van de overlaat volgt uit de energievergelijking $H_1 = H_{k,1}$ (geleidelijk versnellende stroming), oftewel, $d_1 + (q/d_1)^2/2g = a + d_{k,1} + (q/d_{k,1})^2/2g$. Het rechterlid kan rechtsreeks worden berekend door invullen van q en $d_{k,1}$ waaruit een vergelijking voor de onbekende d_1 volgt. Oplossen hiervan geeft $d_1 = 19,1$ cm (subkritisch).

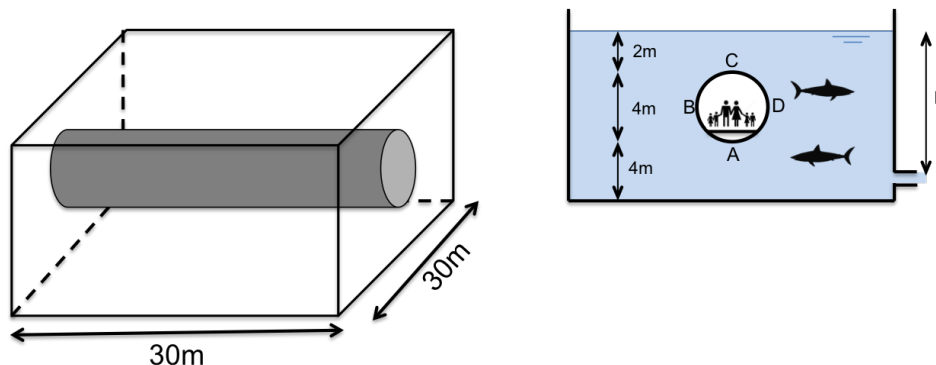
II.3¹ De stroming in de goot is subkritisch, de waterstand is daarbij bepaald door de benedenstroomse randvoorwaarde (via de schuif aan het uiteinde van de stroomgoot). Na het aanbrengen van het rooster blijft de stroming subkritisch en het rooster zal daarom alleen in bovenstroomse richting invloed hebben (opstuwing van de waterstand); benedenstrooms van het rooster verandert de waterstand niet.

II.4¹ Pas de energievergelijking (met de verliesterm) toe op een balansgebied op de kruin van de overlaat met verticale begrenzingen voor (doorgang $k, 2$), respectievelijk achter het rooster (doorgang $k, 1$): $d_{k,2} + (q/d_{k,2})^2/2g - \xi(q/d_{k,2})^2/2g = d_{k,1} + (q/d_{k,1})^2/2g$. Het rechterlid volgt rechtstreeks uit reeds bekende gegevens; wat resteert is een vergelijking met $d_{k,2}$ als enige onbekende. Oplossen (grafisch of iteratief) geeft $d_{k,2} = 10,5$ cm (subkritische oplossing kiezen)

Pas voor de waterdiepte d_2 bovenstrooms van de overlaat wederom de energievergelijking toe: $d_2 + (q/d_2)^2/2g = d_{k,2} + (q/d_{k,2})^2/2g$; na invullen van q en $d_{k,2}$ kan de vergelijking voor d_2 worden opgelost resulterend in $d_2 = 21,3$ cm (subkritisch).

Vraagstuk I (haaienbassin)

Voor een dierentuin is een nieuw haaienbassin ontworpen. Het bassin bestaat uit een bak met een vierkant grondvlak en verticale wanden. Door het bassin loopt een glazen loopbrug met cirkelvormige doorsnede. Deze loopbrug is bevestigd aan wanden aan de uiteinden van de loopbrug, zie figuur. De binnenkant van de loopbrug staat in directe verbinding met de buitenlucht. In de loopbrug heerst daarom altijd de atmosferische druk, evenals aan het wateroppervlak van het bassin.



I.1¹ Bereken de netto verticale drukkracht van het water op de loopbrug.

I.2¹ Bereken de horizontale drukkracht van het water op de linker helft (deel ABC) van de loopbrug.

Na aanleg van de loopbrug blijkt dat er bij punt C een gat zit. Na een uur is 3000 liter water de loopbrug ingestroomd (een kleine hoeveelheid ten opzichte van de totale hoeveelheid water).

I.3¹ Bereken de netto doorsnede van het gat bij punt C.

De gaten worden provisorisch dichtgemaakt, maar voor een grondige reparatie moet het bassin geleegd worden. Daartoe wordt gebruik gemaakt van een uitstroombuis. Het waterpeil in het bassin ten opzichte van het niveau van de uitstroomopening (zie figuur) is weergegeven als hoogte h . Om een schatting te maken van de leeglooptijd wordt in eerste instantie de loopbrug buiten beschouwing gelaten.

I.4¹ Leid af dat de leeglooptijd van het bassin (tot aan de uitstroomopening) gelijk is aan:

$$t_{leegloop} = \frac{B^2}{\mu A_{uit}} \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

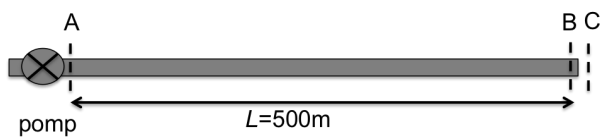
met leeglooptijd $t_{leegloop}$, breedte van het bassin B , effectieve oppervlakte van de uitstroom μA_{uit} en initiële hoogte $h_0 = h(t=0)$. Ga uit van de situatie zonder loopbrug.

I.5¹ (i) Schets eerst het verloop van de waterstand in de tijd (h uitgezet tegen *tijd*) zonder de loopbrug.
(ii) Schets vervolgens het verloop voor de situatie met de loopbrug. Geef daarbij op de verticale as de positie van de loopbrug aan.

Vraagstuk II (strandsuppletie)

Voor een strandsuppletie wordt sediment gebaggerd uit zee en opgespoten op het strand. Voor deze strandsuppletie wordt een pijpleiding aangelegd tussen het baggerschip en het strand. De leiding drijft op het water en ligt daarmee horizontaal. Aan het ene uiteinde van de pijp zit een pomp, die in verbinding staat met het ruim van het baggerschip. Het andere uiteinde is open, waardoor het water horizontaal uitstroomt.

De pijpleiding heeft een lengte $L = 500\text{m}$ en een diameter van $D = 0,80\text{m}$. Het ontwerpdebiet bedraagt $Q = 1\text{m}^3/\text{s}$. Het zand-water mengsel heeft een dichtheid van 1100 kg/m^3 . De ruwheid van de pijp kan als hydraulisch ruw aangenomen worden, met een ruwheidshoogte van $k_s = 1,0\text{mm}$.

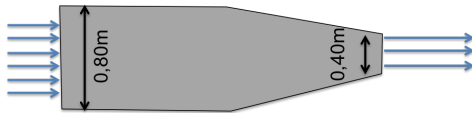


II.1¹ Leg het verschil uit tussen hydraulisch gladde condities en hydraulisch ruwe condities.

II.2¹ Bereken de schuifspanning in het midden van de pijp en aan de wand van de pijp. Teken het verloop van de schuifspanning tussen het midden en de wand.

II.3^{1,5} Teken het energieniveau en het piëzometrisch niveau tussen A (vlak na de pomp) en C (net na de uitstroming). Bereken daartoe de relevante waarden. (mocht je bij II.2 geen Darcy-Weisbach coëfficiënt bepaald hebben, reken dan met $f = 0.02$.)

Aan het uiteinde van de buis wordt een spuitstuk aangebracht om het zand verder te verspreiden, zie figuur. De diameter van de uitstroomopening is gehalveerd tot $D = 0,40\text{m}$.

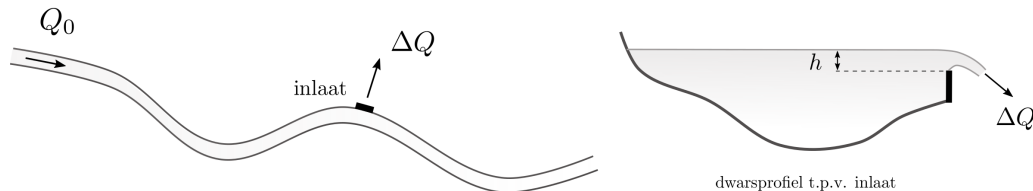


II.4¹ Bereken het **extra** pompvermogen dat nodig is om hetzelfde debiet te behouden.

II.5^{1,5} Bereken de netto horizontale kracht die het water op het spuitstuk uitoefent.

Vraagstuk III (waterinname rivier)

Een waterbedrijf onttrekt oppervlaktewater aan een rivier. Hiertoe is plaatselijk in de oever van de rivier een korte volkomen overlaat aangebracht met een vaste kruinhoogte. Zie onderstaande schets van de rivier en de situatie ter plaatse van het innamepunt.



III.1¹ Benoem de twee belangrijkste verschillen tussen een *korte volkomen* overlaat en een *lange onvolkomen* overlaat, en leg aan de hand hiervan uit in welk van deze gevallen voor een gegeven waterdiepte d_k op de kruin het specifieke debiet q het grootst is.

De overlaat heeft een netto doorstroombreedte b van 25 m en een afvoercoëfficiënt m van 1,04. De snelheidshoogte in de rivier is onder alle omstandigheden verwaarloosbaar klein ten opzichte van de specifieke energiehogte op de kruin van de overlaat.

III.2¹ Bereken het lokale waterpeil h in de rivier ten opzichte van de kruin van de overlaat, wanneer het onttrokken debiet ΔQ gelijk is aan $40 \text{ m}^3/\text{s}$. Het waterpeil in de rivier varieert niet noemenswaardig in de directe omgeving van het innamepunt.

De inname van ruw drinkwater beïnvloedt de waterstand in de rivier tot op grote afstand van de inlaat (verhanglijn).

III.3¹ Benoem de drie belangrijkste uitgangspunten van de theorie die dergelijke veranderingen van de waterstand beschrijft, en leg aan de hand van een tegenvoorbeeld uit welk type waterstandsveranderingen *niet* door deze theorie verklaard worden.

Het natuurlijk debiet Q_0 in de rivier (zonder de waterinname) bedraagt $500 \text{ m}^3/\text{s}$. Voor een eerste berekening wordt de rivier geschematiseerd door middel van een rechthoekig dwarsprofiel met een uniforme breedte B van 85 m, een constant bodemverhang i_b van 3×10^{-4} en een weerstandscoefficiënt c_f van 4×10^{-3} . Daarnaast wordt verondersteld dat de invloed van benedenstrooms gelegen randvoorwaarden niet merkbaar is ter plaatse van de inlaat.

III.4^{1,5} Maak een schets van het verloop van de waterstand in de rivier voor een ruim traject bovenstrooms en benedenstrooms van de inlaat, en bereken vervolgens de waterdiepte in een punt P op 5 km afstand bovenstrooms van de inlaat. Ga bij de berekening uit van kleine afwijkingen ten opzichte van de eenparige toestand.

Tijdens een periode van droogte neemt de natuurlijke afvoer af tot $200 \text{ m}^3/\text{s}$. De kruinhoogte, de netto breedte b en de afvoercoëfficiënt m van de overlaat blijven daarbij gelijk. Alle eerdere aannamen en vereenvoudigingen blijven van kracht.

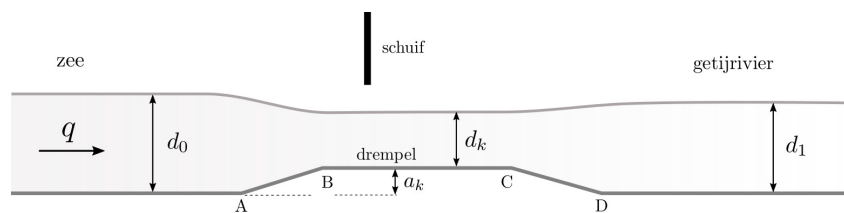
III.5^{1,5} Geef het stelsel vergelijkingen waarmee je de grootte van het ingenomen debiet $\Delta Q'$ in deze nieuwe situatie kunt uitrekenen, en leg uit hoe je dit stelsel oplost. De berekening zelf hoeft niet te worden uitgevoerd (het mag wel), het gaat om een uitleg van de aanpak.

Vraagstuk IV (stormvloedkering met turbines)

Een stormvloedkering bestaat uit een serie pijlers met daartussen doorstroomopeningen, elk bestaande uit een drempel en een schuif welke onder normale omstandigheden volledig geopend is. Het debiet door de kering varieert in de tijd als gevolg van het getij, maar kan daarbij op ieder willekeurig moment als stationair worden beschouwd. Dat wil zeggen, het debiet hangt uitsluitend af van de momentane waarden van de waterdiepten aan weerszijden van de kering.

IV.1¹ Wat volgt uit dit laatste gegeven voor de versnellingen van een waterdeeltje dat de kering passeert?

We laten de invloed van de pijlers tussen de afzonderlijke openingen verder buiten beschouwing en gaan uit van de situatie per eenheid van breedte met een constante bodemhoogte in de omgeving van de kering. De horizontale drempel heeft een hoogte a_k van 3 m ten opzichte van het lokale bodemniveau. De stroomlijnen boven de drempel zijn recht en horizontaal. Een en ander is weergegeven in onderstaande figuur.



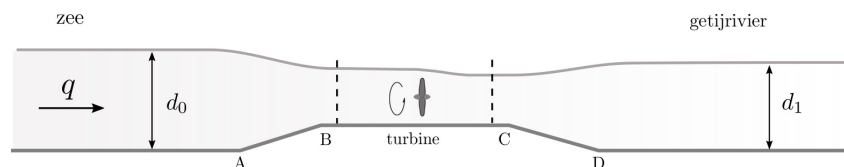
Tijdens hoogwater op zee, met de stroomrichting zoals in bovenstaande figuur, bedraagt de waterdiepte d_0 aan de zeezijde van de kering 10 m. Daarbij wordt op de drempel een waterdiepte d_k gemeten van 6 m.

IV.2¹ Bereken het specifieke debiet q door de kering, ervan uitgaande dat de energieverliezen langs deel A-B-C van de drempel verwaarloosbaar klein zijn. (Ga verder met $q = 35 \text{ m}^2/\text{s}$ als je hier niet uit komt.)

De grootte van de horizontale drukkracht op het (schuin verlopende) deel C-D van de drempel wordt bepaald door de gemiddelde waterdiepte langs dit deel en is (per eenheid van breedte) gegeven door $\frac{1}{2}\rho g(d_k + d_1)a_k$.

IV.3^{1,5} Bereken voor de situatie van vraag IV.2, en uitgaande van de bovenstaande formulering voor de grootte van de horizontale drukkracht langs deel C-D, de waterdiepte d_1 benedenstrooms van de kering.

De hoge stroomsnelheid boven de drempel kan worden benut voor energieopwekking. Hiertoe worden in de kering turbines geïnstalleerd met een rotordiameter van 4 m en een weerstandscoefficiënt van 1,2 welke is gedefinieerd voor het totale oppervlak bestreken door de draaiende rotor. Zie onderstaande figuur.



Tijdens het eerder beschouwde hoogwater, met een waterdiepte d_0 op zee van 10 m, bedraagt het nominaal opgewekte vermogen per turbine 0,2 MW. De dichtheid van zeewater bedraagt 1025 kg/m^3 .

IV.4¹ Bereken het specifieke debiet q door de kering voor de situatie met turbines. Aanwijzing: het nominale turbinevermogen is gelijk aan $c_w A \frac{1}{2} \rho U_B^3$, waarin U_B de stroomsnelheid is in doorgang B, zie figuur. (Ga verder met $q = 22 \text{ m}^2/\text{s}$ als je hier niet uit komt.)

De turbines hebben onderling een hart op hart afstand van 8 m.

IV.5^{1,5} Bereken de bijbehorende waterdiepte op de drempel achter de turbines (doorgang C).

