

CTB2110

Vloeistofmechanica

**Tentamenbundel Civiele Techniek
Het Gezelschap "Practische Studie"**



LET OP! EEN REPRODUCERENDE
LEERSTIJL IS SCHADELIJK VOOR
DE ACADEMISCHE VORMING



November 2016
Januari 2016
November 2015

Januari 2015
November 2014

Schriftelijk tentamen

Totaal aantal pagina's

pagina's

Datum en tijd

van

uur

Verantwoordelijke docent

Alleen het op tentamenpapier geschreven werk / antwoord wordt beoordeeld, tenzij onder 'aanvullende informatie' anders is aangegeven.

Tentamenvragen (in te vullen door examiner)

Totaal aantal vragen: (waarvan open vragen en multiple-choice vragen)

Max. te behalen punten:

alle vragen tellen even zwaar

vragen hebben verschillende gewicht (gewicht staat per vraag vermeld of wordt in overzicht gegeven.)

Gebruik hulpmiddelen en informatiebronnen tijdens tentamen (in te vullen door examiner)

Niet toegestaan:

- Smartphone of apparaat met vergelijkbare functies.
- Antwoord geschreven met potlood.
- Hulpmiddelen en/of informatiebronnen tenzij hieronder anders vermeld.

Toegestaan:

boeken aantekeningen woordenboeken dictaten

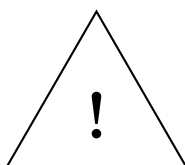
formulebladen (zie ook onder 'Aanvullende informatie') rekenmachines computers

Aanvullende informatie

Uiterlijke datum nakijken tentamen:

(in te vullen door examiner)

(de uiterlijke nakijktermijn bedraagt 15 werkdagen)

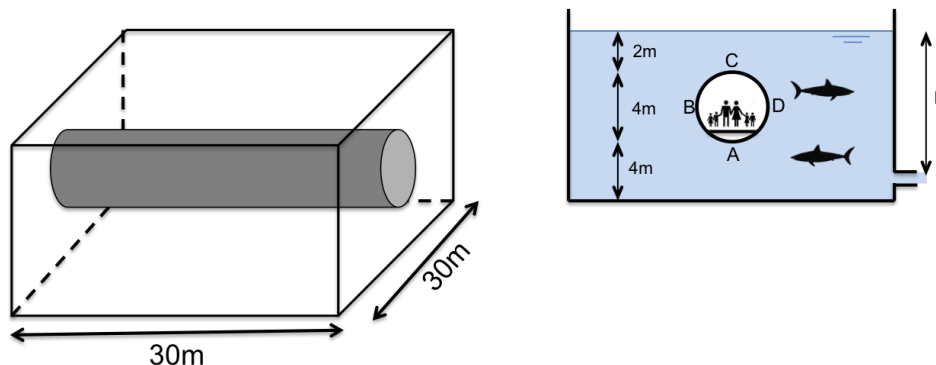


Elk vermoeden van fraude wordt
gemeld bij de Examencommissie

Mobiel UIT

Vraagstuk I (haaienbassin)

Voor een dierentuin is een nieuw haaienbassin ontworpen. Het bassin bestaat uit een bak met een vierkant grondvlak en verticale wanden. Door het bassin loopt een glazen loopbrug met cirkelvormige doorsnede. Deze loopbrug is bevestigd aan wanden aan de uiteinden van de loopbrug, zie figuur. De binnenkant van de loopbrug staat in directe verbinding met de buitenlucht. In de loopbrug heerst daarom altijd de atmosferische druk, evenals aan het wateroppervlak van het bassin.



I.1¹ Bereken de netto verticale drukkracht van het water op de loopbrug.

I.2¹ Bereken de horizontale drukkracht van het water op de linker helft (deel ABC) van de loopbrug.

Na aanleg van de loopbrug blijkt dat er bij punt C een gat zit. Na een uur is 3000 liter water de loopbrug ingestroomd (een kleine hoeveelheid ten opzichte van de totale hoeveelheid water).

I.3¹ Bereken de netto doorsnede van het gat bij punt C.

De gaten worden provisorisch dichtgemaakt, maar voor een grondige reparatie moet het bassin geleegd worden. Daartoe wordt gebruik gemaakt van een uitstroombuis. Het waterpeil in het bassin ten opzichte van het niveau van de uitstroomopening (zie figuur) is weergegeven als hoogte h . Om een schatting te maken van de leeglooptijd wordt in eerste instantie de loopbrug buiten buiten beschouwing gelaten.

I.4¹ Leid af dat de leeglooptijd van het bassin (tot aan de uitstroomopening) gelijk is aan:

$$t_{leegloop} = \frac{B^2}{\mu A_{uit}} \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

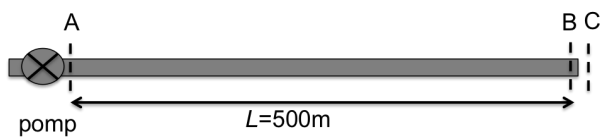
met leeglooptijd $t_{leegloop}$, breedte van het bassin B , effectieve oppervlakte van de uitstroom μA_{uit} en initiële hoogte $h_0 = h(t = 0)$. Ga uit van de situatie zonder loopbrug.

I.5¹ (i) Schets eerst het verloop van de waterstand in de tijd (h uitgezet tegen *tijd*) zonder de loopbrug.
(ii) Schets vervolgens het verloop voor de situatie met de loopbrug. Geef daarbij op de verticale as de positie van de loopbrug aan.

Vraagstuk II (strandsuppletie)

Voor een strandsuppletie wordt sediment gebaggerd uit zee en opgespoten op het strand. Voor deze strandsuppletie wordt een pijpleiding aangelegd tussen het baggerschip en het strand. De leiding drijft op het water en ligt daarmee horizontaal. Aan het ene uiteinde van de pijp zit een pomp, die in verbinding staat met het ruim van het baggerschip. Het andere uiteinde is open, waardoor het water horizontaal uitstroomt.

De pijpleiding heeft een lengte $L = 500\text{m}$ en een diameter van $D = 0,80\text{m}$. Het ontwerpdebiet bedraagt $Q = 1\text{m}^3/\text{s}$. Het zand-water mengsel heeft een dichtheid van 1100 kg/m^3 . De ruwheid van de pijp kan als hydraulisch ruw aangenomen worden, met een ruwheidshoogte van $k_s = 1,0\text{mm}$.

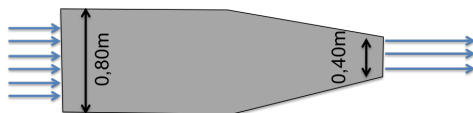


II.1¹ Leg het verschil uit tussen hydraulisch gladde condities en hydraulisch ruwe condities.

II.2¹ Bereken de schuifspanning in het midden van de pijp en aan de wand van de pijp. Teken het verloop van de schuifspanning tussen het midden en de wand.

II.3^{1,5} Teken het energieniveau en het piëzometrisch niveau tussen A (vlak na de pomp) en C (net na de uitstroming). Bereken daartoe de relevante waarden. (mocht je bij II.2 geen Darcy-Weisbach coëfficiënt bepaald hebben, reken dan met $f = 0.02$.)

Aan het uiteinde van de buis wordt een spuitstuk aangebracht om het zand verder te verspreiden, zie figuur. De diameter van de uitstroomopening is gehalveerd tot $D = 0,40\text{m}$.

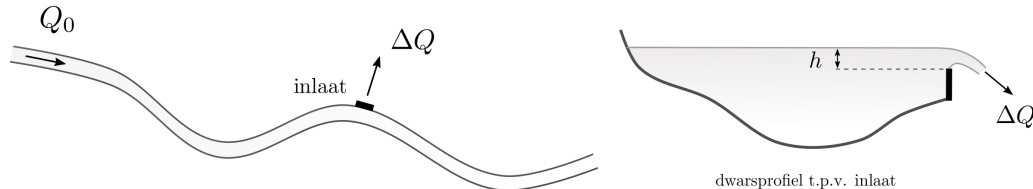


II.4¹ Bereken het **extra** pompvermogen dat nodig is om hetzelfde debiet te behouden.

II.5^{1,5} Bereken de netto horizontale kracht die het water op het spuitstuk uitoefent.

Vraagstuk III (waterinname rivier)

Een waterbedrijf onttrekt oppervlaktewater aan een rivier. Hiertoe is plaatselijk in de oever van de rivier een korte volkomen overlaat aangebracht met een vaste kruinhoogte. Zie onderstaande schets van de rivier en de situatie ter plaatse van het innamepunt.



III.1¹ Benoem de twee belangrijkste verschillen tussen een *korte volkomen* overlaat en een *lange onvolkomen* overlaat, en leg aan de hand hiervan uit in welk van deze gevallen voor een gegeven waterdiepte d_k op de kruin het specifieke debiet q het grootst is.

De overlaat heeft een netto doorstroombreedte b van 25 m en een afvoercoëfficiënt m van 1,04. De snelheidshoogte in de rivier is onder alle omstandigheden verwaarloosbaar klein ten opzichte van de specifieke energiehogte op de kruin van de overlaat.

III.2¹ Bereken het lokale waterpeil h in de rivier ten opzichte van de kruin van de overlaat, wanneer het onttrokken debiet ΔQ gelijk is aan $40 \text{ m}^3/\text{s}$. Het waterpeil in de rivier varieert niet noemenswaardig in de directe omgeving van het innamepunt.

De inname van ruw drinkwater beïnvloedt de waterstand in de rivier tot op grote afstand van de inlaat (verhanglijn).

III.3¹ Benoem de drie belangrijkste uitgangspunten van de theorie die dergelijke veranderingen van de waterstand beschrijft, en leg aan de hand van een tegenvoorbeeld uit welk type waterstandsveranderingen *niet* door deze theorie verklaard worden.

Het natuurlijk debiet Q_0 in de rivier (zonder de waterinname) bedraagt $500 \text{ m}^3/\text{s}$. Voor een eerste berekening wordt de rivier geschematiseerd door middel van een rechthoekig dwarsprofiel met een uniforme breedte B van 85 m, een constant bodemverhang i_b van 3×10^{-4} en een weerstandscoefficiënt c_f van 4×10^{-3} . Daarnaast wordt verondersteld dat de invloed van benedenstrooms gelegen randvoorwaarden niet merkbaar is ter plaatse van de inlaat.

III.4^{1,5} Maak een schets van het verloop van de waterstand in de rivier voor een ruim traject bovenstrooms en benedenstrooms van de inlaat, en bereken vervolgens de waterdiepte in een punt P op 5 km afstand bovenstrooms van de inlaat. Ga bij de berekening uit van kleine afwijkingen ten opzichte van de eenparige toestand.

Tijdens een periode van droogte neemt de natuurlijke afvoer af tot $200 \text{ m}^3/\text{s}$. De kruinhoogte, de netto breedte b en de afvoercoëfficiënt m van de overlaat blijven daarbij gelijk. Alle eerdere aannamen en vereenvoudigingen blijven van kracht.

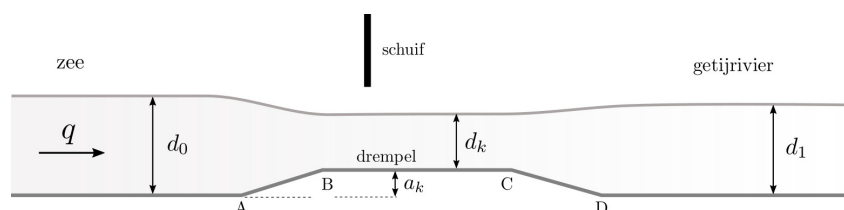
III.5^{1,5} Geef het stelsel vergelijkingen waarmee je de grootte van het ingenomen debiet $\Delta Q'$ in deze nieuwe situatie kunt uitrekenen, en leg uit hoe je dit stelsel oplost. De berekening zelf hoeft niet te worden uitgevoerd (het mag wel), het gaat om een uitleg van de aanpak.

Vraagstuk IV (stormvloedkering met turbines)

Een stormvloedkering bestaat uit een serie pijlers met daartussen doorstroomopeningen, elk bestaande uit een drempel en een schuif welke onder normale omstandigheden volledig geopend is. Het debiet door de kering varieert in de tijd als gevolg van het getij, maar kan daarbij op ieder willekeurig moment als stationair worden beschouwd. Dat wil zeggen, het debiet hangt uitsluitend af van de momentane waarden van de waterdiepten aan weerszijden van de kering.

IV.1¹ Wat volgt uit dit laatste gegeven voor de versnellingen van een waterdeeltje dat de kering passeert?

We laten de invloed van de pijlers tussen de afzonderlijke openingen verder buiten beschouwing en gaan uit van de situatie per eenheid van breedte met een constante bodemhoogte in de omgeving van de kering. De horizontale drempel heeft een hoogte a_k van 3 m ten opzichte van het lokale bodemniveau. De stroomlijnen boven de drempel zijn recht en horizontaal. Een en ander is weergegeven in onderstaande figuur.



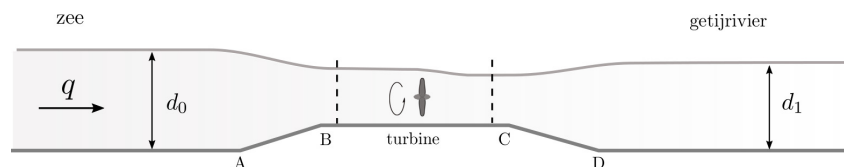
Tijdens hoogwater op zee, met de stroomrichting zoals in bovenstaande figuur, bedraagt de waterdiepte d_0 aan de zeezijde van de kering 10 m. Daarbij wordt op de drempel een waterdiepte d_k gemeten van 6 m.

IV.2¹ Bereken het specifieke debiet q door de kering, ervan uitgaande dat de energieverliezen langs deel A-B-C van de drempel verwaarloosbaar klein zijn. (Ga verder met $q = 35 \text{ m}^2/\text{s}$ als je hier niet uit komt.)

De grootte van de horizontale drukkracht op het (schuin verlopende) deel C-D van de drempel wordt bepaald door de gemiddelde waterdiepte langs dit deel en is (per eenheid van breedte) gegeven door $\frac{1}{2}\rho g(d_k + d_1)a_k$.

IV.3^{1,5} Bereken voor de situatie van vraag IV.2, en uitgaande van de bovenstaande formulering voor de grootte van de horizontale drukkracht langs deel C-D, de waterdiepte d_1 benedenstrooms van de kering.