Formuleblad Vloeistofmechanica CTB2110

Fysische constanten

zwaarteversnelling: $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

dichtheid water: $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$

kinematische viscositeit water $\nu = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

Kentallen

Froude-getal, stroomsnelheid U , waterdiepte d :

$$Fr \equiv \frac{U}{\sqrt{gd}}$$

Reynolds-getal, lengteschaal ℓ , dynamische viscositeit η , kinematische viscositeit ν , dichtheid ρ :

$$Re \equiv \frac{\rho U \ell}{\eta} = \frac{U \ell}{\nu}$$

Hydrostatica

Hydrostatisch evenwicht:

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = 0$$

bij constante dichtheid:

$$p + \rho g z = \text{constant}$$

Hydrostatische drukkracht in open waterloop, diepte d , constante dichtheid:

$$F_p = \frac{1}{2} \rho g d^2 \quad \text{p.e.v. breedte}$$

Piezometrisch niveau, atmosferische druk p_a :

$$h \equiv z + \frac{p - p_a}{\rho g}$$

Hydrostatisch evenwicht, ρg en p_a constant:

$$h = \text{constant}$$

Kinematica

Versnelling van een deeltje

Meebewegende (materie)le afgeleide, grootheid f , snelheidsvector $(u_x, u_y, u_z)^T$:

$$\frac{Df}{Dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + u_x \frac{\partial f}{\partial x} + u_y \frac{\partial f}{\partial y} + u_z \frac{\partial f}{\partial z}$$

In natuurlijk (s, n, b) assenstelsel:

$$\frac{Df}{Dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + u_s \frac{\partial f}{\partial s}$$

Meevoering

Volumestroom door doorgang D , normaalsnelheid u_N :

$$Q = \int_D u_N \, dA$$

Overdracht willekeurige grootheid X met dichtheid ρ_X :

$$S_X = \int_D \rho_X u_N \, dA$$

Bijvoorbeeld, impuls ρu :

$$S_{\text{imp}} = \int_D \rho u u_N \, dA$$

Idem, kinetische energie:

$$S_{\text{kin}} = \int_D \frac{1}{2} \rho u^2 u_N \, dA$$

Ideale-vloeistofstroming

Euler-vergelijkingen

Bewegingsvergelijkingen in termen van hoogte piezometrisch niveau $h = z + p/\rho g$ (natuurlijk assenstelsel):

$$a_s = \frac{\partial u_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = -g \frac{\partial h}{\partial s}$$

$$a_n = \frac{\partial u_n}{\partial t} + \frac{u^2}{R} = -g \frac{\partial h}{\partial n}$$

$$a_b = \frac{\partial u_b}{\partial t} = -g \frac{\partial h}{\partial b}$$

Bernoulli

Stationaire ideale-vloeistofstroming:

$$H = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u_s^2}{2g} = h + \frac{u_s^2}{2g} = \text{constant langs stroomlijn} \quad \left(\frac{\partial H}{\partial s} = 0 \right)$$

Torricelli

Stroming uit reservoir via kleine opening:

$$Q = \mu A \sqrt{2g \Delta h},$$

waarin Δh de hoogte is van het piezometrisch niveau in het bovenstroomse reservoir boven dat in de uitredende straal.

Energie

Energieoverdracht

Doorgang D met oppervlak A en normaalsnelheid u_N :

$$P = \int \int_D \left(p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho u^2 \right) u_N \, dA$$

Dwarsprofiel gemiddelde energiehoogte:

$$\langle H \rangle \equiv \frac{P}{\rho g Q}$$

Rechte stroomlijnen (h constant binnen dwarsprofiel), gem. stroomsnelheid U :

$$\langle H \rangle = h + \beta \frac{U^2}{2g}$$

waarin $\beta = \int_D u^3 \, dA / U^3 A \approx 1$

Energiebalans

Voor een stroombuis geldt (stationair, geen toevoeging/onttrekking van energie):

$$P = \rho g Q \langle H \rangle = \text{constant}$$

Pomp, turbine:

$$\Delta P_{\text{pomp, turb}} = \rho g Q \Delta H_{\text{pomp, turb}}$$

Energie-dissipatie gebied met doorgangen D_1 en D_2 , stationair:

$$\Delta P_{\text{diss}} = \rho g Q \Delta \langle H \rangle = \rho g Q (\langle H \rangle_1 - \langle H \rangle_2)$$

Drukverschil

Geleidelijke vernauwing (bijv. Venturi-meter), dynamische druk p :

$$p_1 - p_2 = \Delta p = \frac{1}{2} \rho Q^2 (A_2^{-2} - A_1^{-2})$$

Impuls

Impulsoverdracht

Doorgang D met normaalvector \mathbf{e}_N :

$$\mathbf{F} = \int \int_D (p + \rho u^2) \mathbf{e}_N \, dA$$

Ideen, doorgang met oppervlak A , evenwijdige stroomlijnen en gemiddelde snelheid U :

$$F = \int \int_D p \, dA + \alpha \rho U^2 A$$

waarin $\alpha = \int_D u^2 \, dA / U^2 A \approx 1$

Impulsbalans

Kracht vloeistof op zijdelingse begrenzing stroombuis, doorgangen D_1 en D_2 , zwaartekracht \mathbf{F}_g , stationaire stroming:

$$\mathbf{K} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

Horizontale kracht op begrenzing balansgebied, verticale doorgangen D_1 en D_2 , stationaire stroming:

$$K_H = F_1 - F_2 = \Delta F$$

Lokaal vertragingssverlies

Carnot (abrubte verwijding van diameter D_1 tot D_2 in pijpstroming)

Stijging piezometrisch niveau:

$$h_2 - h_1 = \Delta h = U_2 (U_1 - U_2) / g$$

Daling energieniveau:

$$H_1 - H_2 = \Delta H_v = (U_1 - U_2)^2 / 2g$$

Vertragingssverlies na lokale vernauwing, contractie μ :

$$\Delta H_v = \left(\frac{1}{\mu} - 1 \right)^2 \frac{U^2}{2g}$$

Buisje van Borda (intreeverlies):

$$\mu = \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta H_v = \left(\frac{1}{\mu} - 1 \right)^2 \frac{U^2}{2g}$$

Uitreeverlies (Carnot met $U_2 = 0$):

$$\Delta H_v = \frac{U^2}{2g}$$

Snel variërend vrij oppervlak

Bodemhoogte z_b , diepte d , specifiek debiet q , diepte-gemiddelde snelheid $U = q/d$, rechte stroomlijnen.

Energiehoogte

Diepte-gemiddelde energiehoogte (vormfactor β):

$$H = z_b + d + \beta \frac{U^2}{2g}$$

Specifieke energiehoogte:

$$E = H - z_b = d + \beta \frac{U^2}{2g}$$

Impuls- en energieoverdracht

Impulsoverdracht (vormfactor α):

$$F = \frac{1}{2} \rho g d^2 + \alpha \rho q U \quad \text{p.e.v. breedte}$$

Energieoverdracht:

$$P = \rho g q H \quad \text{p.e.v. breedte}$$

Kritische stroming

Froude-getal F_r :

$$F_r = \frac{U}{\sqrt{gd}} = 1 \Rightarrow U^2 = gd \Rightarrow q^2 = gd^3$$

Specifieke energiehogte:

$$E = d + \frac{U^2}{2g} = d + \frac{gd}{2g} = \frac{3}{2}d$$

Grensdiepte (kritische diepte):

$$d_g = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3} = \frac{2}{3} E_g$$

Onderspuier

Gelijke energiehogte, overgang $d_1 - d_2$ (sub- naar superkritisch):

$$d_1 + \frac{q^2}{2gd_1^2} = d_2 + \frac{q^2}{2gd_2^2}$$

Kracht op schuif (via impulsbalans):

$$K = \frac{1}{2} \rho g (d_1^2 - d_2^2) + \rho q^2 (d_1^{-1} - d_2^{-1}) \quad \text{p.e.v. breedte}$$

Stationaire watersprong

Gelijke impulsoverdracht overgang $d_1 - d_2$ (super- naar subkritisch):

$$\frac{1}{2} g d_1^2 + \frac{q^2}{d_1} = \frac{1}{2} g d_2^2 + \frac{q^2}{d_2} \quad \text{p.e.v. breedte}$$

Dissipatie in sprong (via energiebalans):

$$P_{\text{diss}} = \rho g q \left(d_1 - d_2 + \frac{q^2}{2g} (d_1^{-2} - d_2^{-2}) \right) \quad \text{p.e.v. breedte}$$

Lopende watersprong

Voorplantingssnelheid:

$$c = \sqrt{g \frac{d_1 + d_2}{2} \frac{d_2}{d_1}}$$

Idem, lage storing ($d_1 \approx d_2 = d$):

$$c = \sqrt{gd}$$

Overlaten

Diepte op kruin d_k , specifieke energiehogte op kruin E_k , afvoercoëfficiënt m .

Volkomen afvoer

$$q = m d_k \sqrt{gd_k} = m \frac{2}{3} E_k \sqrt{\frac{2}{3} g E_k}$$

afvoer te bepalen via één meting (bijv. d_k of E_k)

Onvolkomen afvoer

$$q = m d_k \sqrt{2g (E_k - d_k)}$$

afvoer te bepalen via twee metingen (bijv. d_k en E_k)

Weerstand omstroomd voorwerp

Stuwdruk, aanstroomsnelheid U :

$$\Delta p_A = \frac{1}{2} \rho U^2$$

Sleepluchtkracht, aangestroomd oppervlak A :

$$F_w = c_w \frac{1}{2} \rho U^2 A$$

waarin c_w de weerstandscoefficient is. Voorbeeld bol:

$$Re < 1 : \quad c_w = \frac{24\nu}{UD} = \frac{24}{Re}$$

$$10^3 < Re < 2 \times 10^5 : \quad c_w \approx 0,4$$

Energiedissipatie omstroomd voorwerp:

$$\Delta P_{\text{diss}} = F_w U = c_w \frac{1}{2} \rho U^3 A$$

Wandrijving eenparige stroom

Buisstrooming

Diameter $D = 2r_0$, hydraulische straal $R = D/4$, ruwheid k , kinematische viscositeit ν , gemiddelde snelheid $U = Q/A$, wandschuifspanning τ_0 .

Algemeen

Evenwicht schuifkracht - netto drukkracht:

$$\tau_0 L P = \Delta p A = \rho g \Delta h A$$

zodat

$$\tau_0 = \frac{\rho g \Delta h A}{L P} = \rho g i_w R$$

Definitie weerstandsfactor:

$$\tau_0 = c_f \rho U^2 = \frac{f}{8} \rho U^2$$

geeft:

$$i_w = \frac{f U^2}{8 g R}$$

en

$$\Delta H_w = i_w L = f \frac{L U^2}{D 2g} \quad (\text{Darcy-Weisbach})$$

waarin $f = f(Re, \frac{k}{D})$, zie diagram of onderstaande vergelijkingen

Poiseuille

$Re < \text{ca. } 2300$, laminair:

$$f = \frac{64}{Re}$$

waarin $Re = \rho U D / \eta = U D / \nu$

White-Colebrook

$Re > \text{ca. } 4000$, turbulent:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(0,27 \frac{k}{D} + \frac{2,5}{Re \sqrt{f}} \right) = 2 \log \frac{3,7 D}{k (1 + 3,3 / Re_*)} = 2 \log \frac{3,7 D}{k + \delta / 3,5}$$

waarin $\delta = 11,6 \nu / u_*$, $Re_* = u_* k / \nu$ en $u_* = \sqrt{g R i_w} = \frac{1}{2} \sqrt{g D i_w}$.

Willekeurig dwarsprofiel

Doorstroomd oppervlak A , weerstand leverende omtrek P , schuifspanning, gemiddeld over P , is $\langle \tau_0 \rangle$, hydraulische straal $R = A/P$, turbulente hoofdstroom ($Re = U R / \nu > \text{ca. } 600$). Open waterlopen: $i_w = i_b$

Algemeen

Evenwicht schuifkracht - netto drukkracht (eenparige stroom):

$$\langle \tau_0 \rangle = c_f \rho U^2 = \rho u_*^2 = \rho g R i_w$$

$$U = \sqrt{g R i_w / c_f}$$

$$\Delta H_w = i_w L = c_f \frac{U^2}{g R} L$$

White-Colebrook

Gegenaliseerde coëfficiënten voor willekeurige sprofelvorm:

$$\frac{U}{u_*} = \frac{U}{\sqrt{g R i_w}} = \frac{1}{\sqrt{c_f}} = 5,75 \log \frac{12R}{k(1+3,3/Re_*)} = 5,75 \log \frac{12R}{k+\delta/3}, 5$$

waarin $\delta = 11,6\nu/u_*$, $Re_* = u_* k / \nu$ en $u_* = \sqrt{g R i_w}$.

Hydraulisch ruw:

$$\frac{U}{u_*} = \frac{U}{\sqrt{g R i_w}} = \frac{1}{\sqrt{c_f}} = 5,75 \log \frac{12R}{k} \approx 8,3 \left(\frac{R}{k} \right)^{1/6}$$

Verhanglijnen

Tweedimensionale stroom, breedte en diepte constant in dwarsprofiel

Eenparige stroom

Evenwichtsdiepte ($i_b = i_w$):

$$d_e = \left(\frac{c_f q^2}{i_b g} \right)^{1/3}$$

Grensdiepte: zie (1)

Bêlanger

Algemeen:

$$\frac{dd}{ds} = \frac{i_b - i_w}{1 - F^2} = \frac{i_b - c_f Q^2 P / g A^3}{1 - \alpha Q^2 B / g A^3}$$

Tweedimensionale stroom (breedte en diepte constant in dwarsprofiel):

$$\frac{dd}{ds} = \frac{i_b - c_f q^2 / g d^3}{1 - \alpha q^2 / g d^3} = i_b \frac{d^3 - d_e^3}{d^3 - d_g^3} \quad (d \neq d_g \quad \text{en} \quad i_b > 0)$$

Oplösungen

Kleine afwijkingen van de eenparige toestand:

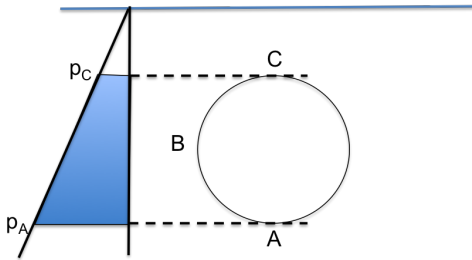
$$\Delta d = \Delta d_0 \exp \left(\frac{s - s_0}{L} \right) \quad \text{waarin} \quad L = \frac{1 - i_b / c_f}{3 i_b} d_e$$

Horizontale bodem:

$$\frac{1}{4} d^4 - d_g^3 d + c_f d_g^3 s = \text{constant}$$

Vraagstuk I (haaienbassin)

I.1¹ De totale opwaartse kracht kan bepaald worden met de wet van Archimedes: $F_{ver} = \rho_{water} g V = \rho g \pi \frac{D^2}{4} L = 1000 * 9.81 * \pi * 4^2 / 4 * 30 = 3.7 * 10^6$ N of $F_{ver} = 3.7$ MN.

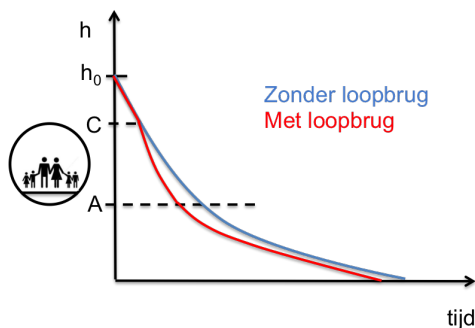


I.2¹ De horizontale drukkracht wordt bepaald door een balansgebied te kiezen, zoals aangegeven in de figuur. De horizontale drukkracht over AC is dan gelijk aan de drukkracht over A'C'. De drukkracht kan dan bepaald worden met $F_{hor} = \rho g \frac{1}{2} (d_A + d_C) L (z_C - z_A) = 1000 * 9.81 * 0.5 * (2 + 6) * 30 * 4 = 4.7$ MN. Een andere methode is: $F_{hor} = (\frac{1}{2} \rho g d_A^2 - \frac{1}{2} \rho g d_C^2) L$.