De hoge stroomsnelheid boven de drempel kan worden benut voor energieopwekking. Hiertoe worden in de kering turbines geïnstalleerd met een rotordiameter van 4 m en een weerstandscoefficiënt van 1,2 welke is gedefinieerd voor het totale oppervlak bestreken door de draaiende rotor. Zie onderstaande figuur.



Tijdens het eerder beschouwde hoogwater, met een waterdiepte d_0 op zee van 10 m, bedraagt het nominaal opgewekte vermogen per turbine 0,2 MW. De dichtheid van zeewater bedraagt 1025 kg/m^3 .

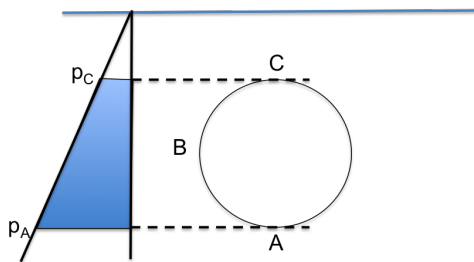
IV.4¹ Bereken het specifieke debiet q door de kering voor de situatie met turbines. Aanwijzing: het nominale turbinevermogen is gelijk aan $c_w A \frac{1}{2} \rho U_B^3$, waarin U_B de stroomsnelheid is in doorgang B, zie figuur. (Ga verder met $q = 22 \text{ m}^2/\text{s}$ als je hier niet uit komt.)

De turbines hebben onderling een hart op hart afstand van 8 m.

IV.5^{1,5} Bereken de bijbehorende waterdiepte op de drempel achter de turbines (doorgang C).

Vraagstuk I (haaienbassin)

I.1¹ De totale opwaartse kracht kan bepaald worden met de wet van Archimedes: $F_{ver} = \rho_{water} g V = \rho g \pi \frac{D^2}{4} L = 1000 * 9.81 * \pi * 4^2 / 4 * 30 = 3.7 * 10^6$ N of $F_{ver} = 3.7$ MN.

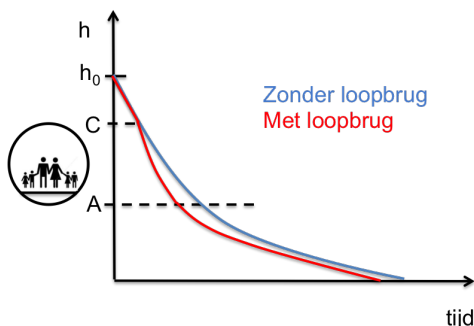


I.2¹ De horizontale drukkracht wordt bepaald door een balansgebied te kiezen, zoals aangegeven in de figuur. De horizontale drukkracht over AC is dan gelijk aan de drukkracht over A'C'. De drukkracht kan dan bepaald worden met $F_{hor} = \rho g \frac{1}{2} (d_A + d_C) L (z_C - z_A) = 1000 * 9.81 * 0.5 * (2 + 6) * 30 * 4 = 4.7$ MN. Een andere methode is: $F_{hor} = (\frac{1}{2} \rho g d_A^2 - \frac{1}{2} \rho g d_C^2) L$.

I.3¹ Na een uur is er 3 m^3 naar binnen gestroomd. Het debiet is daarmee: $Q = 3/3600 = 0.000833 \text{ m}^3/\text{s}$. Om de netto doorsnede van het gat te bepalen kunnen we Torricelli toepassen: $Q = \mu A \sqrt{2g\Delta h}$, met h de waterdiepte boven C en effectieve doorsnede $\mu A = \frac{Q}{\sqrt{2g\Delta h}} = \frac{0.000833}{\sqrt{2 * 9.81 * 2}} = 1.33 \text{ cm}^2$.

I.4¹ Bepaling van de leeglooptijd start met de balansvergelijking voor massa: $\frac{dm}{dt} = -\rho_{water} Q$ (let op minteken). De massa neemt af als gevolg van het uitstroomdebiet Q . Voor constante dichtheid valt de dichtheid weg, waardoor een volumebalans aangenomen mag worden. Bovendien zijn de zijwanden verticaal, zodat geldt: $B^2 \frac{dh}{dt} = -Q$. Het debiet Q hangt af van de waterstand in het bassin. De referentiepositie is gelijk gekozen aan de uitstroming. Het debiet kan daarmee geschreven worden als: $\mu A \sqrt{2g\Delta h}$. Invullen in de balansvergelijking geeft: $B^2 \frac{dh}{dt} = -\mu A \sqrt{2g\Delta h}$. Om de leeglooptijd te bepalen wordt deze vergelijking geïntegreerd: $\int \frac{B^2}{\mu A \sqrt{2g}} \frac{1}{\sqrt{h}} dh = -\int dt$. De op te lossen vergelijking voor de periode $t = 0$ tot $t = t_1$, met $h(t = 0) = h_0$ en $h(t = t_1) = 0$ is daarmee: $\int_{h_0}^0 \frac{B^2}{\mu A \sqrt{2g}} \frac{1}{\sqrt{h}} dh = -\int_{t_0}^{t_1} dt$. De leeglooptijd wordt: $t_{leegloop} = t_1 - t_0 = \frac{B^2}{\mu A_{uit}} \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$.

I.5¹ (i) De waterstand verloopt niet lineair met de tijd, aangezien de uitstroomsnelheid afneemt met de waterstand in het bassin. Dit volgt direct uit de gegeven vergelijking. De tijd die nodig is om de laatste helft van het volume weg te laten stromen vergt $\frac{1}{\sqrt{2}}$ van de totale leeglooptijd. De eerste helft gaat daarmee in $(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}) t_{leegloop}$. (ii) De loopbrug verkleint het totale volume. De leeglooptijd zal daarmee korter zijn. De daling in waterstand $\frac{dh}{dt}$ zal alleen verschillend zijn tussen z_C en z_A , aangezien dan het oppervlak niet gelijk is aan B^2 .

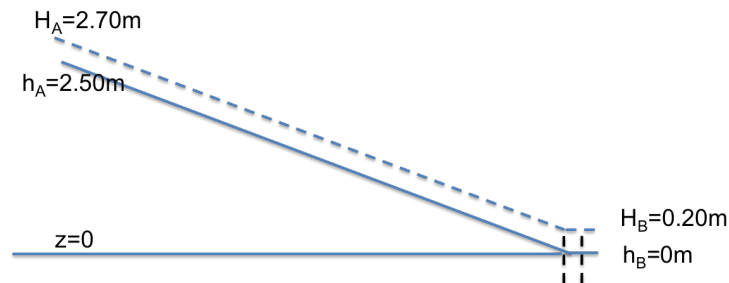


Vraagstuk II (strandsuppletie)

II.1¹ Voor hydraulisch gladde condities zijn de oneffenheden klein ten opzichte van de dikte van de laminaire sublaag. De laminaire sublaag bepaalt daarmee de Darcy-Weisbach ruwheidscoëfficiënt f en daarmee de wandwrijving. In het geval van hydraulisch ruwe condities is de laminaire sublaag klein ten opzichte van de ruwheidselementen. De ruwheid van de wand bepaalt de wandwrijving.

II.2¹ In het midden van de pijp is de schuifspanning gelijk aan nul, aangezien de dwarsgradiënt van de stroming daar nul is $\frac{du}{dy} = 0$. Aan de wand is de wandschuifspanning gelijk aan $\tau_{wand} = \frac{f}{8}\rho U^2$, met U de gemiddelde snelheid. De ruwheidscoëfficiënt kan bepaald worden op basis van de ruwheidshoogte $k_s = 1\text{mm}$: $\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(0.27 \frac{k_s}{D} \right)$. De ruwheidshoogte wordt dan: $f = 0.207$. De gemiddelde stroomsnelheid is $U = \frac{Q}{\pi D^2/4} = 1.99\text{m/s}$. De wandwrijving wordt daarmee: $\tau_{wand} = \frac{f}{8}\rho U^2 = 0.0207/8 * 1100 * 1.98^2 = 11.2\text{Pa}$. Tussen het midden van de pijp en de wand verloopt de schuifspanning lineair.

II.3^{1,5} De uitstroomhoogte is gedefinieerd als $z = 0$. Aangezien de druk daar nul is, geldt ook $h_B = 0$. De energiehoogte is $H_B = h_B + \frac{U^2}{2g} = 0 + 0.20 = 0.20\text{m}$. Over de pijp treedt energieverlies op: $\Delta H = f \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g} = 0.02 \frac{500}{0.8} \frac{1.98^2}{2*9.81} = 2.50\text{m}$. Dit geeft: $h_A = 2.50\text{m}$ en $H_A = 2.70\text{m}$.



II.4¹ In de situatie met spuitstuk wordt de snelheid bij de uitstroming $U = \frac{Q}{\pi D_{spuit}^2/4} = 7.9\text{m/s}$. De snelheidshoogte wordt daarmee: $\frac{U^2}{2g} = \frac{7.9^2}{2*9.81} = 3.2\text{m}$. In de oude situatie was de snelheidshoogte 0.2m . De extra te overwinnen energiehoogte wordt daarmee: $\Delta H = 3.2 - 0.2 = 3.0\text{m}$. Het extra vermogen dat geleverd moet worden is daarmee: $\Delta P = \rho g Q \Delta H = 1100 * 9.81 * 1 * 3 = 32.3\text{ kW}$.

II.5^{1,5} Bekend zijn het debiet (Q), de diameters van de openingen (D_1 en D_2) en de druk op bij de uitstroming ($p = 0$, atmosferische druk). Een krachtenbalans kan opgesteld worden $\Sigma F = F_{spuit} + F_1 + F_2$. Om deze krachten uit te rekenen moeten de snelheden en de drukken op doorsnede 1 (vlak voor het spuitstuk) en doorsnede 2 (vlak na het spuitstuk) bepaald worden. Er geldt voor de versnellende stroming dat het energieniveau uniform is $H_1 = H_2$. Ook geldt de massabalans $Q_1 = Q_2$. Voor de uitstroomzijde kunnen we daarmee de variabelen berekenen: $H_2 = h_2 + \frac{U_2^2}{2g} = 0 + \frac{7.9^2}{2*9.81} = 3.2\text{m}$ en $F_2 = -\rho * Q * U_2 + p * A = 1100 * 1 * 7.9 + 0 = -8.69\text{kN}$. Voor de linkerzijde geldt: $H_1 = H_2 = 3.2\text{m}$. De druk in doorsnede 1 wordt daarmee: $p_1 = \rho g \left(H_1 - \frac{U_1^2}{2g} \right) = 1100 * 9.81 * (3.2 - 0.2) = 32.37\text{ kPa}$. De kracht aan de linkerzijde wordt daarmee: $F_1 = p_1 A + \rho Q U_1 = 32.37 * 10^3 * \pi * 0.4^2 + 1100 * 1 * 1.98 = 16.2 * 10^3 + 2.2 * 10^3 = 18.45\text{ kN}$. Het verschil in krachten moet geleverd worden om het spuitstuk vast te houden wordt daarmee: $F_{spuit} = -F_1 - F_2 = -18.45 + 8.69 = -9.8\text{ kN}$ en is daarmee naar links gericht (tegen de stroming in).

Vraagstuk III

III.1 Het antwoord dient de volgende elementen te bevatten:

- Boven een lange overlaat zijn de stroomlijnen recht en is de drukverdeling hydrostatisch, de stroomsnelheid is dan vrijwel constant over de diepte. Bij een korte overlaat zijn de stroomlijnen gekromd, de drukverdeling is niet-hydrostatisch en de stroomsnelheid varieert over de diepte, neemt daarbij toe in de richting van de kruin. Afvoercoëfficiënt is hierdoor groter dan 1 $\left[\frac{1}{4} \right]$.

- Onvolkomen wil zeggen dat de afvoer gestuwd is, benedenstroomse veranderingen van de waterstand zijn merkbaar bovenstrooms van de overlaat. De stroming boven de overlaat is subkritisch. Bij een volkomen overlaat zijn benedenstroomse veranderingen van de waterstand niet merkbaar aan de bovenstroomse zijde. De stroming op de overlaat is kritisch $[\frac{1}{4}]$.
- Bij een volkomen overlaat is de stroomsnelheid boven de kruin gelijk aan $\sqrt{gd_k}$ (kritische stroming). Vanwege de kromming van de stroomlijnen is de afvoercoëfficiënt groter dan 1 $[\frac{1}{4}]$. Bij een onvolkomen overlaat is de stroming op de kruin subkritisch, en is de stroomsnelheid kleiner dan $\sqrt{gd_k}$. Bovendien is de afvoercoëfficiënt kleiner dan bij een volkomen overlaat. Dit alles resulteert, bij gelijke diepte, voor de lange onvolkomen overlaat in een kleiner debiet dan bij de korte volkomen overlaat $[\frac{1}{4}]$.

III.2 De afvoer over een volkomen overlaat is gegeven door $\Delta Q = m b d_k \sqrt{gd_k}$. Invullen van het gegeven debiet, ΔQ , de afvoercoëfficiënt en de breedte geeft nu $d_k = 0,62 \text{ m}$ $[\frac{1}{2}]$. De overlaat is volkomen, d_k is gelijk aan de grensdiepte zodat de specifieke energiehogte boven de kruin $E_k = \frac{3}{2}d_k = 0,93 \text{ m}$ $[\frac{1}{4}]$. Omdat snelheidshoogte-effecten in de rivier verwaarloosbaar klein zijn geldt voor de waterstand h in de rivier, gemeten ten opzichte van de kruin, $h = E_k = 0,93 \text{ m}$ $[\frac{1}{4}]$.

III.3 Het antwoord dient de volgende elementen te bevatten:

- De stroming is stationair, verandert niet in de tijd. Het debiet Q is constant in tijd en plaats $[\frac{1}{4}]$.
- De diepte varieert slechts geleidelijk, de stroomlijnen zijn vrijwel recht, en de drukverdeling is nagenoeg hydrostatisch. De specifieke energiehogte is dan gegeven door $E_k = d + \beta U^2 / 2g$ (waarin $\beta \approx 1$ is een correctiefactor voor niet-uniformiteit van de stroomsnelheid over de diepte) $[\frac{1}{4}]$.
- De energiehogte varieert (in stroomrichting) uitsluitend onder invloed van de wandweerstand $[\frac{1}{4}]$.
- Tegenvoorbeeld: lokale (vertragings)verliezen rondom kunstwerken of onder invloed van sterke variaties van het vrij oppervlak (bijvoorbeeld watersprong) worden niet door de theorie beschreven en moeten door middel van zogenaamde overgangsvoorwaarden verdisconteerd worden $[\frac{1}{4}]$.