I.3¹ Na een uur is er 3 m^3 naar binnen gestroomd. Het debiet is daarmee: $Q = 3/3600 = 0.000833 \text{ m}^3/\text{s}$. Om de netto doorsnede van het gat te bepalen kunnen we Torricelli toepassen: $Q = \mu A \sqrt{2g\Delta h}$, met h de waterdiepte boven C en effectieve doorsnede $\mu A = \frac{Q}{\sqrt{2g\Delta h}} = \frac{0.000833}{\sqrt{2 * 9.81 * 2}} = 1.33 \text{ cm}^2$.

I.4¹ Bepaling van de leeglooptijd start met de balansvergelijking voor massa: $\frac{dm}{dt} = -\rho_{water} Q$ (let op minteken). De massa neemt af als gevolg van het uitstroomdebiet Q . Voor constante dichtheid valt de dichtheid weg, zodat geldt: $B^2 \frac{dh}{dt} = -Q$. Het debiet Q hangt af van de waterstand in het bassin. De referentiepositie is gelijk gekozen aan de uitstroming. Het debiet kan daarmee geschreven worden als: $\mu A \sqrt{2g\Delta h}$. Invullen in de balansvergelijking geeft: $B^2 \frac{dh}{dt} = -\mu A \sqrt{2g\Delta h}$. Om de leeglooptijd te bepalen wordt deze vergelijking geïntegreerd: $\int \frac{B^2}{\mu A \sqrt{2g}} \frac{1}{\sqrt{h}} dh = -\int dt$. De op te lossen vergelijking voor de periode $t = 0$ tot $t = t_1$, met $h(t = 0) = h_0$ en $h(t = t_1) = 0$ is daarmee: $\int_{h_0}^0 \frac{B^2}{\mu A \sqrt{2g}} \frac{1}{\sqrt{h}} dh = -\int_{t_0}^{t_1} dt$. De leeglooptijd wordt: $t_{leegloop} = t_1 - t_0 = \frac{B^2}{\mu A_{uit}} \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$.

I.5¹ (i) De waterstand verloopt niet lineair met de tijd, aangezien de uitstroomsnelheid afneemt met de waterstand in het bassin. Dit volgt direct uit de gegeven vergelijking. De tijd die nodig is om de laatste helft van het volume weg te laten stromen vergt $\frac{1}{\sqrt{2}}$ van de totale leeglooptijd. De eerste helft gaat daarmee in $(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}) t_{leegloop}$. (ii) De loopbrug verkleint het totale volume. De leeglooptijd zal daarmee korter zijn. De daling in waterstand $\frac{dh}{dt}$ zal alleen verschillend zijn tussen z_C en z_A , aangezien dan het oppervlak niet gelijk is aan B^2 .

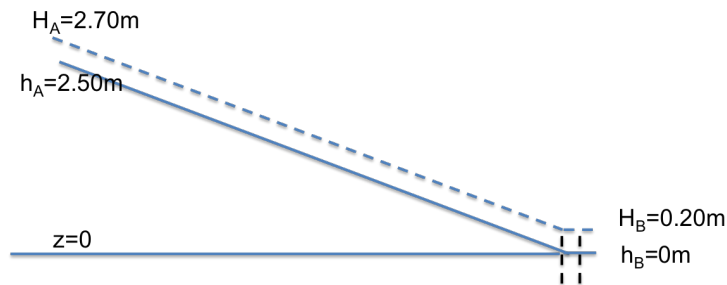


Vraagstuk II (strandsuppletie)

II.1¹ Voor hydraulisch gladde condities zijn de oneffenheden klein ten opzichte van de dikte van de laminaire sublaag. De laminaire sublaag bepaalt daarmee de Darcy-Weisbach ruwheidscoëfficiënt f en daarmee de wandwrijving. In het geval van hydraulisch ruwe condities is de laminaire sublaag klein ten opzichte van de ruwheidselementen. De ruwheid van de wand bepaalt de wandwrijving.

II.2¹ In het midden van de pijp is de schuifspanning gelijk aan nul, aangezien de dwarsgradiënt van de stroming daar nul is $\frac{du}{dy} = 0$. Aan de wand is de wandschuifspanning gelijk aan $\tau_{wand} = \frac{f}{8}\rho U^2$, met U de gemiddelde snelheid. De ruwheidscoëfficiënt kan bepaald worden op basis van de ruwheidshoogte $k_s = 1\text{mm}$: $\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log\left(0.27 \frac{k_s}{D}\right)$. De ruwheidshoogte wordt dan: $f = 0.207$. De gemiddelde stroomsnelheid is $U = \frac{Q}{\pi D^2/4} = 1.99\text{m/s}$. De wandwrijving wordt daarmee: $\tau_{wand} = \frac{f}{8}\rho U^2 = 0.0207/8 * 1100 * 1.98^2 = 11.2\text{Pa}$. Tussen het midden van de pijp en de wand verloopt de schuifspanning lineair.

II.3^{1,5} De uitstroomhoogte is gedefinieerd als $z = 0$. Aangezien de druk daar nul is, geldt ook $h_B = 0$. De energiehogte is $H_B = h_B + \frac{U^2}{2g} = 0 + 0.20 = 0.20\text{m}$. Over de pijp treedt energieverlies op: $\Delta H = f \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g} = 0.02 \frac{500}{0.8} \frac{1.98^2}{2 * 9.81} = 2.50\text{m}$. Dit geeft: $h_A = 2.50\text{m}$ en $H_A = 2.70\text{m}$.



II.4¹ In de situatie met spuitstuk wordt de snelheid bij de uitstroming $U = \frac{Q}{\pi D_{spuit}^2/4} = 7.9\text{m/s}$. De snelheidshoogte wordt daarmee: $\frac{U^2}{2g} = \frac{7.9^2}{2 * 9.81} = 3.2\text{m}$. In de oude situatie was de snelheidshoogte 0.2m . De extra te overwinnen energiehogte wordt daarmee: $\Delta H = 3.2 - 0.2 = 3.0\text{m}$. Het extra vermogen dat geleverd moet worden is daarmee: $\Delta P = \rho g Q \Delta H = 1100 * 9.81 * 1 * 3 = 32.3\text{ kW}$.

II.5^{1,5} Bekend zijn het debiet (Q), de diameters van de openingen (D_1 en D_2) en de druk op bij de uitstroming ($p = 0$, atmosferische druk). Een krachtenbalans kan opgesteld worden $\Sigma F = F_{spuit} + F_1 + F_2$. Om deze krachten uit te rekenen moeten de snelheden en de drukken op doorsnede 1 (vlak voor het spuitstuk) en doorsnede 2 (vlak na het spuitstuk) bepaald worden. Er geldt voor de versnellende stroming dat het energieniveau uniform is $H_1 = H_2$. Ook geldt de massabalans $Q_1 = Q_2$. Voor de uitstroomzijde kunnen we daarmee de variabelen berekenen: $H_2 = h_2 + \frac{U_2^2}{2g} = 0 + \frac{7.9^2}{2 * 9.81} = 3.2\text{m}$ en $F_2 = -\rho * Q * U_2 + p * A = 1100 * 1 * 7.9 + 0 = -8.69\text{kN}$. Voor de linkerzijde geldt: $H_1 = H_2 = 3.2\text{m}$. De druk in doorsnede 1 wordt daarmee: $p_1 = \rho g \left(H_1 - \frac{U_1^2}{2g}\right) = 1100 * 9.81 * (3.2 - 0.2) = 32.37\text{ kPa}$. De kracht aan de linkerzijde wordt daarmee: $F_1 = p_1 A + \rho Q U_1 = 32.37 * 10^3 * \pi * 0.4^2 + 1100 * 1 * 1.98 = 16.2 * 10^3 + 2.2 * 10^3 = 18.45\text{ kN}$. Het verschil in krachten moet geleverd worden om het spuitstuk vast te houden wordt daarmee: $F_{spuit} = -F_1 - F_2 = -18.45 + 8.69 = -9.8\text{ kN}$ en is daarmee naar links gericht (tegen de stroming in).

Vraagstuk III

III.1 Het antwoord dient de volgende elementen te bevatten:

- Boven een lange overlaat zijn de stroomlijnen recht en is de drukverdeling hydrostatisch, de stroomsnelheid is dan vrijwel constant over de diepte. Bij een korte overlaat zijn de stroomlijnen gekromd, de drukverdeling is niet-hydrostatisch en de stroomsnelheid varieert over de diepte, neemt daarbij toe in de richting van de kruin. Afvoercoëfficiënt is hierdoor groter dan 1 $\left[\frac{1}{4}\right]$.

- Onvolkomen wil zeggen dat de afvoer gestuwd is, benedenstroomse veranderingen van de waterstand zijn merkbaar bovenstrooms van de overlaat. De stroming boven de overlaat is subkritisch. Bij een volkomen overlaat zijn benedenstroomse veranderingen van de waterstand niet merkbaar aan de bovenstroomse zijde. De stroming op de overlaat is kritisch $[\frac{1}{4}]$.
- Bij een volkomen overlaat is de stroomsnelheid boven de kruin gelijk aan $\sqrt{gd_k}$ (kritische stroming). Vanwege de kromming van de stroomlijnen is de afvoercoëfficiënt groter dan 1 $[\frac{1}{4}]$. Bij een onvolkomen overlaat is de stroming op de kruin subkritisch, en is de stroomsnelheid kleiner dan $\sqrt{gd_k}$. Bovendien is de afvoercoëfficiënt kleiner dan bij een volkomen overlaat. Dit alles resulteert, bij gelijke diepte, voor de lange onvolkomen overlaat in een kleiner debiet dan bij de korte volkomen overlaat $[\frac{1}{4}]$.

III.2 De afvoer over een volkomen overlaat is gegeven door $\Delta Q = m b d_k \sqrt{gd_k}$. Invullen van het gegeven debiet, ΔQ , de afvoercoëfficiënt en de breedte geeft nu $d_k = 0,62 \text{ m}$ $[\frac{1}{2}]$. De overlaat is volkomen, d_k is gelijk aan de grensdiepte zodat de specifieke energiehogte boven de kruin $E_k = \frac{3}{2} d_k = 0,93 \text{ m}$ $[\frac{1}{4}]$. Omdat snelheidshoogte-effecten in de rivier verwaarloosbaar klein zijn geldt voor de waterstand h in de rivier, gemeten ten opzichte van de kruin, $h = E_k = 0,93 \text{ m}$ $[\frac{1}{4}]$.

III.3 Het antwoord dient de volgende elementen te bevatten:

- De stroming is stationair, verandert niet in de tijd. Het debiet Q is constant in tijd en plaats $[\frac{1}{4}]$.
- De diepte varieert slechts geleidelijk, de stroomlijnen zijn vrijwel recht, en de drukverdeling is nagenoeg hydrostatisch. De specifieke energiehogte is dan gegeven door $E_k = d + \beta U^2 / 2g$ (waarin $\beta \approx 1$ is een correctiefactor voor niet-uniformiteit van de stroomsnelheid over de diepte) $[\frac{1}{4}]$.
- De energiehogte varieert (in stroomrichting) uitsluitend onder invloed van de wandweerstand $[\frac{1}{4}]$.
- Tegenvoorbeeld: lokale (vertragsings)verliezen rondom kunstwerken of onder invloed van sterke variaties van het vrij oppervlak (bijvoorbeeld watersprong) worden niet door de theorie beschreven en moeten door middel van zogenaamde overgangsvoorwaarden verdisconteerd worden $[\frac{1}{4}]$.

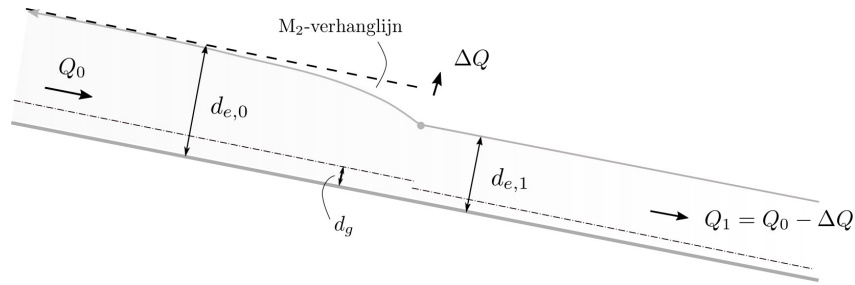
III.4 Bovenstrooms van het inlaatpunt is het debiet groter dan benedenstrooms ervan. Vanwege de constante breedte van de rivier geldt hetzelfde voor de respectievelijke specifieke debieten, en is bovenstrooms van de inlaat de evenwichtsdiepte groter dan benedenstrooms $[\frac{1}{4}]$. Omdat de invloed van benedenstroomse randvoorwaarden niet merkbaar is bij de inlaat is de diepte ter plaatse van de inlaat gelijk aan de evenwichtsdiepte van het benedenstroomse traject $[\frac{1}{4}]$. Hierdoor stelt zich langs het bovenstroomse traject een M_2 -type verhanglijn in ($c_f > i_b$ dus *mild slope*). Zie figuur $[\frac{1}{4}]$.

De berekening van de waterdiepte in P verloopt als volgt.

- Bereken eerst de evenwichtsdiepte in, respectievelijk, het boven- en benedenstroomse traject via $d_e = ((c_f/i_b)q^2/g)^{1/3}$. Met $q_0 = Q_0/B = 5,88 \text{ m}^2/\text{s}$ en $q_1 = (Q_0 - \Delta Q)/B = 5,41 \text{ m}^2/\text{s}$ geeft dit, respectievelijk, $d_{e,0} = 3,61 \text{ m}$ en $d_{e,1} = 3,41 \text{ m}$ $[\frac{1}{4}]$.
- De aanpassingslengte van het *bovenstroomse* traject, waar de verhanglijn zich voordoet, is gegeven door $L = d_{e,0} (i_b^{-1} - c_f^{-1}) / 3 = 3710 \text{ m}$ $[\frac{1}{4}]$.
- De waterdiepte in punt P volgt nu uit: $d_P = d_{e,0} + (d_{e,1} - d_{e,0}) \exp((s - s_0)/L)$, waarin $s - s_0 = -5000 \text{ m}$. Dit geeft tenslotte $d_P = 3,56 \text{ m}$ $[\frac{1}{4}]$.

III.5 Het onttrokken debiet $\Delta Q'$ is via de afvoerrelatie voor de volkomen overlaat bepaald door de lokale waterdiepte bij de inlaat, welke gelijk is aan de evenwichtsdiepte in het benedenstroomse traject $[\frac{1}{4}]$. Deze evenwichtsdiepte is echter afhankelijk van het debiet benedenstrooms van de inlaat, en daarmee ook van $\Delta Q'$ $[\frac{1}{4}]$. Een en ander leidt tot de volgende set vergelijkingen:

1. benedenstroomse evenwichtsdiepte: $d_{e,1} = \left(\frac{c_f q_1^2}{i_b g} \right)^{1/3}$ $[\frac{1}{4}]$
2. waarin $q_1 = \frac{Q_0 - \Delta Q'}{B} = q_0 - m \frac{b}{B} d_k \sqrt{gd_k}$ $[\frac{1}{4}]$



3. waarin de diepte op de kruin $d_k = \frac{2}{3}E_k = \frac{2}{3}(d_{e,1} - a_k)$, hierin is a_k de hoogte van de kruin ten opzichte van de lokale rivierbodem $[\frac{1}{4}]$

Dit stelsel kan worden opgelost door de uitdrukking voor de evenwichtsdiepte (1) te substitueren in de vergelijking voor de diepte op de kruin (3) en deze vervolgens te substitueren in de vergelijking voor het debiet q_1 (2). Na oplossen van deze vergelijking is via (2) het onttrokken debiet bekend. (Andere strategieën zijn ook mogelijk, bijvoorbeeld q_1 elimineren uit (1) via invullen van (2) geeft een vergelijking voor $d_{e,1}$. Iteratief: eerste schatting $q_1 = q_0$, bereken vervolgens $d_{e,1}$, hieruit volgt via (2) en (3) de waarde van $\Delta Q'$ waarmee de schatting voor q_1 verbeterd kan worden, enz.) $[\frac{1}{4}]$ (In dit geval met $Q_0 = 200 \text{ m}^3/\text{s}$ is het antwoord uitermate eenvoudig. De evenwichtsdiepte $d_{e,0}$ is in deze situatie 1,78 m terwijl de kruinhoogte $a_k = 2,68 \text{ m}$ (dit volgt uit het antwoord van vraag III.2). Er stroomt dus geen water over de overlaat, $\Delta Q' = 0$ en $d_{e,1} = d_{e,0} = 1,78 \text{ m}$.)

Vraagstuk IV

IV.1 De versnelling van een waterdeeltje is gegeven door de meebewegende (of materiële) afgeleide $D\vec{u}/Dt = \partial\vec{u}/\partial t + u_s\partial\vec{u}/\partial s$ $[\frac{1}{2}]$. In een stationaire stroming is de tijdsafgeleide gelijk aan nul en resteert alleen de tweede term $[\frac{1}{4}]$. De snelheidsveranderingen (versnellingen) van een deeltje dat de kering passeert zijn daarom vrijwel uitsluitend het gevolg van de verplaatsing van het deeltje door een ruimtelijk variërend snelheidsveld $[\frac{1}{4}]$.

IV.2 Gebruik de energievergelijking: $H_0 = H_k$ $[\frac{1}{4}]$ geeft (gebruik de bodem rondom de kering als referentievlak): $d_0 + q^2/2gd_0^2 = a_k + d_k + q^2/2gd_k^2$ $[\frac{1}{2}]$. Met de gegeven waarden voor d_0 , d_k en a_k volgt hieruit (iteratief of grafisch, kies de subkritische oplossing) $q = 32,2 \text{ m}^2/\text{s}$ $[\frac{1}{4}]$.

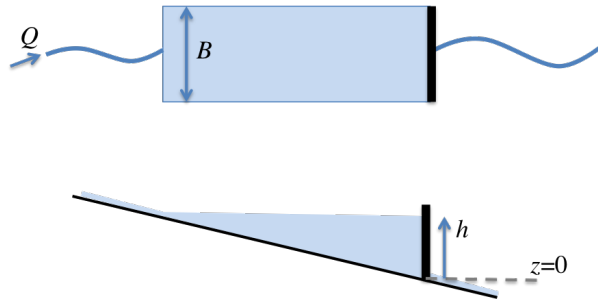
IV.3 De impulsvergelijking voor een balansgebied tussen de kruin en doorgang 1 achter de kering luidt: $F_k + K_{H,CD} = F_1$ $[\frac{1}{4}]$. Met gebruikmaking van de uitdrukking voor de impulsoverdracht in een verticale doorgang en de gegeven uitdrukking voor de horizontale kracht op deel CD volgt hieruit (op een constante factor ρ na): $\frac{1}{2}gd_k^2 + q^2/d_k + \frac{1}{2}a_k(d_k + d_1) = \frac{1}{2}gd_1^2 + q^2/d_1$ $[\frac{1}{2}]$. Dit is een vergelijking met d_1 als enige onbekende, met als (subkritische) oplossing $d_1 = 9,93 \text{ m}$ $[\frac{1}{4}]$.

IV.4 Uit het turbinevermogen volgt de stroomsnelheid U_B op de kruin van de overlaat aan de aanstroomzijde van de turbines (doorgang B): $\Delta P_t = c_w A \frac{1}{2} \rho U_B^3 = 0,2 \text{ MW}$ met $A = \frac{1}{4} \pi D^2$ geeft $U_B = 2,96 \text{ m/s}$ $[\frac{1}{4}]$. Om vervolgens het specifieke debiet q te berekenen gebruiken we de energievergelijking tussen doorgang 0 en doorgang B: $H_0 = H_B$, oftewel, $d_0 + q^2/2gd_0^2 = a_k + d_B + U_B^2/2g$ $[\frac{1}{4}]$. Via $q = d_B U_B$ werken we dit om tot $d_0 + q^2/2gd_0^2 = a_k + q/U_B + U_B^2/2g$ $[\frac{1}{4}]$. Na invullen van d_0 , a_k en de zojuist gevonden waarde van U_B geeft dit $q = 20,0 \text{ m}^2/\text{s}$ $[\frac{1}{4}]$. (De bijbehorende waterdiepte $d_B = 6,76 \text{ m}$.)

IV.5 Gebruik de energiebalans voor het balansgebied tussen de doorgangen B en C: $\rho g q H_B - \Delta p_t = \rho g q H_C$; hierin is Δp_t het door de turbines onttrokken vermogen per eenheid van breedte $[\frac{1}{2}]$. Dit vermogen is gelijk aan het vermogen per turbine gedeeld door de hart op hart afstand van de turbines: $\Delta p_t = 25 \text{ kW/m}$ $[\frac{1}{2}]$. Het linkerlid van de impulsvergelijking is hiermee volledig bepaald. Met de kruinhoogte als referentieniveau geeft dit $\rho g q (d_B + \rho q^2/2gd_B^2) = 1421,4 \text{ kW/m}$ waaruit voor de diepte in doorgang C volgt (subkritische oplossing) $d_B = 6,61 \text{ m}$ $[\frac{1}{2}]$. (Een aanpak via een impulsbalans tussen B en C met de horizontale kracht op de turbine gegeven door $F_{H,t} = c_w A \frac{1}{2} \rho U_B^2$ is ook mogelijk.)

Vraagstuk II (stuwmeer)

Een stuwdam wordt in een rivier geplaatst waardoor een stuwmeer ontstaat. Ter schematisatie wordt de breedte van het stuwmeer uniform verondersteld met $B = 2000\text{m}$. De helling van de bodem is uniform en gelijk aan $i_b = 10^{-3}$. De uitstroomopeningen liggen op een hoogte van $z = 0$ en hebben een netto doorstroomoppervlakte $\mu A = 40\text{ m}^2$. Het waterniveau h in het stuwmeer is uniform en bedraagt maximaal 12 m.



II.1¹ Bereken hoe groot het debiet Q maximaal mag zijn opdat de maximum waterstand in het stuwmeer niet wordt overschreden.

In een periode van droogte reduceert het bovenstroomse debiet abrupt tot nul. De uitstroomopeningen blijven echter open staan.

II.2^{1.5} Laat zien dat in deze situatie de waterstand daalt volgens de vergelijking:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\mu A i_b}{B h} \sqrt{2gh}$$

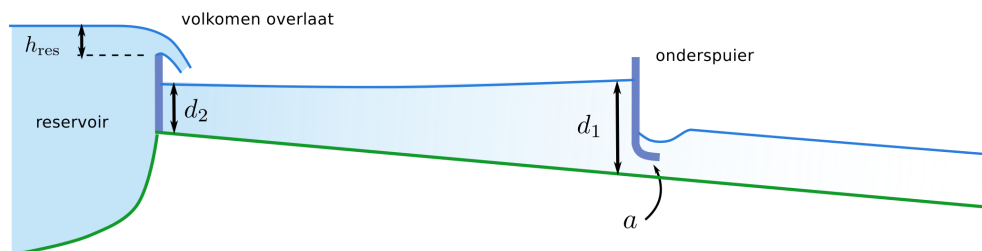
II.3^{1.5} Bepaal de leeglooptijd van het stuwmeer, uitgaande van een initiële waterstand van 12m.

Na de periode van droogte zal er weer een inkomend debiet Q zijn.

II.4¹ Herschrijf bovenstaande differentiaalvergelijking zodanig dat de invloed van het debiet Q op de waterstandsvariatie in het stuwmeer correct wordt weergegeven.

Vraagstuk III (irrigatiekanaal)

Een landbouwgebied wordt gevoed met water uit een groot reservoir. Het daartoe aangelegde irrigatiekanaal sluit op het reservoir aan via een korte volkomen overlaat over de volle breedte van het kanaal. In een deel van het kanaal kan de waterdiepte worden geregeld door middel van een in hoogte verstelbare onderspuier. We beschouwen de situatie per eenheid van breedte. Zie onderstaande figuur.



In bovenstaande (stationaire) situatie treden zowel abrupte als geleidelijke ruimtelijke veranderingen van de stroming en het vrij oppervlak op.

III.1¹ Leg uit wat de belangrijkste fysische verschillen zijn tussen deze twee verschillende typen stroming.

Het waterpeil in het reservoir ligt 75 cm boven de kruin van de overlaat. De overlaat heeft een afvoercoëfficiënt m van 1. Het kanaal heeft een bodemhelling i_b van 1×10^{-4} en een weerstandscoefficiënt c_f van 0.003.

III.2¹ Omschrijf de fysische betekenis van de begrippen ‘grensdiepte’ en ‘evenwichtsdiepte’, en bereken de bijbehorende getalswaarden voor het irrigatiekanaal.

De doorstroomhoogte a van de onderspuier bedraagt 50 cm. Benedenstrooms van de onderspuier treedt daarbij een zogenaamde ‘verdronken’ watersprong op. Verderop gelegen randvoorwaarden liggen op een zodanige afstand dat deze geen invloed hebben op de waterdiepte ter plaatse van de onderspuier.

III.3^{1,5} Bereken de waterdiepte d_1 aan de bovenstroomse zijde van de onderspuier, bereken daartoe eerst de waterdiepte bij het maximum contractiepunt van de onderspuier. Als je het antwoord op de vraag III.2 niet kon berekenen mag je voor de evenwichtsdiepte een waarde van 1,65 m aannemen.

De afstand tussen de volkomen overlaat en de onderspuier bedraagt 4 km.

III.4^{1,5} Verifieer dat voor de bijbehorende stuwkromme de benadering voor kleine afwijkingen van de eenparige toestand opgaat, en bereken vervolgens de waterdiepte d_2 in het irrigatiekanaal aan de benedenstroomse zijde van de volkomen overlaat.

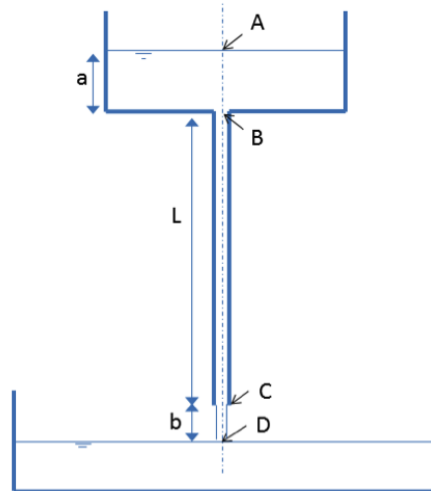
Men heft de onderspuier een stukje waardoor de doorstroomhoogte a iets groter wordt.

III.5¹ Beredeneer of als gevolg hiervan de waterdiepte d_2 toeneemt of afneemt. Je antwoord mag eventueel worden voorzien van een berekening, maar dat is niet voldoende, het gaat om de redenering.

Vraagstuk IV (verticale pijp)

Aan de onderkant van een open bak is een verticale rechte pijp, met diameter $d = 0,06\text{ m}$ en lengte $L = 2\text{ m}$, bevestigd. Hierdoor kan er water via de pijp uit de bak lopen. Vanaf het einde van de pijp bij punt C stroomt het water vrij uit en komt bij D in een open opvangbak terecht. Door de grote horizontale afmetingen van de bakken mogen de waterstanden als constant verondersteld worden. Overige gegevens: $a = b = 1\text{ m}$.

Contractieverliezen mogen in de gehele vraag verwaarloosd worden.



In eerste instantie verwaarlozen we de wandweerstand in de pijp.

IV.1¹ Hoe groot is het debiet door de pijp?

IV.2^{1.5} Schets het verloop van de energiehogte, het piëzometrisch niveau en de drukhoogte langs de lijn AC in één grafiek en geef daarin duidelijk aan waar de punten A, B, C zich bevinden. Hint: teken eerst de plaatshoogte en de energiehogte.

In werkelijkheid ondervindt de stroming in de buis wandweerstand. Het debiet bedraagt $Q = 0,016\text{ m}^3/\text{s}$. Alle overige gegevens blijven gelijk.

IV.3^{1.5} Bereken de Darcy-Weisbach coëfficiënt f van de pijp.

IV.4¹ Toon aan dat de hoofdstroming turbulent is. Waarom is de stroming dichtbij de wand desondanks toch laminair?

We beschouwen nu de vrije straal tussen C en D.

IV.5¹ Beredeneer of de diameter van de straal in D, vlak boven het wateroppervlak kleiner, gelijk of groter zal zijn dan de pijp diameter.

Vraagstuk I

I.1 De horizontale kracht op deel ABC kan berekend worden door een krachtenevenwicht te bepalen voor ABCG: $\sum F_{hor} = F_{AG,hor} + F_{ABC,hor} = 0$. Daaruit volgt: $F_{AG,hor} = -F_{ABC,hor}$. De horizontale kracht op AG is: $F_{AG,hor} = B \frac{1}{2} \rho g (d^2 - (d - d_{AG})^2)$, met waterdiepte $d = 10$ m, doorgangshoogte $d_{AG} = 9$ m en breedte $B = 9$ m. De kracht van de brug op het water werkt is negatief en de kracht van het water op de brug is positief. De totale kracht wordt daarmee: $F_{AG,hor} = 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot 9,81 (10^2 - (10 - 9)^2) = 4,37$ MN.

I.2 De verticale kracht op deel ABC kan berekend worden door een krachtenevenwicht te bepalen voor ABCG. Er zijn drie verticale krachten: de kracht op deel CG, de gevraagde kracht op ABC en de zwaartekracht van ABCG. Het krachtenevenwicht wordt daarmee: $\sum F_{ver} = F_{CG,ver} + F_{ABC,ver} + G_{ABCG} = 0$. Daaruit volgt: $F_{ABC,ver} = -F_{CG,ver} - G_{ABCG}$. $F_{CG,ver} = p_G A_{CG} = \rho g d (L_{CG} B) = 1000 \cdot 9,8 \cdot 10 \cdot 9 = 5,29$ MN en $G_{ABCG} = -\rho g d (A_{ABCG} B) = 1000 \cdot 9,8 \cdot (3 \cdot 6 + \frac{1}{4} \pi 6^2) \cdot 9 = -4,09$ MN. De kracht van de brug werkt naar beneden en de kracht van het water op de brug is positief: $F_{ABC,ver} = 1,21$ MN.