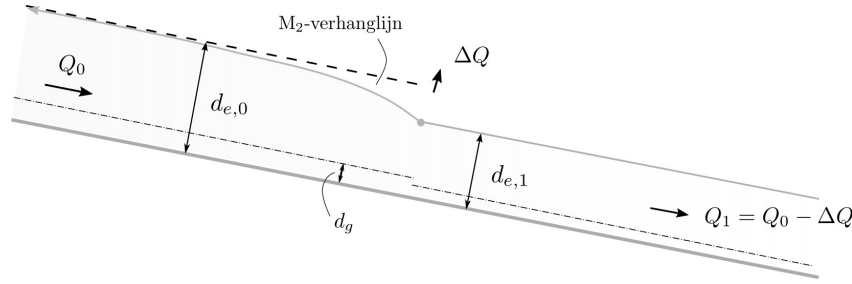
III.4 Bovenstrooms van het inlaatpunt is het debiet groter dan benedenstrooms ervan. Vanwege de constante breedte van de rivier geldt hetzelfde voor de respectievelijke specifieke debieten, en is bovenstrooms van de inlaat de evenwichtsdiepte groter dan benedenstrooms $[\frac{1}{4}]$. Omdat de invloed van benedenstroomse randvoorwaarden niet merkbaar is bij de inlaat is de diepte ter plaatse van de inlaat gelijk aan de evenwichtsdiepte van het benedenstroomse traject $[\frac{1}{4}]$. Hierdoor stelt zich langs het bovenstroomse traject een M₂-type verhanglijn in ($c_f > i_b$ dus *mild slope*). Zie figuur $[\frac{1}{4}]$.

De berekening van de waterdiepte in P verloopt als volgt.

- Bereken eerst de evenwichtsdiepte in, respectievelijk, het boven- en benedenstroomse traject via $d_e = ((c_f/i_b)q^2/g)^{1/3}$. Met $q_0 = Q_0/B = 5,88 \text{ m}^2/\text{s}$ en $q_1 = (Q_0 - \Delta Q)/B = 5,41 \text{ m}^2/\text{s}$ geeft dit, respectievelijk, $d_{e,0} = 3,61 \text{ m}$ en $d_{e,1} = 3,41 \text{ m}$ $[\frac{1}{4}]$.
- De aanpassingslengte van het *bovenstroomse* traject, waar de verhanglijn zich voordoet, is gegeven door $L = d_{e,0} (i_b^{-1} - c_f^{-1}) / 3 = 3710 \text{ m}$ $[\frac{1}{4}]$.
- De waterdiepte in punt P volgt nu uit: $d_P = d_{e,0} + (d_{e,1} - d_{e,0}) \exp((s - s_0)/L)$, waarin $s - s_0 = -5000 \text{ m}$. Dit geeft tenslotte $d_P = 3,56 \text{ m}$ $[\frac{1}{4}]$.

III.5 Het onttrokken debiet $\Delta Q'$ is via de afvoerrelatie voor de volkomen overlaat bepaald door de lokale waterdiepte bij de inlaat, welke gelijk is aan de evenwichtsdiepte in het benedenstroomse traject $[\frac{1}{4}]$. Deze evenwichtsdiepte is echter afhankelijk van het debiet benedenstrooms van de inlaat, en daarmee ook van $\Delta Q'$ $[\frac{1}{4}]$. Een en ander leidt tot de volgende set vergelijkingen:

1. benedenstroomse evenwichtsdiepte: $d_{e,1} = \left(\frac{c_f q_1^2}{i_b g} \right)^{1/3}$ $[\frac{1}{4}]$
2. waarin $q_1 = \frac{Q_0 - \Delta Q'}{B} = q_0 - m \frac{b}{B} d_k \sqrt{gd_k}$ $[\frac{1}{4}]$



3. waarin de diepte op de kruin $d_k = \frac{2}{3}E_k = \frac{2}{3}(d_{e,1} - a_k)$, hierin is a_k de hoogte van de kruin ten opzichte van de lokale rivierbodem $[\frac{1}{4}]$

Dit stelsel kan worden opgelost door de uitdrukking voor de evenwichtsdiepte (1) te substitueren in de vergelijking voor de diepte op de kruin (3) en deze vervolgens te substitueren in de vergelijking voor het debiet q_1 (2). Na oplossen van deze vergelijking is via (2) het onttrokken debiet bekend. (Andere strategieën zijn ook mogelijk, bijvoorbeeld q_1 elimineren uit (1) via invullen van (2) geeft een vergelijking voor $d_{e,1}$. Iteratief: eerste schatting $q_1 = q_0$, bereken vervolgens $d_{e,1}$, hieruit volgt via (2) en (3) de waarde van $\Delta Q'$ waarmee de schatting voor q_1 verbeterd kan worden, enz.) $[\frac{1}{4}]$ (In dit geval met $Q_0 = 200 \text{ m}^3/\text{s}$ is het antwoord uitermate eenvoudig. De evenwichtsdiepte $d_{e,0}$ is in deze situatie 1,78 m terwijl de kruinhoogte $a_k = 2,68 \text{ m}$ (dit volgt uit het antwoord van vraag III.2). Er stroomt dus geen water over de overlaat, $\Delta Q' = 0$ en $d_{e,1} = d_{e,0} = 1,78 \text{ m}$.)

Vraagstuk IV

IV.1 De versnelling van een waterdeeltje is gegeven door de meebewegende (of materiële) afgeleide $D\vec{u}/Dt = \partial\vec{u}/\partial t + u_s\partial\vec{u}/\partial s$ $[\frac{1}{2}]$. In een stationaire stroming is de tijdsafgeleide gelijk aan nul en resteert alleen de tweede term $[\frac{1}{4}]$. De snelheidsveranderingen (versnellingen) van een deeltje dat de kering passeert zijn daarom vrijwel uitsluitend het gevolg van de verplaatsing van het deeltje door een ruimtelijk variërend snelheidsveld $[\frac{1}{4}]$.

IV.2 Gebruik de energievergelijking: $H_0 = H_k$ $[\frac{1}{4}]$ geeft (gebruik de bodem rondom de kering als referentieveld): $d_0 + q^2/2gd_0^2 = a_k + d_k + q^2/2gd_k^2$ $[\frac{1}{2}]$. Met de gegeven waarden voor d_0 , d_k en a_k volgt hieruit (iteratief of grafisch, kies de subkritische oplossing) $q = 32,2 \text{ m}^2/\text{s}$ $[\frac{1}{4}]$.

IV.3 De impulsvergelijking voor een balansgebied tussen de kruin en doorgang 1 achter de kering luidt: $F_k + K_{H,CD} = F_1$ $[\frac{1}{4}]$. Met gebruikmaking van de uitdrukking voor de impulsoverdracht in een verticale doorgang en de gegeven uitdrukking voor de horizontale kracht op deel CD volgt hieruit (op een constante factor ρ na): $\frac{1}{2}gd_k^2 + q^2/d_k + \frac{1}{2}a_k(d_k + d_1) = \frac{1}{2}gd_1^2 + q^2/d_1$ $[\frac{1}{2}]$. Dit is een vergelijking met d_1 als enige onbekende, met als (subkritische) oplossing $d_1 = 9,93 \text{ m}$ $[\frac{1}{4}]$.

IV.4 Uit het turbinevermogen volgt de stroomsnelheid U_B op de kruin van de overlaat aan de aanstroomzijde van de turbines (doorgang B): $\Delta P_t = c_w A \frac{1}{2} \rho U_B^3 = 0,2 \text{ MW}$ met $A = \frac{1}{4} \pi D^2$ geeft $U_B = 2,96 \text{ m/s}$ $[\frac{1}{4}]$. Om vervolgens het specifieke debiet q te berekenen gebruiken we de energievergelijking tussen doorgang 0 en doorgang B: $H_0 = H_B$, oftewel, $d_0 + q^2/2gd_0^2 = a_k + d_B + U_B^2/2g$ $[\frac{1}{4}]$. Via $q = d_B U_B$ werken we dit om tot $d_0 + q^2/2gd_0^2 = a_k + q/U_B + U_B^2/2g$ $[\frac{1}{4}]$. Na invullen van d_0 , a_k en de zojuist gevonden waarde van U_B geeft dit $q = 20,0 \text{ m}^2/\text{s}$ $[\frac{1}{4}]$. (De bijbehorende waterdiepte $d_B = 6,76 \text{ m}$.)

IV.5 Gebruik de energiebalans voor het balansgebied tussen de doorgangen B en C: $\rho g q H_B - \Delta p_t = \rho g q H_C$; hierin is Δp_t het door de turbines onttrokken vermogen per eenheid van breedte $[\frac{1}{2}]$. Dit vermogen is gelijk aan het vermogen per turbine gedeeld door de hart op hart afstand van de turbines: $\Delta p_t = 25 \text{ kW/m}$ $[\frac{1}{2}]$. Het linkerlid van de impulsvergelijking is hiermee volledig bepaald. Met de kruinhoogte als referentieniveau geeft dit $\rho g q (d_B + \rho q^2/2gd_B^2) = 1421,4 \text{ kW/m}$ waaruit voor de diepte in doorgang C volgt (subkritische oplossing) $d_B = 6,61 \text{ m}$ $[\frac{1}{2}]$. (Een aanpak via een impulsbalans tussen B en C met de horizontale kracht op de turbine gegeven door $F_{H,t} = c_w A \frac{1}{2} \rho U_B^2$ is ook mogelijk.)

Schriftelijk tentamen

Totaal aantal pagina's

pagina's

Datum en tijd

van

uur

Verantwoordelijke docent

Alleen het op tentamenpapier geschreven werk / antwoord wordt beoordeeld, tenzij onder 'aanvullende informatie' anders is aangegeven.

Tentamenvragen (in te vullen door examiner)

Totaal aantal vragen: (waarvan open vragen en multiple-choice vragen)

Max. te behalen punten:

alle vragen tellen even zwaar

vragen hebben verschillende weging (gewicht staat per vraag vermeld of wordt in overzicht gegeven.)

Gebruik hulpmiddelen en informatiebronnen tijdens tentamen (in te vullen door examiner)

Niet toegestaan:

- Smartphone of apparaat met vergelijkbare functies.
- Antwoord geschreven met potlood.
- Hulpmiddelen en/of informatiebronnen tenzij hieronder anders vermeld.

Toegestaan:

boeken aantekeningen woordenboeken dictaten

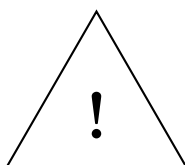
formulebladen (zie ook onder 'Aanvullende informatie') rekenmachines computers

Aanvullende informatie

Uiterlijke datum nakijken tentamen:

(in te vullen door examiner)

(de uiterlijke nakijktermijn bedraagt 15 werkdagen)

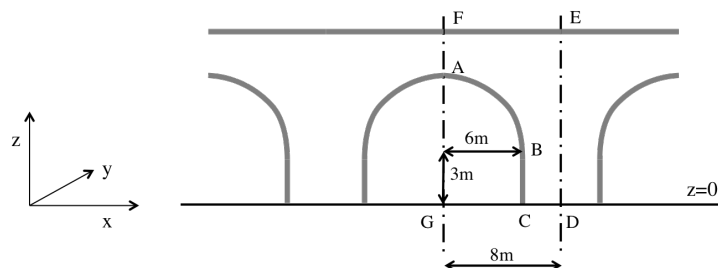


Elk vermoeden van fraude wordt
gemeld bij de Examencommissie

Mobiel UIT

Vraagstuk I (boogbrug)

In Yorkshire staan robuuste boogbruggen. Helaas is gebleken dat bij de overstromingen eind 2015 enkele bruggen zijn bezweken. In deze opgave beschouwen we de krachten die tijdens hoogwater op de brug worden uitgeoefend. We schematiseren de brug zoals aangegeven in onderstaande figuur. Het gekromde deel A-B vormt een deel van een cirkel met een straal van 6m. De lengte van de brug in stroomrichting (y-richting) bedraagt 9m.

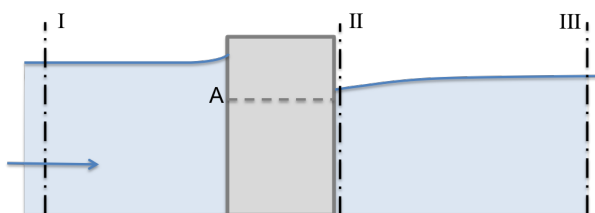


Aanvankelijk gaan we uit van stilstaand water met een waterstand van 10m ten opzichte van het in de figuur aangegeven referentieniveau.

I.1¹ Bereken de horizontale component van de drukkracht van het water op brugdeel A-B-C.

I.2¹ Bereken de verticale component van de drukkracht van het water op brugdeel A-B-C.

We beschouwen nu de situatie dat het water onder de brug stroomt. Vanwege de symmetrie van de brug volstaat het de berekeningen uit te voeren voor het repeterende deel: G-D-E-F. Direct achter de brug (doorsnede II in onderstaande figuur) wordt een waterdiepte van 9,6 m gemeten. Ook wordt een uniforme stroomsnelheid door de gehele opening (A-B-C-G) gemeten van 2,5 m/s.



I.3^{1.5} Bereken het verschil in energiehogte tussen de doorgangen II en III.

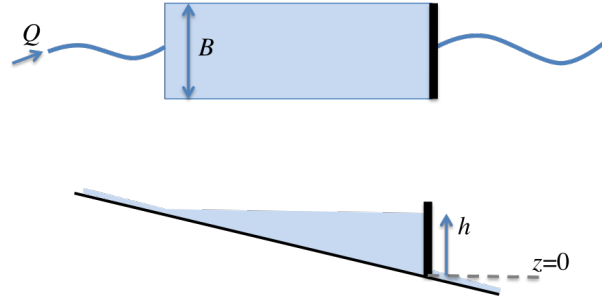
I.4^{1.5} Bereken de netto horizontale kracht op brugdeel A-B-C-D-E-F, werkende in de stroomrichting. Neem daarbij aan dat er onder het brugdeel geen contractie van stroomlijnen optreedt. Hint: bereken eerst de waterdiepte in doorgang I.

In werkelijkheid mag contractie onder het brugdeel niet verwaarloosd worden.