I.3 Om het energieverlies te bepalen moeten de energiehogtes in doorsneden II en III bekend zijn. In doorsnede II is deze bekend, maar in doorsnede III niet. Daartoe moet eerst een impulsbalans toegepast worden tussen II en III. In doorsnede II is de kracht: $F_{II} = \rho u_{II} Q + \frac{1}{2} \rho g d_{II}^2 b_{CG} = 3,90$ MN, met $Q = u A_{ABCG} = 115,7$ m³/s. Let op dat we niet de breedte gemiddelde vergelijking gebruiken, aangezien de doorsnede niet uniform is. In doorsnede III is de kracht: $\rho u Q + \frac{1}{2} \rho g d_{III}^2 b_{CG}$. Gelijkstellen van de krachten geeft: $F_{II} = \rho \frac{u_{II}^2}{d_{III} b_{CG}} + \frac{1}{2} \rho g d_{III}^2 b_{CG}$, waarbij alleen d_{III} de onbekende is. Iteratie door middel van $d_{III} = \left(\frac{F_{II} \cdot d_{III} - \rho \cdot Q^2 / b_{CG}}{\frac{1}{2} \rho g b_{CG}} \right)^{1/3}$ met als beginvoorwaarde $d_{III} = d_{II}$ geeft $d_{III} = 9,75$ m.

Het energieniveau in beide doorsnedes kan bepaald worden met $H = h + \frac{u^2}{2g}$ en geeft $H_{III} = 9,92$ m en $H_{II} = 9,86$ m. Een energieverlies van $\Delta H = 0,06$ m treedt daarmee op.

I.4 Om de horizontale kracht in stroomrichting te bepalen moet de kracht in doorsnede I bepaald worden: $F_I = \rho * u_I Q + \frac{1}{2} \rho g B d_I^2$, met $B = 8$ m. Daarvoor bepalen we eerst de diepte mbv de energiebalans. Hierbij nemen we aan dat er tussen I en II geen energie verloren gaat $H_I = H_{II}$. In werkelijkheid zal dit waarschijnlijk wel het geval zijn, maar hier nemen we aan dat geen contractie optreedt. In dit geval met de bodem op $z = 0$ geldt: $h_I = d_I$. Invullen van de energiebalans geeft: $d_I + \frac{Q^2}{(B d_I)^2 2g} = h_{II} + \frac{u_{II}^2}{2g}$ met d_{II} als enige onbekende. Iteratie van $d_I = -\frac{Q^2}{(B d_I)^2 2g} + h_{II} + \frac{u_{II}^2}{2g}$ met initiële waarde $d_I = h_{II}$ geeft $d_I = 9,81$ m.

De kracht in doorsnede I wordt daarmee $F_I = \rho u_I Q + \frac{1}{2} \rho g B d_I^2 = 3,95$ MN. Op vergelijkbare wijze wordt de kracht in doorsnede II bepaald: $F_{II} = 3,91$ MN. De kracht op het brugdeel is daarmee: $K = F_I - F_{II} = 0,04$ MN. Merk op dat de kracht K klein is ten opzichte van de krachten F_I en F_{II} .

I.5 Contractie van de stroming treedt op als de stroming niet in staat is om de rondingen van de brug te volgen. Er zullen zoggen/neren ontstaan. De effectieve doorstroomopening zal daarmee kleiner worden dan de daadwerkelijke opening. Een deel van de opening zal niet stroomvoerend zijn.

Doordat de effectieve doostroomopening kleiner wordt zal de snelheid onder de brug toenemen. Er zal meer energie nodig zijn om het water onder de brug door te krijgen. De energiehogte voor de brug zal daarmee toe moeten nemen. Benedenstrooms van de brug zal niets veranderen. Daarmee zal het verval over de brug toenemen, waarbij ook de kracht op de brug zal toenemen.

Vraagstuk II

II.1 Het debiet wordt bepaald mbv de Toricelli vergelijking: $Q = \mu A \sqrt{2gh} = 613 \text{ m}^3/\text{s}$.

II.2 Stel de volumebalans op: $\frac{dV}{dt} = -Q_{uit}$ met het volume $V = \frac{1}{2} B \frac{h}{i_b} h$ en $Q = \mu A \sqrt{2gh}$ geeft dit: $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} B \frac{h}{i_b} h \right) = -\mu A \sqrt{2gh}$. Herschrijven geeft: $\frac{h}{i_b} B \frac{dh}{dt} = -\mu A \sqrt{2gh}$. Dit geeft $\frac{dh}{dt} = -\frac{\mu A i_b}{B h} \sqrt{2gh}$.

II.3 Herschrijf de vergelijking tot: $\sqrt{h} dh = -\frac{\mu A i_b}{B} \sqrt{2g} dt$. Op het beginpunt $t = 0$ is de waterstand $h = 12 \text{ m}$. Aan het eind op $t = \Delta t$ is de waterstand $h_{end} = 0 \text{ m}$. Dit geeft: $\frac{2}{3} h_{end}^{3/2} = \frac{\mu A i_b}{B} \sqrt{2g} \Delta t$, oftewel: $\Delta t = \frac{2}{3} h_{end}^{3/2} \frac{B}{\mu A i_b \sqrt{2g}} = 3,62 \text{ dagen}$.

II.4 Stel de volumebalans op: $\frac{dV}{dt} = -Q_{uit} + Q_{in}$ met het volume $V = \frac{1}{2} B \frac{h}{i_b} h$ en $Q = \mu A \sqrt{2gh}$. Herschrijven geeft: $\frac{dh}{dt} = -\frac{\mu A i_b}{B h} \sqrt{2gh} + \frac{Q_{in}}{B h}$. Check altijd ter controle de dimensies.

Vraagstuk III

III.1 In een geleidelijk variërende stroming is het wateroppervlak nauwelijks gekromd, de stroomlijnen zijn nagenoeg recht en er heerst daarom een hydrostatische drukverdeling in de verticale richting. Omdat stroomsnelheden niet abrupt veranderen treden er geen vertragsverliezen op, energieverliezen zijn slechts het gevolg van de bodemweerstand en zijn pas over langere afstand merkbaar. Bij een abrupte variërende stroming is de kromming van het wateroppervlak zo groot dat de drukverdeling niet op voorhand hydrostatisch kan worden verondersteld. Waar deze veranderingen gepaard gaan met loslating en turbulentie treden vertragsverliezen op. Omdat de afstand waarover dergelijke aanpassingen zich voordoen per definitie klein is speelt de bodemweerstand geen rol van betekenis.

III.2 *Grensdiepte*: de diepte in een kanaal of rivier waarvoor bij een gegeven debiet

de stroming kritisch is ($Fr = 1$). De grensdiepte heerst hier op de kruin van de korte (volkomen) overlaat. Omdat $h_{\text{res}} = E_k = \frac{3}{2}d_g = 0,75$ m vinden we zo $d_g = 0,50$ m. (Je kunt ook eerst het specifieke debiet berekenen via $q = m\frac{2}{3}h_{\text{res}}\sqrt{g\frac{2}{3}h_{\text{res}}} = 1,11$ m²/s, en dan vervolgens $d_g = (q^2/g)^{1/3}$, wat uiteraard op hetzelfde neer komt.) *Evenwichts-diepte*: diepte in een kanaal of rivier waarvoor bij een gegeven debiet de stroming eenparig is; de bodemweerstand is in evenwicht met de verhangkracht. Uit deze definitie volgt: $\tau_b P = \rho g A i_b$. Via $\tau_b = \rho c_f U^2$ volgt hieruit $c_f U^2 P = g A i_b$, oftewel $U^2 = g R i_b / c_f$. Voor een rechthoekig dwarsprofiel met $R \approx d$ volgt nu: $q^2/d_e^2 = g d i_b / c_f$ wat kan worden omgewerkt tot $d_e^3 = (c_f/i_b) q^2/g$, zodat uiteindelijk $d_e = (c_f/i_b)^{1/3} d_g$. Invullen van de gegeven getalswaarden en d_g , zojuist berekend, geeft tenslotte $d_e = 1,55$ m.

III.3 We werken altijd van benedenstrooms in stroomopwaartse richting. De waterdiepte op korte afstand voorbij de onderspuier is gelijk aan de evenwichtsdiepte (geen invloed benedenstroomse randvoorwaarden). Noem de waterdiepte ter plaatse van de minimum doorstroomhoogte d_0 . Via een impulsbalans voor het vertragingsgebied vinden we $\frac{1}{2}\rho g d_0^2 + \rho q^2/a = \frac{1}{2}\rho g d_e^2 + \rho q^2/d_e = 12,63$ kN/m. Hieruit volgt $d_0 = 1,44$ m. De bijbehorende specifieke energiehogte bedraagt $E_0 = d_0 + q^2/2gd_0^2 = 1,69$ m. Toepassen van de energievergelijking over de onderspuier geeft $d_1 + q^2/2gd_1^2 = E_0$. Hieruit volgt voor de gevraagde diepte (subkritische tak van de oplossing nemen) $d_1 = 1,67$ m.

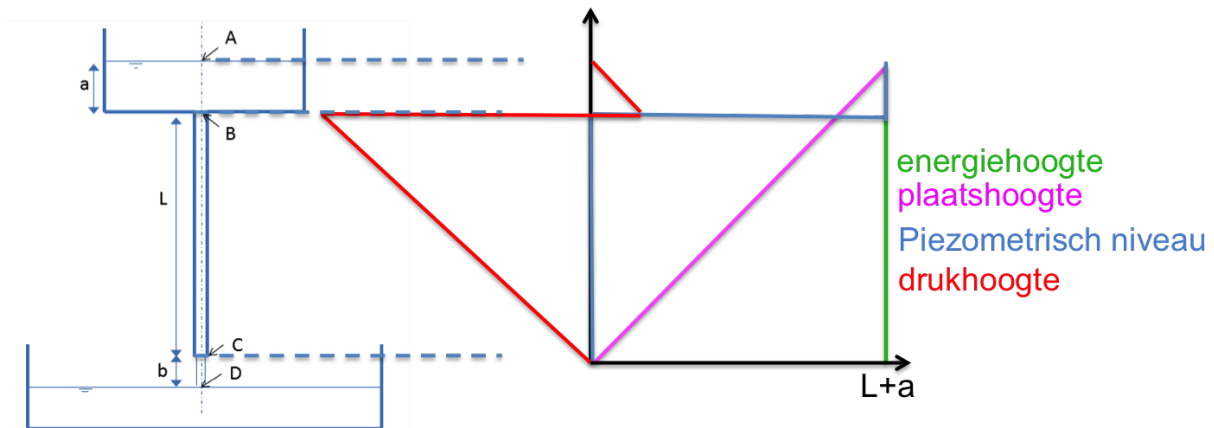
III.4 De theorie voor kleine afwijking van de eenparige toestand mag worden toegepast als de diepteverschillen die langs het traject van de stuwkromme optreden klein zijn ten opzichte van de evenwichtsdiepte. In dit geval treedt een M₁-type stuwkromme op met een maximaal diepteverschil ten opzichte van de evenwichtsdiepte van $\Delta d_{\text{max}} = d_1 - d_e = 0,12$ m, wat klein is ten opzichte van de evenwichtsdiepte zelf ($\Delta d_{\text{max}}/d_e \approx 8\%$). De bijbehorende aanpassingslengte bedraagt $L = (1 - i_b/c_f) d_e/3i_b = 5006$ m. De waterdiepte d_2 volgt nu uit $\Delta d_2 = \Delta d_1 \exp \Delta s/L$. Met $\Delta d_1 = d_1 - d_e = 0,12$ m, en $\Delta s = s_2 - s_1 = -4000$ m (let op het min-teken!) volgt nu $\Delta d_2 = 0,06$ m, en $d_2 = d_e + \Delta d_2 = 1,61$ m.

III.5 De waterdiepte benedenstrooms van de onderspuier verandert niet en blijft gelijk aan de evenwichtsdiepte d_e ; veranderingen doen zich alleen voor in het bovenstrooms van de onderspuier gelegen traject (flauwe bodemhelling, eenparige stroming is subkritisch, alleen benedenstroomse randvoorwaarden zijn van invloed). Het heffen van de onderspuier geeft een grotere doorstroomhoogte a en een geringere impulsoverdracht door meevoering door deze doorgang. De geringere vertraging leidt tot een afname van het energieverlies over het vertragingsgebied ten opzichte van de oorspronkelijke situatie. De energiehogte ter plaatse van de minimum doorgang neemt dus af. De energiehogte $E_1 = E_0$ neemt dan ook af wat bij subkritische stroming een afname van de waterdiepte betekent (denk aan de energiekromme). De opstuwing $\Delta d_1 = d_1 - d_e$ is daardoor kleiner, met een eveneens geringere waterdiepte d_2 als gevolg (M₁-type stuwkromme).

Vraagstuk IV

IV.1 Er zijn geen verliezen door wandwrijving. Daarmee is Toricelli toepasbaar: De energiehoogte in de het bovenste vat en in de buis is overal gelijk. Bij de uitstroming is de plaatshoogte gedefinieerd als $z_C = 0$. Daar is ook de druk gelijk aan de buitensdruk, de waterdruk is daarmee gelijk aan $p_C = 0$. Dit geeft dat het piezometrisch niveau gelijk is aan $h_C = 0$ bij uitstroomopening C. De energiehoogte in C is gelijk aan de energiehoogte in A, oftewel $H_C = L + a = 3$ m. De energiehoogte is gelijk aan $\frac{u^2}{2g} = H_C - h_c = 3$ m. Dat geeft: $u = 7,67$ m/s. Het debiet is daarmee $Q = u \frac{1}{4} \pi D^2 = 0,022$ m³/s.

IV.2 De referentiehoogte is niet gegeven en mag (altijd) zelf gekozen worden. In dit geval is de uitstroomopening bij C gekozen als referentie, waar $z = 0$. Teken de plaatshoogte z . Deze lijn loopt onder een hoek van 45 graden. Teken vervolgens het energieniveau. Tussen A en C treedt geen energieverlies op aangezien wandwrijving en intreeverliezen verwaarloosd mochten worden. Het energieniveau is daarmee uniform over A-C. Het piezometrisch niveau is het verschil tussen de energiehoogte en de snelheidshoogte. In de bak is de snelheid gelijk aan nul, waardoor het piezometrisch niveau gelijk is aan de energiehoogte. Bij de uitstroming is de waterdruk gelijk aan nul en is ook de plaatshoogte gelijk aan nul. Daarmee is het piezometrisch niveau gelijk aan nul: $h = z + \frac{p}{\rho g}$. In de buis is de snelheid overal hetzelfde, evenals de energiehoogte. Het piezometrisch niveau is daarmee ook uniform over de buis en gelijk aan nul: $h = 0$. De drukhoogte kan dan bepaald worden door de plaatshoogte van het piezometrisch niveau af te trekken: $\frac{p}{\rho g} = h - z$. Let op: de drukhoogte wordt negatief, er ontstaat daarmee onderdruk in de buis.



IV.3 Het energieverlies is een gevolg van wandwrijving en uittreeverlies. Op het formuleblad is gegeven: $dH_{wrijving} = f \frac{L}{D} \frac{u^2}{2g}$ Het uittreeverlies is gelijk aan: $dH_{uittree} = \frac{u^2}{2g}$. Daarmee wordt het totale energieverlies: $dH = dH_{wrijving} + dH_{uittree} = \left(f \frac{L}{D} + 1\right) \frac{u^2}{2g}$, met de Darcy Weisbach coefficient f als enige onbekende. Dit geeft $f = 0,025$.

IV.4 De hoofdstroming is turbulent als het Reynoldsgetal voldoende groot is: $Re = \frac{uD}{\nu} > 4500$. In dit geval vinden we $Re = \frac{uD}{\nu} = 3,3 \cdot 10^5$. Daarmee wordt ruim aan de voorwaarde voldaan.

Uit EFM, p337: "The zone immediately adjacent to the wall is a layer of fluid that is essentially laminar because the presence of the wall dampens the cross-stream mixing and turbulent fluctuations." Zeer dicht bij de bodem worden fluctuaties loodrecht op de wand sterk gedempt. Daarmee wordt de impulsoverdracht loodrecht op de wand gedempt. Visceuze krachten kunnen zo domineren. De stroming is daarmee laminair zeer dicht bij de wand.

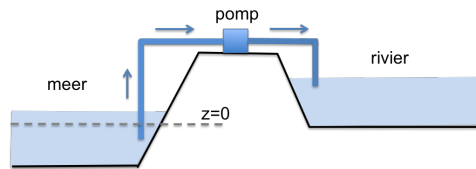
IV.5 In de vrije straal tussen C en D zal geen energieverloren gaan $H_C = H_D$. Ook is de druk gelijk $p_C = p_D$. De plaatshoogte neemt echter af $z_C > z_D$. Omdat geldt dat $H = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g}$ zal de afname in plaatshoogte tussen C en D gecompenseerd moeten worden door een toename in snelheidshoogte, en daarmee in snelheid. Oftewel: de snelheid in D is hoger dan in C. Aangezien de debieten gelijk moeten zijn, zal de doorsnede en daarmee de diameter af moeten nemen: $D_D < D_C$.

Alternatieve redenering. Tussen C en D maakt het water een vrije val, onder invloed van de zwaartekrachtsversnelling. De snelheid in D zal daarmee hoger zijn dan in C en daarmee $D_D < D_C$.

Vergelijk de waterstraal uit een kraan. Deze wordt ook steeds dunner.

Vraagstuk I (Pomp)

De waterstand in een meer wordt op peil gehouden door een pomp, die in verbinding staat met een rivier. De waterstand in het meer is gegeven door h_M en in de rivier door h_R . Bij een overschot aan water in het meer wordt water naar de rivier gepompt door een pompinstallatie en pijpen met een uniforme diameter D . De uiteinden van de pijpen liggen onder de respectievelijke waterniveau's, zie onderstaande figuur.



Verwaarloos voor de deelvragen 1-3 de wandwrijving en de intreeverliezen.

I.1^{1,5} Schets het verloop van het energieniveau en het piëzometrisch niveau voor het volledige horizontale deel van de pijp. Ga er van uit dat de waterstand in de rivier ruim hoger staat dan de waterstand in het meer, zie bovenstaande figuur. Geef in je schets duidelijk de waterstanden in de rivier en het meer aan.

De pompinstallatie moet een debiet van $3 \text{ m}^3/\text{s}$ kunnen verpompen. Ga uit van de volgende gegevens: $D = 1.2 \text{ m}$, $h_M = 0,5 \text{ m}$ en $h_R = 2,5 \text{ m}$. De horizontale pijpen en de pomp liggen 4 m boven het referentie niveau.

I.2¹ Bereken op basis van van deze gegevens het benodigde pompvermogen.

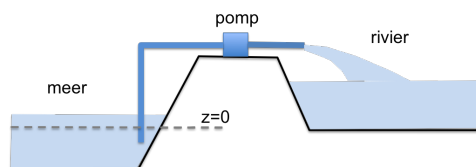
De benodigde sterkte van de pijpen hangt af van de onderdruk in de pijp.

I.3¹ Geef aan waar de onderdruk maximaal (=druk minimaal) is en bepaal deze waarde.

In werkelijkheid zal energieverlies optreden bij de instroming in de pijp.

I.4^{1,5} (a) Geef de fysische verklaring voor het optreden van intreeverliezen. (b) Bepaal het extra vermogen dat de pomp moet leveren om het intreeverlies te compenseren bij een debiet van $3 \text{ m}^3/\text{s}$. Gebruik indien nodig realistische waarden voor additionele parameters.

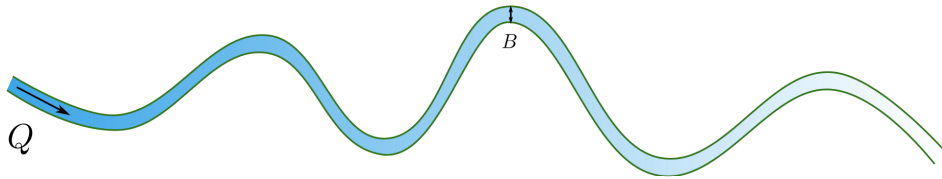
Iemand stelt voor om de verticale pijp aan de rivierzijde weg te halen om kosten te besparen, zie onderstaande figuur. Effecten van wandwrijving zijn nog steeds verwaarloosbaar.



I.5¹ Waarom leidt deze aanpassing echter tot een verlaging van de effectiviteit van de pomp? Een berekening mag, maar hoeft niet. Het gaat om de argumentatie.

Vraagstuk II (meanderende rivier)

In een sterk meanderende rivier heerst een constant debiet Q . Daarbij treedt in de bochten een zogenaamd *dwarsverhang* op. Zie onderstaande schets van de situatie.



II.1^{1,0} Geef een fysische verklaring voor het dwarsverhang. Betrek in je antwoord de onderscheidende parameters die de grootte van dit verhang bepalen.

Het dwarsprofiel van de rivier is bij benadering rechthoekig, met een constante breedte B van 85 m. Variaties van de stroomsnelheid in dwarsrichting kunnen worden verwaarloosd. In een bepaalde bocht van de rivier wordt een waterstandsverschil van 2 cm tussen de beide oevers gemeten. Deze bocht heeft een straal van 1200 m.

II.2^{1,0} Bereken uit deze gegevens de grootte van de stroomsnelheid U in de rivier.

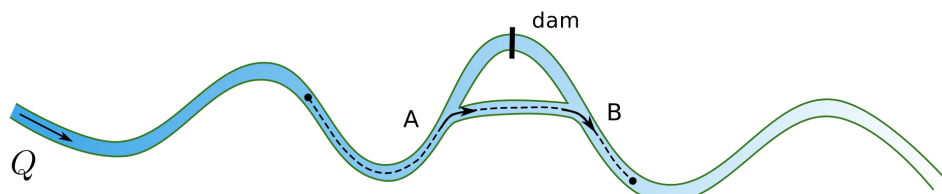
We beschouwen in het vervolg van dit vraagstuk de *langs*richting van de rivier, gebruikmakend van de theorie voor ‘geleidelijk variërende stroming’.

II.3^{1,0} Welke overwegingen en aannamen liggen ten grondslag aan deze theorie?

Het bodemverhang i_b bedraagt 2×10^{-4} en de weerstandscoefficiënt c_f bedraagt 0.003.

II.4^{1,0} Geef de definitie van het begrip evenwichtsdiepte en bereken deze voor de gegeven situatie. Gebruik $U = 1.55$ m/s als je het antwoord op vraag I.2 niet kon berekenen.

Om de bevaarbaarheid van de rivier te verbeteren snijdt men één van de bochten af door middel van een kortsluitgeul. De oorspronkelijke bocht wordt daarbij afgedamd en voert geen water meer af. Zie onderstaande figuur.



De kortsluitgeul heeft hetzelfde dwarsprofiel en weerstandscoefficiënt als de oorspronkelijke rivier, het bodemverhang is daarentegen anderhalf keer zo groot (samenhangend met de verkorting) waarbij de bodem continu verloopt. De waterstand in aansluitpunt B wordt niet beïnvloed door een benedenstrooms gelegen randvoorwaarde.

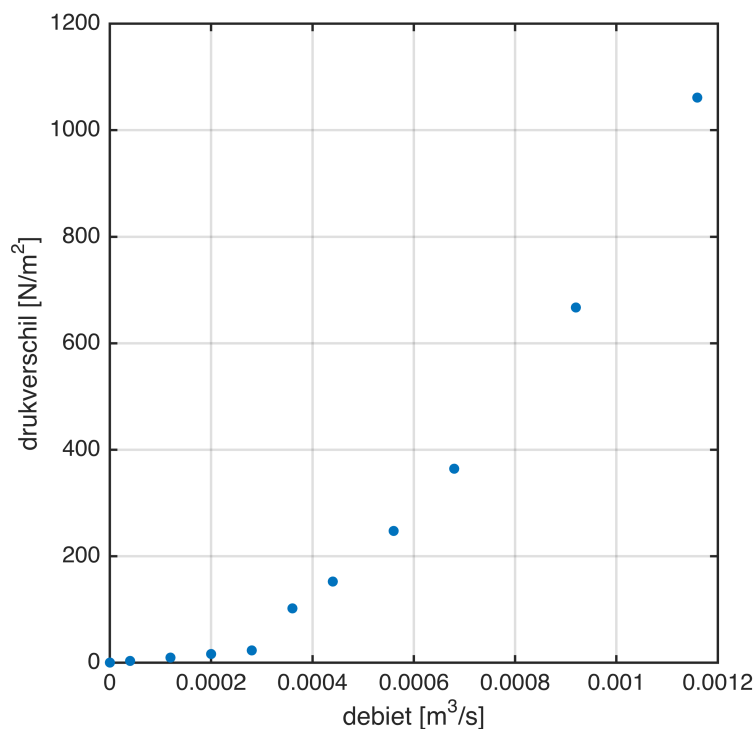
II.5^{1,0} Schets het verloop van de bodem en waterstand langs het gestippelde traject.

De lengte van de kortsluitgeul (traject A-B) bedraagt 2000 m.

II.6^{1,0} Bereken de waterdiepte in aansluitpunt A, gebruikmakend van de theorie voor kleine afwijkingen van de eenparige toestand.

Vraagstuk III (weerstand in leiding)

Een medewerker van een drinkwaterbedrijf analyseert een rechte ondergrondse pijpleiding met een lengte van $L = 200$ m en wil op indirecte wijze uitzoeken wat de diameter van de pijpleiding is en wat de ruwheid van de pijpwand is. De onderzoeker kan bij verschillende stationaire condities van ingestelde debieten de drukval over de pijpleiding meten. Veronderstel de viscositeit en dichtheid van water bekend (zie formuleblad). Neem bovendien aan dat de pijp horizontaal ligt en dat alleen de wandwrijving er toe doet. In de tabel staan de gemeten drukvallen bij de verschillende ingestelde debieten.



Q (m ³ /s)	Δp (N/m ²)
0,00000	0,000
0,00004	3,259
0,00012	9,778
0,00020	16,30
0,00028	22,82
0,00036	102,2
0,00044	152,6
0,00056	247,3
0,00068	364,6
0,00092	667,4
0,00116	1061

III.1^{1,0} Leg uit waarom bij lage debieten de grafiek een lineair verband te zien geeft en bij hoge debieten niet.

III.2^{1,5} Bereken uit de gegevens, behorende bij het lineaire deel van de grafiek, de diameter van de buis en laat zien dat uw redering in III.1 klopte.

Indien het u niet gelukt is de diameter van de buis te berekenen, neemt u voor het vervolg een waarde $D = 0,08$ m aan.

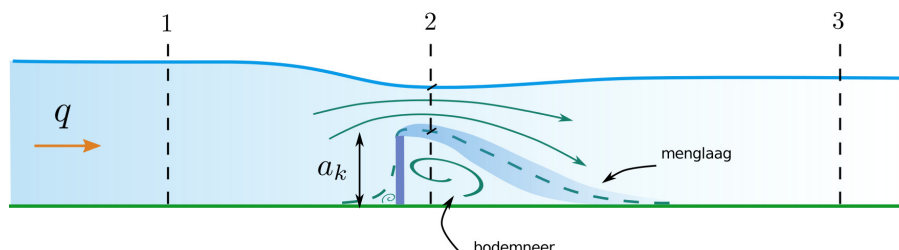
III.3^{1,0} Wat is de maximale wandschuifspanning die er volgens de gegevens uit de tabel geheerst heeft tijdens het experiment.

III.4^{1,5} Bereken uit de gegevens behorende bij de grootste debieten de ruwheidshoogte van de buiswand, onder de veronderstelling dat er hier sprake is van een hydraulisch ruwe wand.

III.5^{1,0} Reken uit vanaf welke grootte van het debiet de wand als hydraulisch ruw verondersteld mag worden. Laat zien dat de aanname bij onderdeel III.4 juist was.

Vraagstuk IV (korte overlaat)

In een drainagekanaal met een rechthoekig dwarsprofiel en horizontale bodem bevindt zich over de volle breedte een korte overlaat met een vaste kruinhoogte. We beschouwen in dit vraagstuk de situatie per eenheid van breedte. Aanvankelijk is er sprake van gestuwde afstroming met een turbulente menglaag en een bodemneer direct achter de stuw, zie onderstaande figuur.



Ter plaatse van doorgang 2 mag een hydrostatische drukverdeling worden aangenomen.

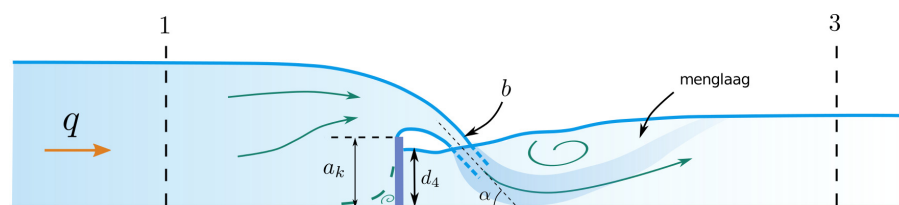
IV.1^{1,0} Leg uit waarom deze benadering hier is toegestaan.

Het specifiek debiet q bedraagt $0,30 \text{ m}^2/\text{s}$ en de waterdiepte d_3 in doorgang 3, op enige afstand benedenstrooms van de overlaat, bedraagt $0,85 \text{ m}$. De overlaat heeft een kruinhoogte a_k van $0,65 \text{ m}$ ten opzichte van het lokale bodemniveau. Slechts het deel van doorgang 2 boven de kruinhoogte is stroomvoerend.

IV.2^{1,5} Berekenen de waterdiepte d_2 in doorgang 2.

IV.3^{1,0} Berekenen de netto horizontale kracht K_H per eenheid van breedte die door het stromende water op de overlaat wordt uitgeoefend.

Men laat nu de waterstand benedenstrooms van de overlaat zakken, waarbij de waterstand bovenstrooms van de overlaat uiteindelijk niet meer verandert. Het specifiek debiet en de kruinhoogte blijven daarbij ongewijzigd. De overlaat heeft in deze situatie een afvoer-coëfficiënt gelijk aan 1.



IV.4^{1,0} Bereken de waterdiepte d_1 die uiteindelijk ter plaatse van doorgang 1 bereikt wordt.

De waterdiepte d_4 direct achter de overlaat (zie figuur) bedraagt $0,50 \text{ m}$. De overstortende straal van de overlaat heeft een breedte b van $0,10 \text{ m}$ en maakt een hoek α van 45° met het horizontale vlak, zie bovenstaande figuur.

IV.5^{1,5} Bereken voor bovenstaande situatie de waterdiepte d_3 in doorgang 3 op enige afstand benedenstrooms van de overlaat.