I.5¹ (a) Geef een verklaring voor het verschijnsel contractie. (b) Beredeneer vervolgens of de netto horizontale kracht, die in stroomrichting werkt, kleiner, gelijk of groter is dan voor de situatie zonder contractie.

Vraagstuk II (stuwmeer)

Een stuwdam wordt in een rivier geplaatst waardoor een stuwmeer ontstaat. Ter schematisatie wordt de breedte van het stuwmeer uniform verondersteld met $B = 2000\text{m}$. De helling van de bodem is uniform en gelijk aan $i_b = 10^{-3}$. De uitstroomopeningen liggen op een hoogte van $z = 0$ en hebben een netto doorstroomoppervlakte $\mu A = 40\text{ m}^2$. Het waterniveau h in het stuwmeer is uniform en bedraagt maximaal 12 m.



II.1¹ Bereken hoe groot het debiet Q maximaal mag zijn opdat de maximum waterstand in het stuwmeer niet wordt overschreden.

In een periode van droogte reduceert het bovenstroomse debiet abrupt tot nul. De uitstroomopeningen blijven echter open staan.

II.2^{1.5} Laat zien dat in deze situatie de waterstand daalt volgens de vergelijking:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\mu A i_b}{B h} \sqrt{2gh}$$

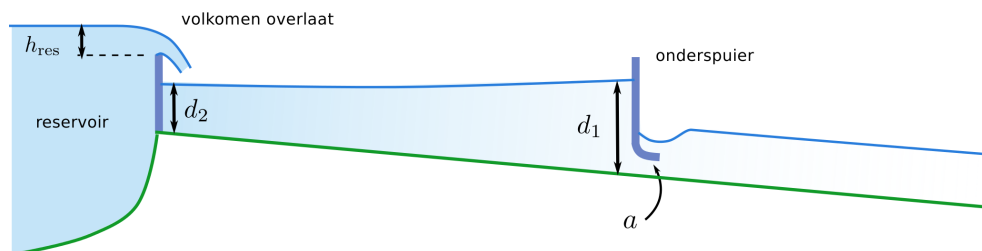
II.3^{1.5} Bepaal de leeglooptijd van het stuwmeer, uitgaande van een initiële waterstand van 12m.

Na de periode van droogte zal er weer een inkomend debiet Q zijn.

II.4¹ Herschrijf bovenstaande differentiaalvergelijking zodanig dat de invloed van het debiet Q op de waterstandsvariatie in het stuwmeer correct wordt weergegeven.

Vraagstuk III (irrigatiekanaal)

Een landbouwgebied wordt gevoed met water uit een groot reservoir. Het daartoe aangelegde irrigatiekanaal sluit op het reservoir aan via een korte volkomen overlaat over de volle breedte van het kanaal. In een deel van het kanaal kan de waterdiepte worden geregeld door middel van een in hoogte verstelbare onderspuier. We beschouwen de situatie per eenheid van breedte. Zie onderstaande figuur.



In bovenstaande (stationaire) situatie treden zowel abrupte als geleidelijke ruimtelijke veranderingen van de stroming en het vrij oppervlak op.

III.1¹ Leg uit wat de belangrijkste fysische verschillen zijn tussen deze twee verschillende typen stroming.

Het waterpeil in het reservoir ligt 75 cm boven de kruin van de overlaat. De overlaat heeft een afvoercoëfficiënt m van 1. Het kanaal heeft een bodemhelling i_b van 1×10^{-4} en een weerstandscoefficiënt c_f van 0.003.

III.2¹ Omschrijf de fysische betekenis van de begrippen ‘grensdiepte’ en ‘evenwichtsdiepte’, en bereken de bijbehorende getalswaarden voor het irrigatiekanaal.

De doorstroomhoogte a van de onderspuier bedraagt 50 cm. Benedenstrooms van de onderspuier treedt daarbij een zogenaamde ‘verdronken’ watersprong op. Verderop gelegen randvoorwaarden liggen op een zodanige afstand dat deze geen invloed hebben op de waterdiepte ter plaatse van de onderspuier.

III.3^{1,5} Bereken de waterdiepte d_1 aan de bovenstroomse zijde van de onderspuier, bereken daartoe eerst de waterdiepte bij het maximum contractiepunt van de onderspuier. Als je het antwoord op de vraag III.2 niet kon berekenen mag je voor de evenwichtsdiepte een waarde van 1,65 m aannemen.

De afstand tussen de volkomen overlaat en de onderspuier bedraagt 4 km.

III.4^{1,5} Verifieer dat voor de bijbehorende stuwkromme de benadering voor kleine afwijkingen van de eenparige toestand opgaat, en bereken vervolgens de waterdiepte d_2 in het irrigatiekanaal aan de benedenstroomse zijde van de volkomen overlaat.

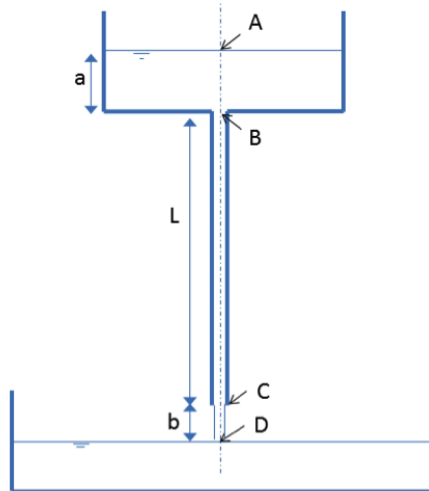
Men heft de onderspuier een stukje waardoor de doorstroomhoogte a iets groter wordt.

III.5¹ Beredeneer of als gevolg hiervan de waterdiepte d_2 toeneemt of afneemt. Je antwoord mag eventueel worden voorzien van een berekening, maar dat is niet voldoende, het gaat om de redenering.

Vraagstuk IV (verticale pijp)

Aan de onderkant van een open bak is een verticale rechte pijp, met diameter $d = 0,06\text{ m}$ en lengte $L = 2\text{ m}$, bevestigd. Hierdoor kan er water via de pijp uit de bak lopen. Vanaf het einde van de pijp bij punt C stroomt het water vrij uit en komt bij D in een open opvangbak terecht. Door de grote horizontale afmetingen van de bakken mogen de waterstanden als constant verondersteld worden. Overige gegevens: $a = b = 1\text{ m}$.

Contractieverliezen mogen in de gehele vraag verwaarloosd worden.



In eerste instantie verwaarlozen we de wandweerstand in de pijp.

IV.1¹ Hoe groot is het debiet door de pijp?

IV.2^{1.5} Schets het verloop van de energiehogte, het piëzometrisch niveau en de drukhoogte langs de lijn AC in één grafiek en geef daarin duidelijk aan waar de punten A,B,C zich bevinden. Hint: teken eerst de plaatshoogte en de energiehogte.

In werkelijkheid ondervindt de stroming in de buis wandweerstand. Het debiet bedraagt $Q = 0,016\text{ m}^3/\text{s}$. Alle overige gegevens blijven gelijk.

IV.3^{1.5} Bereken de Darcy-Weisbach coëfficiënt f van de pijp.

IV.4¹ Toon aan dat de hoofdstroming turbulent is. Waarom is de stroming dichtbij de wand desondanks toch laminair?