Formuleblad Vloeistofmechanica CTB2110

Fysische constanten

zwaarteversnelling: $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

dichtheid water: $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$

kinematische viscositeit water $\nu = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

Kentallen

Froude-getal, stroomsnelheid U , waterdiepte d :

$$Fr \equiv \frac{U}{\sqrt{gd}}$$

Reynolds-getal, lengteschaal ℓ , dynamische viscositeit η , kinematische viscositeit ν , dichtheid ρ :

$$Re \equiv \frac{\rho U \ell}{\eta} = \frac{U \ell}{\nu}$$

Hydrostatica

Hydrostatisch evenwicht:

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = 0$$

bij constante dichtheid:

$$p + \rho g z = \text{constant}$$

Hydrostatische drukkracht in open waterloop, diepte d , constante dichtheid:

$$F_p = \frac{1}{2} \rho g d^2 \quad \text{p.e.v. breedte}$$

Piëzometrisch niveau, atmosferische druk p_a :

$$h \equiv z + \frac{p - p_a}{\rho g}$$

Hydrostatisch evenwicht, ρg en p_a constant:

$$h = \text{constant}$$

Kinematica

Versnelling van een deeltje

Meebewegende (materie)le afgeleide, grootheid f , snelheidsvector $(u_x, u_y, u_z)^T$:

$$\frac{Df}{Dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + u_x \frac{\partial f}{\partial x} + u_y \frac{\partial f}{\partial y} + u_z \frac{\partial f}{\partial z}$$

In natuurlijk (s, n, b) assenstelsel:

$$\frac{Df}{Dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + u_s \frac{\partial f}{\partial s}$$

Meevoering

Volumestroom door doorgang D , normaalsnelheid u_N :

$$Q = \int_D u_N \, dA$$

Overdracht willekeurige grootheid X met dichtheid ρ_X :

$$S_X = \int_D \rho_X u_N \, dA$$

Bijvoorbeeld, impuls ρu :

$$S_{\text{imp}} = \int_D \rho u u_N \, dA$$

Idem, kinetische energie:

$$S_{\text{kin}} = \int_D \frac{1}{2} \rho u^2 u_N \, dA$$

Ideale-vloeistofstroming

Euler-vergelijkingen

Bewegingsvergelijkingen in termen van hoogte piezometrisch niveau $h = z + p/\rho g$ (natuurlijk assenstelsel):

$$a_s = \frac{\partial u_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = -g \frac{\partial h}{\partial s}$$

$$a_n = \frac{\partial u_n}{\partial t} + \frac{u^2}{R} = -g \frac{\partial h}{\partial n}$$

$$a_b = \frac{\partial u_b}{\partial t} = -g \frac{\partial h}{\partial b}$$

Bernoulli

Stationaire ideale-vloeistofstroming:

$$H = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u_s^2}{2g} = h + \frac{u_s^2}{2g} = \text{constant langs stroomlijn} \quad \left(\frac{\partial H}{\partial s} = 0 \right)$$

Torricelli

Stroming uit reservoir via kleine opening:

$$Q = \mu A \sqrt{2g \Delta h},$$

waarin Δh de hoogte is van het piezometrisch niveau in het bovenstroomse reservoir boven dat in de uitredende straal.

Energie

Energieoverdracht

Doorgang D met oppervlak A en normaalsnelheid u_N :

$$P = \int \int_D \left(p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho u^2 \right) u_N \, dA$$

Dwarsprofiel gemiddelde energiehoogte:

$$\langle H \rangle \equiv \frac{P}{\rho g Q}$$

Rechte stroomlijnen (h constant binnen dwarsprofiel), gem. stroomsnelheid U :

$$\langle H \rangle = h + \beta \frac{U^2}{2g}$$

waarin $\beta = \int_D u^3 \, dA / U^3 A \approx 1$

Energiebalans

Voor een stroombuis geldt (stationair, geen toevoeging/onttrekking van energie):

$$P = \rho g Q \langle H \rangle = \text{constant}$$

Pomp, turbine:

$$\Delta P_{\text{pomp, turb}} = \rho g Q \Delta H_{\text{pomp, turb}}$$

Energie-dissipatie gebied met doorgangen D_1 en D_2 , stationair:

$$\Delta P_{\text{diss}} = \rho g Q \Delta \langle H \rangle = \rho g Q (\langle H \rangle_1 - \langle H \rangle_2)$$

Drukverschil

Geleidelijke vernauwing (bijv. Venturi-meter), dynamische druk p :

$$p_1 - p_2 = \Delta p = \frac{1}{2} \rho Q^2 (A_2^{-2} - A_1^{-2})$$

Impuls

Impulsoverdracht

Doorgang D met normaalvector \mathbf{e}_N :

$$\mathbf{F} = \int \int_D (p + \rho u^2) \mathbf{e}_N \, dA$$

Ideen, doorgang met oppervlak A , evenwijdige stroomlijnen en gemiddelde snelheid U :

$$F = \int \int_D p \, dA + \alpha \rho U^2 A$$

waarin $\alpha = \int_D u^2 \, dA / U^2 A \approx 1$

Impulsbalans

Kracht vloeistof op zijdelingse begrenzing stroombuis, doorgangen D_1 en D_2 , zwaartekracht \mathbf{F}_g , stationaire stroming:

$$\mathbf{K} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

Horizontale kracht op begrenzing balansgebied, verticale doorgangen D_1 en D_2 , stationaire stroming:

$$K_H = F_1 - F_2 = \Delta F$$

Lokaal vertragingssverlies

Carnot (abrubte verwijding van diameter D_1 tot D_2 in pijpstroming)
Stijging piezometrisch niveau:

$$h_2 - h_1 = \Delta h = U_2 (U_1 - U_2) / g$$

Daling energieniveau:

$$H_1 - H_2 = \Delta H_v = (U_1 - U_2)^2 / 2g$$

Vertragingssverlies na lokale vernauwing, contractie μ :

$$\Delta H_v = \left(\frac{1}{\mu} - 1 \right)^2 \frac{U^2}{2g}$$

Buisje van Borda (intreeverlies):

$$\mu = \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta H_v = \left(\frac{1}{\mu} - 1 \right)^2 \frac{U^2}{2g}$$

Uitreeverlies (Carnot met $U_2 = 0$):

$$\Delta H_v = \frac{U^2}{2g}$$

Snel variërend vrij oppervlak

Bodemhoogte z_b , diepte d , specifiek debiet q , diepte-gemiddelde snelheid $U = q/d$, rechte stroomlijnen.

Energiehoogte

Diepte-gemiddelde energiehoogte (vormfactor β):

$$H = z_b + d + \beta \frac{U^2}{2g}$$

Specifieke energiehoogte:

$$E = H - z_b = d + \beta \frac{U^2}{2g}$$

Impuls- en energieoverdracht

Impulsoverdracht (vormfactor α):

$$F = \frac{1}{2} \rho g d^2 + \alpha \rho q U \quad \text{p.e.v. breedte}$$

Energieoverdracht:

$$P = \rho g q H \quad \text{p.e.v. breedte}$$

Kritische stroming

Froude-getal F_r :

$$F_r = \frac{U}{\sqrt{gd}} = 1 \Rightarrow U^2 = gd \Rightarrow q^2 = gd^3$$

Specifieke energiehogte:

$$E = d + \frac{U^2}{2g} = d + \frac{gd}{2g} = \frac{3}{2}d$$

Grensdiepte (kritische diepte):

$$d_g = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3} = \frac{2}{3}E_g$$

Onderspuier

Gelijke energiehogte, overgang $d_1 - d_2$ (sub- naar superkritisch):

$$d_1 + \frac{q^2}{2gd_1^2} = d_2 + \frac{q^2}{2gd_2^2}$$

Kracht op schuif (via impulsbalans):

$$K = \frac{1}{2} \rho g (d_1^2 - d_2^2) + \rho q^2 (d_1^{-1} - d_2^{-1}) \quad \text{p.e.v. breedte}$$

Stationaire watersprong

Gelijke impulsoverdracht overgang $d_1 - d_2$ (super- naar subkritisch):

$$\frac{1}{2} g d_1^2 + \frac{q^2}{d_1} = \frac{1}{2} g d_2^2 + \frac{q^2}{d_2} \quad \text{p.e.v. breedte}$$

Dissipatie in sprong (via energiebalans):

$$P_{\text{diss}} = \rho g q \left(d_1 - d_2 + \frac{q^2}{2g} (d_1^{-2} - d_2^{-2}) \right) \quad \text{p.e.v. breedte}$$

Lopende watersprong

Voorplantingssnelheid:

$$c = \sqrt{g \frac{d_1 + d_2}{2} \frac{d_2}{d_1}}$$

Idem, lage storing ($d_1 \approx d_2 = d$):

$$c = \sqrt{gd}$$

Overlaten

Diepte op kruin d_k , specifieke energiehogte op kruin E_k , afvoercoëfficiënt m .

Volkomen afvoer

$$q = m d_k \sqrt{gd_k} = m \frac{2}{3} E_k \sqrt{\frac{2}{3} g E_k}$$

afvoer te bepalen via één meting (bijv. d_k of E_k)

Onvolkomen afvoer

$$q = m d_k \sqrt{2g (E_k - d_k)}$$

afvoer te bepalen via twee metingen (bijv. d_k en E_k)

Weerstand omstroomd voorwerp

Stuwdruk, aanstroomsnelheid U :

$$\Delta p_A = \frac{1}{2} \rho U^2$$

Sleepluchtkracht, aangestroomd oppervlak A :

$$F_w = c_w \frac{1}{2} \rho U^2 A$$

waarin c_w de weerstandscoefficient is. Voorbeeld bol:

$$Re < 1 : \quad c_w = \frac{24\nu}{UD} = \frac{24}{Re}$$

$$10^3 < Re < 2 \times 10^5 : \quad c_w \approx 0,4$$

Energiedissipatie omstroomd voorwerp:

$$\Delta P_{\text{diss}} = F_w U = c_w \frac{1}{2} \rho U^3 A$$

Wandrijving eenparige stroom

Buisstrooming

Diameter $D = 2r_0$, hydraulische straal $R = D/4$, ruwheid k , kinematische viscositeit ν , gemiddelde snelheid $U = Q/A$, wandschuifspanning τ_0 .

Algemeen

Evenwicht schuifkracht - netto drukkracht:

$$\tau_0 L P = \Delta p A = \rho g \Delta h A$$

zodat

$$\tau_0 = \frac{\rho g \Delta h A}{L P} = \rho g i_w R$$

Definitie weerstandsfactor:

$$\tau_0 = c_f \rho U^2 = \frac{f}{8} \rho U^2$$

geeft:

$$i_w = \frac{f U^2}{8 g R}$$

en

$$\Delta H_w = i_w L = f \frac{L U^2}{D 2g} \quad (\text{Darcy-Weisbach})$$

waarin $f = f(Re, \frac{k}{D})$, zie diagram of onderstaande vergelijkingen

Poiseuille

$Re < \text{ca. } 2300$, laminair:

$$f = \frac{64}{Re}$$

waarin $Re = \rho U D / \eta = U D / \nu$

White-Colebrook

$Re > \text{ca. } 4000$, turbulent:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(0,27 \frac{k}{D} + \frac{2,5}{Re \sqrt{f}} \right) = 2 \log \frac{3,7 D}{k (1 + 3,3 / Re_*)} = 2 \log \frac{3,7 D}{k + \delta / 3,5}$$

waarin $\delta = 11,6 \nu / u_*$, $Re_* = u_* k / \nu$ en $u_* = \sqrt{g R i_w} = \frac{1}{2} \sqrt{g D i_w}$.

Willekeurig dwarsprofiel

Doorstroomd oppervlak A , weerstand leverende omtrek P , schuifspanning, gemiddeld over P , is $\langle \tau_0 \rangle$, hydraulische straal $R = A/P$, turbulente hoofdstroom ($Re = U R / \nu > \text{ca. } 600$). Open waterlopen: $i_w = i_b$

Algemeen

Evenwicht schuifkracht - netto drukkracht (eenparige stroom):

$$\langle \tau_0 \rangle = c_f \rho U^2 = \rho u_*^2 = \rho g R i_w$$

$$U = \sqrt{g R i_w / c_f}$$

$$\Delta H_w = i_w L = c_f \frac{U^2}{g R} L$$

White-Colebrook

Gegenaliseerde coëfficiënten voor willekeurige sprofelvorm:

$$\frac{U}{u_*} = \frac{U}{\sqrt{g R i_w}} = \frac{1}{\sqrt{c_f}} = 5,75 \log \frac{12R}{k(1+3,3/Re_*)} = 5,75 \log \frac{12R}{k+\delta/3}, 5$$

waarin $\delta = 11,6\nu/u_*$, $Re_* = u_* k / \nu$ en $u_* = \sqrt{g R i_w}$.

Hydraulisch ruw:

$$\frac{U}{u_*} = \frac{U}{\sqrt{g R i_w}} = \frac{1}{\sqrt{c_f}} = 5,75 \log \frac{12R}{k} \approx 8,3 \left(\frac{R}{k} \right)^{1/6}$$

Verhanglijnen

Tweedimensionale stroom, breedte en diepte constant in dwarsprofiel

Eenparige stroom

Evenwichtsdiepte ($i_b = i_w$):

$$d_e = \left(\frac{c_f q^2}{i_b g} \right)^{1/3}$$

Grensdiepte: zie (1)

Bêlanger

Algemeen:

$$\frac{dd}{ds} = \frac{i_b - i_w}{1 - F^2} = \frac{i_b - c_f Q^2 P / g A^3}{1 - \alpha Q^2 B / g A^3}$$

Tweedimensionale stroom (breedte en diepte constant in dwarsprofiel):

$$\frac{dd}{ds} = \frac{i_b - c_f q^2 / g d^3}{1 - \alpha q^2 / g d^3} = i_b \frac{d^3 - d_e^3}{d^3 - d_g^3} \quad (d \neq d_g \quad \text{en} \quad i_b > 0)$$

Oplösungen

Kleine afwijkingen van de eenparige toestand:

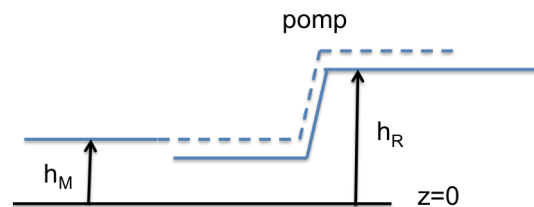
$$\Delta d = \Delta d_0 \exp \left(\frac{s - s_0}{L} \right) \quad \text{waarin} \quad L = \frac{1 - i_b / c_f d_e}{3 i_b}$$

Horizontale bodem:

$$\frac{1}{4} d^4 - d_g^3 d + c_f d_g^3 s = \text{constant}$$

Vraagstuk I (pomp)

I.1 In het pijpstuk voor de pomp is de energiehogte gelijk aan de energiehogte in het meer. Aangezien de snelheid in het meer verwaarloosbaar klein is geldt dat de energiehogte in het meer gelijk is aan het piëzometrisch niveau in het meer. De snelheid is constant in de buis (continuïteit en uniforme buisdiameter). Daarmee is de snelheidshogte ook uniform in de buis. Het piëzometrisch niveau kan getekend worden door de snelheidshogte van de energiehogte af te trekken. De kinetische energie wordt gedissipeerd bij de uitstroming. Het piëzometrisch niveau in de buis na de pomp is daarmee gelijk aan het waterniveau in de rivier. Het energieniveau in het pijpdeel aan de rivierzijde van de pomp kan getekend worden door de snelheidshogte (gelijk aan de snelheidshogte in de pijp aan de meerzijde) op te tellen bij het uniforme piëzometrisch niveau. De pomp zorgt voor een verhoging van het energieniveau.



I.2 Het pompvermogen wordt gegeven door $P = \rho g Q \Delta H$. Zie formuleblad voor $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ en $g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Het debiet is gegeven: $Q = 3 \text{ m}^3/\text{s}$. De te overbruggen energiehogte is het verschil tussen het energieniveau na de pomp min het energieniveau voor de pomp. Het energieniveau voor de pomp is gelijk aan het energieniveau in het meer: $H_{voor} = H_M = h_m$. Het energieniveau na de pomp is het energieniveau in de rivier plus het uittreeverlies: $H_{na} = H_R + \frac{u^2}{2g} = h_R + \frac{u^2}{2g}$. De snelheid in de pijp is gegeven door $u = \frac{Q}{0.25\pi D^2} = 2.65 \text{ m/s}$. Het te overbruggen energieverval wordt daarmee: $\Delta H = h_R - h_M + \frac{u^2}{2g} = 2.5 - 0.5 + \frac{2.65^2}{2 \cdot 9.81} = 2.36 \text{ m}$. Het pompvermogen wordt daarmee: $P = \rho g Q \Delta H = 69.4 \text{ kW}$.

I.3 De onderdruk is maximaal (de druk is minimaal) in het horizontale deel van de pijp voor de pomp. Aangezien intreeverliezen verwaarloosbaar zijn is het energieniveau in de pijp voor de pomp gelijk aan het energieniveau in het meer: $H = h_M$. In de pijp is het energieniveau tevens gegeven door $H = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g}$, met $H = 0.5 \text{ m}$, $z = 4 \text{ m}$, $u = \frac{Q}{0.25\pi D^2} = 2.65 \text{ m/s}$. Dit geeft als druk tov de luchtdruk: $p = \rho g \left(H - z - \frac{u^2}{2g} \right) = -37.8 \text{ kW}$.

I.4 (a) Intreeverliezen ontstaan doordat de stroming niet in staat is de geometrie van de pijpopening te volgen. Daardoor treedt contractie op, waarbij de stroming eerst versnelt en daarna weer vertraagt. Juist bij de vertraging treedt energieverlies op. Dit is eenvoudig te laten zien met een combinatie van een impuls- en energiebalans. (b) Het extra vermogen is gegeven door $\Delta P = \rho g Q \Delta H$, waarbij ΔH het intreeverlies representeert.

Zie formuleblad voor: $\Delta H = \left(\frac{1}{\mu} - 1\right) \frac{u^2}{2g}$. Voor μ moet een realistische waarde ingevuld worden. Realistisch is $\mu = 0.5 - 1$. Voor $\mu = 0.5$: $\Delta P = 10.5$ kW.

I.5 De effectiviteit van de pomp wordt bepaald door $P = \rho g Q \Delta H$. Door de verticale pijp aan de rivierzijde weg te halen wordt het energieniveau aan de rivierzijde sterk verhoogd. Dit moet overbrugd worden door de pomp. Vergelijk dit met een hevel.

Vraagstuk II (meanderende rivier)

II.1 In een ideale vloeistof is de versnelling van een waterdeeltje bepaald door de ruimtelijke (partiële) afgeleiden van het piëzometrisch niveau (h). Voor stationaire stroming heeft de deeltjesversnelling een component in de stroomrichting s (als de *grootte* van de snelheid verandert langs een stroomlijn) en een component in de normaalrichting n (als de *richting* van de snelheid verandert langs een stroomlijn). Deze versnellingen zijn gekoppeld aan de gradiënt van het piëzometrisch niveau in de s richting, respectievelijk de n richting. In een rivierbocht volgt de hoofdstroming de oriëntatie van de oevers en de bijbehorende stroomlijnen zijn daarom gekromd in het horizontale vlak. Deze richtingsverandering leidt tot een *dwarsverhang* dat groter is naarmate de versnelling in dwarsrichting groter is. Bepalend voor dit laatste zijn de grootte van de stroomsnelheid (U) en de kromtestraal van de rivierbocht (R).

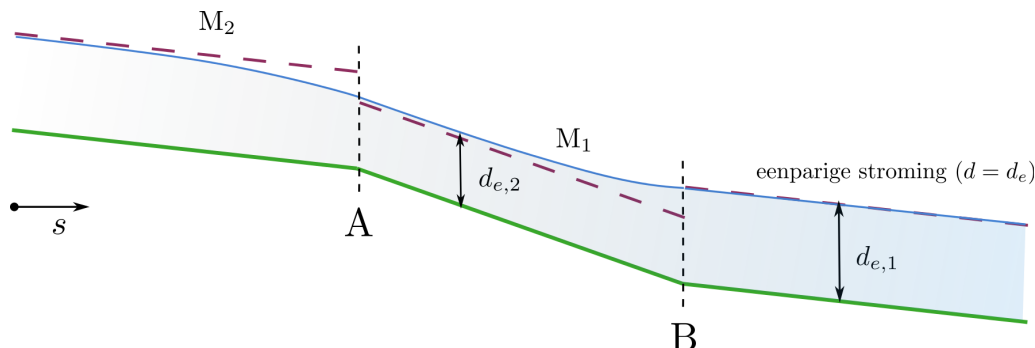
II.2 In de stationaire toestand luidt de vergelijking van Euler in de normaal-richting van een stroomlijn (zie formuleblad): $g \partial h / \partial n = -U^2 / R$, waarin R de kromtestraal van de stroomlijn is en n de richting naar het middelpunt van de bijbehorende kromtecirkel. Een willekeurige stroomlijn volgt de rivierbocht en heeft daarom een (gemiddelde) kromtestraal R van 1200 m. (Verskil in kromtestraal tussen binnen- en buitenbocht is verwaarloosbaar klein vanwege $B \ll R$.) De grootte van het dwarsverhang kan worden afgeleid via $|\partial h / \partial s| = \Delta h / B = 2.35 \times 10^{-4}$. Hieruit volgt uiteindelijk $U = \sqrt{g \Delta h R / B} = 1,66$ m/s. (Zie bijvoorbeeld ook practicumopdracht 1A: roterend vat.)

II.3 De stationaire stroming in een waterloop streeft naar een eenparige toestand, gekenmerkt door een evenwicht tussen de weerstandskracht (ten gevolge van de bodemschuifspanning) en de aandrijvende verhangkracht (ten gevolge van de zwaartekracht). Door verschillende invloeden (kunstwerken, lokale aanpassingen in het rivierbed, aangrenzende watersystemen) is dit evenwicht mogelijk niet overal aanwezig. De waterdiepte zal zich in dat geval gaan aanpassen totdat de stroming weer eenparig is. Uitgangspunt van de theorie is dat deze overgangen zich over grote afstand voltrekken, zodat de drukverdeling hydrostatisch is (rechte stroomlijnen, geen verticale versnellingen) en abrupte vertragen zich niet voordoen. Dit leidt tot een balansvergelijking voor de energiehogte met een dissipatieterm ten gevolge van uitsluitend de bodemweerstand, de zogenaamde *verhanglijnv vergelijking*.

II.4 Evenwichtsdiepte: de waterdiepte in een waterloop (rivier, kanaal) waarbij voor een gegeven (specifiek) debiet de stroming eenparig is. De totale bodemweerstand is dan in evenwicht met de verhangkracht, met het weerstandsverhang gelijk aan het bodemverhang. Uit het voorgaande volgt: $g A i_b = c_f U^2 P$, waarin A en P respectievelijk het natte

oppervlak en de natte omtrek van de dwarsdoorgang zijn. Met $A/P = R \approx d$ (wat een goede benadering is indien, zoals hier, $B \gg d$) en de eerder berekende waarde van U volgt nu $d_e = c_f U^2 / (g i_b) = 4.24 \text{ m}$.

II.5 Zie onderstaande schets.



II.6 Langs het traject A-B is het bodemverhang anderhalf keer zo groot als langs de rest van de rivier waarmee de evenwichtsdiepte langs dit traject $d_{e,AB} = 3,96 \text{ m}$. In punt B heerst de evenwichtsdiepte d_e behorend bij het riviertraject benedenstrooms van B. Er treedt hierdoor langs A-B een M_1 -type verhanglijn op (flauwe bodemhelling, $d_B > d_{e,AB}$). De aanpassingslengte L hiervan bedraagt $L = d_{e,AB}(i_b^{-1} - c_f^{-1})/3 = 6158 \text{ m}$. Volgens de benadering voor kleine afwijkingen van de eenparige toestand geldt $d_A = d_{e,AB} + (d_B - d_{e,AB}) \exp((s_A - s_B)/L)$. Met $s_A - s_B = -2000 \text{ m}$ (let op het minteken!) en $d_B - d_{e,AB} = 0,20 \text{ m}$ volgt uiteindelijk $d_A = 3,95 \text{ m}$.

Vraagstuk III (pijpleiding)

III.1 Als de drukval veroorzaakt wordt door wandwrijving is deze evenredig met het weerstandsverhang. Dit verhang is voor een turbulente stroming evenredig met de gemiddelde snelheid in het kwadraat en voor een laminaire stroming evenredig met de snelheid. Omdat de snelheid evenredig is met het debiet, duidt een lineair verband tussen drukval en debiet op een laminaire stroming. Omdat in de grafiek het lineaire deel bij lage debieten te vinden is en omdat de drukval bij hogere debieten meer dan lineair toeneemt, lijkt dit een goede verklaring.

III.2 Het verband tussen drukval en debiet volgt uit het verband tussen weerstandsverhang en snelheid. $i_w = \frac{f U^2}{8 g R}$ dus $\frac{\Delta p}{\rho g} = f \frac{L U^2}{D 2g} = f \frac{L}{D} \frac{Q^2}{2g(\pi/4 D^2)^2}$ voor het laminaire geval kunnen we voor de Darcy-Weisbach weerstandsfactor nemen $f = \frac{64}{Re}$ met $Re = \frac{UD}{\nu}$ dan volgt $\frac{\Delta p}{Q} = \frac{128}{\pi} \frac{\nu \rho L}{D^4}$. Als we kijken naar de eerste 4 punten dan liggen die netjes op een lijn, met helling $81,5 \text{ kNs/m}^5$. Met de diameter als enige onbekende levert dit op: $D = 0,1 \text{ m}$. Met deze informatie kunnen we direct zien dat de stroming laminair is: bij $Q = 0,0002 \text{ m}^3/\text{s}$ volgt $U = 0,025 \text{ m/s}$ en $Re = 2550$. Dus de aanname dat voor kleine debieten de stroming laminair is klopt.

III.3 De maximale wandschuifspanning wordt gevonden voor de maximale drukval en dus ook bij het maximale debiet; immers de lengte en de diameter van de buis blijven

hetzelfde. $\tau_0 LP = \Delta p A$ zodat $\tau_0 = \frac{D\Delta p}{4L} = \frac{0,1 \cdot 1061}{4 \cdot 200} = 0,133 \text{ N/m}^2$.

III.4 Als we uitgaan van hydraulisch ruwe condities bij de grote debieten, dan geldt voor de weerstandsfactor $\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log\left(\frac{3,7D}{k}\right)$ (Colebrook-White). Als we kijken naar het verloop van de grafiek waarin de evenredigheid met het debiet (en dus de snelheid) in het kwadraat te herkennen is, dan geldt daar het verband $\frac{\Delta p}{Q^2} = 7,89 \cdot 10^8 \frac{\text{Ns}^2}{\text{m}^8}$ op basis van het weerstandsverhang geldt voor deze relatie: $\frac{\Delta p}{Q^2} = f \frac{8L\rho}{\pi^2 D^5}$ zodat hieruit volgt dat $f = 0,0486$. Gebruikmakend van de White-Colebrook formule voor hydraulisch ruwe condities levert een relatieve ruwheid $\frac{k}{D} = 0,02$, zodat $k = 2 \text{ mm}$.

III.5 De voorwaarde voor hydraulisch ruwe condities geldt dat de stroming turbulent moet zijn en dat $k > \delta$ met $\delta = 11,6 \frac{\nu}{u^*}$ de dikte van de viskeuze sublaag. Met de inmiddels bekende waarde van de weerstandsfactor kunnen we u^* berekenen. Immers $\frac{u^*}{U} = \sqrt{f}$. Voor het debiet van $Q = 0,00028 \text{ m}^3/\text{s}$ geldt $\delta = 1,5 \text{ mm} \approx k$ maar bij $Q = 0,00036 \text{ m}^3/\text{s}$ geldt $\delta = 1,2 \text{ mm} < k$ dus ruw. Bij grotere debieten wordt de viskeuze sublaag alleen maar dunner.

Vraagstuk IV (korte overlaat)

IV.1 In het stroomvoerende deel van doorgang 2 zijn de stroomlijnen bij benadering recht waardoor in dit deel van de vertikaal een hydrostatische drukverdeling heerst. Het deel van de doorgang dat zich in het zog bevindt kenmerkt zich door de aanwezigheid van een bodemneer waarin de stroomlijnen gekromd zijn. De stroomsnelheden in deze zone zijn echter zo laag (ten opzichte van de hoofdstroom) dat de bijbehorende gradiënt van het piëzometrisch niveau ($\simeq U^2/gR$) verwaarloosbaar klein waardoor ook hier, zijn het bij benadering, de aanname van hydrostatische druk opgaat.

IV.2 Gebruik een balans voor horizontale impuls tussen doorgangen 2 en 3: $F_2 = F_3$, waarin $F_{2,3} = \frac{1}{2}\rho g d_{2,3}^2 + \rho q U_{2,3}$. Met $U_3 = q/d_3$ en $U_2 = q/(d_2 - a_k)$ geeft dit (op een constante factor ρ na): $\frac{1}{2}g d_2^2 + q^2/(d_2 - a_k) = \frac{1}{2}g d_3^2 + q^2/d_3$. Het rechterlid uit deze vergelijking kan rechtstreeks uit de gegevens berekend worden ($F_3 = 3650 \text{ N/m}$) waarna een vergelijking met één onbekende (d_2) resteert. Oplossen (grafische rekenmachine of iteratief) geeft uiteindelijk $d_3 = 0,76 \text{ m}$ (subkritische tak van de oplossing kiezen).

IV.3 De horizontale kracht K_H van het stromende water op de overlaat kan gevonden worden via een impulsbalans voor het balansgebied tussen doorgangen 1 en 3: $F_1 - K_H - F_3 = 0$ (balansgebied kiezen tussen doorgangen 1 en 2 kan ook). De impulsoverdracht in doorgang 3 volgt rechtstreeks uit het tussenresultaat van de vorige deelvraag. Voor de impulsverdacht in doorgang 1 moeten we eerst de watediepte d_1 bepalen, via de energievergelijking tussen doorgang 1 en 2: $H_1 = H_2$. Met $U_2 = q/(d_2 - a_k)$ vinden we $H_2 = 1,137 \text{ m}$. De watediepte d_1 volgt vervolgens uit $d_1 + q^2/(2g d_1^2) = 1,137 \text{ m}$. Oplossen hiervan levert (subkritische tak kiezen): $d_1 = 1,13 \text{ m}$. Invullen in de uitdrukking voor de impulsoverdracht geeft vervolgens $F_1 = 6378 \text{ N/m}$ en uiteindelijk $K_H = F_1 - F_3 = 2727 \text{ N/m}$.

IV.4 De overlaat is volkomen met afvoercoëfficiënt $m = 1$ zodat $q = d_k \sqrt{g d_k}$, oftewel

$d_k = (q^2/g)^{1/3} = 0,21$ m (grensdiepte) en $E_k = \frac{3}{2}d_g = 0,31$ m. De energiehoogte in doorgang voor de overlaat bedraagt nu $H_1 = a_k + E_k = 0,96$ m. Via de uitdrukking voor de energiehoogte kan hieruit de waterdiepte in doorgang 1 berekend worden: $d_1 = 0,95$ m.

IV.5 Beschouw het behoud van horizontale impuls in het balansgebied tussen doorgangen 4 en 3: $F_4 + F_{\text{straal}} - F_3 = 0$. Hierin is F_{straal} de door de straal meegevoerde impuls gelijk aan de massa overdracht via straal keer de *horizontale* stroomsnelheid in de straal: $\rho q \times U_{\text{straal}} \cos 45^\circ$, waarin $U_{\text{straal}} = q/b = 3,0$ m/s. De impulsoverdracht door doorgang 4 is gegeven door $F_4 = \frac{1}{2}\rho g d_4^2$ (dichte wand, stroomsnelheid nul). De balansvergelijking kan hiermee worden omgewerkt tot: $\frac{1}{2}g d_3^2 + q^2/d_3 = \frac{1}{2}g d_4^2 + (q^2/b) \cos 45^\circ$. Het rechterlid kan rechtstreeks uit de gegevens berekend worden. Oplossen van de resulterende vergelijking voor d_3 geeft (subkritische oplossing kiezen) $d_3 = 0,59$ m.