We beschouwen nu de vrije straal tussen C en D.

IV.5¹ Beredeneer of de diameter van de straal in D, vlak boven het wateroppervlak kleiner, gelijk of groter zal zijn dan de pijpdiameter.

Vraagstuk I

I.1 De horizontale kracht op deel ABC kan berekend worden door een krachtenevenwicht te bepalen voor ABCG: $\sum F_{hor} = F_{AG,hor} + F_{ABC,hor} = 0$. Daaruit volgt: $F_{AG,hor} = -F_{ABC,hor}$. De horizontale kracht op AG is: $F_{AG,hor} = B \frac{1}{2} \rho g (d^2 - (d - d_{AG})^2)$, met waterdiepte $d = 10$ m, doorgangshoogte $d_{AG} = 9$ m en breedte $B = 9$ m. De kracht van de brug op het water werkt is negatief en de kracht van het water op de brug is positief. De totale kracht wordt daarmee: $F_{AG,hor} = 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot 9,81 (10^2 - (10 - 9)^2) = 4,37$ MN.

I.2 De verticale kracht op deel ABC kan berekend worden door een krachtenevenwicht te bepalen voor ABCG. Er zijn drie verticale krachten: de kracht op deel CG, de gevraagde kracht op ABC en de zwaartekracht van ABCG. Het krachtenevenwicht wordt daarmee: $\sum F_{ver} = F_{CG,ver} + F_{ABC,ver} + G_{ABCG} = 0$. Daaruit volgt: $F_{ABC,ver} = -F_{CG,ver} - G_{ABCG}$. $F_{CG,ver} = p_G A_{CG} = \rho g d (L_{CG} B) = 1000 \cdot 9,8 \cdot 10 \cdot 9 = 5,29$ MN en $G_{ABCG} = -\rho g d (A_{ABCG} B) = 1000 \cdot 9,8 \cdot (3 \cdot 6 + \frac{1}{4} \pi 6^2) \cdot 9 = -4,09$ MN. De kracht van de brug werkt naar beneden en de kracht van het water op de brug is positief: $F_{ABC,ver} = 1,21$ MN.

I.3 Om het energieverlies te bepalen moeten de energiehogtes in doorsneden II en III bekend zijn. In doorsnede II is deze bekend, maar in doorsnede III niet. Daartoe moet eerst een impulsbalans toegepast worden tussen II en III. In doorsnede II is de kracht: $F_{II} = \rho u_{II} Q + \frac{1}{2} \rho g d_{II}^2 b_{CG} = 3,90$ MN, met $Q = u A_{ABCG} = 115,7$ m³/s. Let op dat we niet de breedte gemiddelde vergelijking gebruiken, aangezien de doorsnede niet uniform is. In doorsnede III is de kracht: $\rho u Q + \frac{1}{2} \rho g d_{III}^2 b_{CG}$. Gelijkstellen van de krachten geeft: $F_{II} = \rho \frac{u_{II}^2}{d_{III} b_{CG}} + \frac{1}{2} \rho g d_{III}^2 b_{CG}$, waarbij alleen d_{III} de onbekende is. Iteratie door middel van $d_{III} = \left(\frac{F_{II} \cdot d_{III} - \rho \cdot Q^2 / b_{CG}}{\frac{1}{2} \rho g b_{CG}} \right)^{1/3}$ met als beginvoorwaarde $d_{III} = d_{II}$ geeft $d_{III} = 9,75$ m.

Het energieniveau in beide doorsnedes kan bepaald worden met $H = h + \frac{u^2}{2g}$ en geeft $H_{II} = 9,92$ m en $H_{III} = 9,86$ m. Een energieverlies van $\Delta H = 0,06$ m treedt daarmee op.

I.4 Om de horizontale kracht in stroomrichting te bepalen moet de kracht in doorsnede I bepaald worden: $F_I = \rho \cdot u_I Q + \frac{1}{2} \rho g B d_I^2$, met $B = 8$ m. Daarvoor bepalen we eerst de diepte mbv de energiebalans. Hierbij nemen we aan dat er tussen I en II geen energie verloren gaat $H_I = H_{II}$. In werkelijkheid zal dit waarschijnlijk wel het geval zijn, maar hier nemen we aan dat geen contractie optreedt. In dit geval met de bodem op $z = 0$ geldt: $h_I = d_I$. Invullen van de energiebalans geeft: $d_I + \frac{Q^2}{(B d_I)^2 2g} = h_{II} + \frac{u_{II}^2}{2g}$ met d_{II} als enige onbekende. Iteratie van $d_I = -\frac{Q^2}{(B d_I)^2 2g} + h_{II} + \frac{u_{II}^2}{2g}$ met initiële waarde $d_I = h_{II}$ geeft $d_I = 9,81$ m.

De kracht in doorsnede I wordt daarmee $F_I = \rho u_I Q + \frac{1}{2} \rho g B d_I^2 = 3,95$ MN. Op vergelijkbare wijze wordt de kracht in doorsnede II bepaald: $F_{II} = 3,91$ MN. De kracht op het brugdeel is daarmee: $K = F_I - F_{II} = 0,04$ MN. Merk op dat de kracht K klein is ten opzichte van de krachten F_I en F_{II} .

I.5 Contractie van de stroming treedt op als de stroming niet in staat is om de rondingen van de brug te volgen. Er zullen zoggen/neren ontstaan. De effectieve doorstroomopening zal daarmee kleiner worden dan de daadwerkelijke opening. Een deel van de opening zal niet stroomvoerend zijn.

Doordat de effectieve doostroomopening kleiner wordt zal de snelheid onder de brug toenemen. Er zal meer energie nodig zijn om het water onder de brug door te krijgen. De energiehogte voor de brug zal daarmee toe moeten nemen. Benedenstrooms van de brug zal niets veranderen. Daarmee zal het verval over de brug toenemen, waarbij ook de kracht op de brug zal toenemen.

Vraagstuk II

II.1 Het debiet wordt bepaald mbv de Toricelli vergelijking: $Q = \mu A \sqrt{2gh} = 613 \text{ m}^3/\text{s}$.

II.2 Stel de volumebalans op: $\frac{dV}{dt} = -Q_{uit}$ met het volume $V = \frac{1}{2} B \frac{h}{i_b} h$ en $Q = \mu A \sqrt{2gh}$ geeft dit: $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} B \frac{h}{i_b} h \right) = -\mu A \sqrt{2gh}$. Herschrijven geeft: $\frac{h}{i_b} B \frac{dh}{dt} = -\mu A \sqrt{2gh}$. Dit geeft $\frac{dh}{dt} = -\frac{\mu A i_b}{B h} \sqrt{2gh}$.

II.3 Herschrijf de vergelijking tot: $\sqrt{h} dh = -\frac{\mu A i_b}{B} \sqrt{2g} dt$. Op het beginpunt $t = 0$ is de waterstand $h = 12 \text{ m}$. Aan het eind op $t = \Delta t$ is de waterstand $h_{end} = 0 \text{ m}$. Dit geeft: $\frac{2}{3} h_{end}^{3/2} = \frac{\mu A i_b}{B} \sqrt{2g} \Delta t$, oftewel: $\Delta t = \frac{2}{3} h_{end}^{3/2} \frac{B}{\mu A i_b \sqrt{2g}} = 3,62 \text{ dagen}$.

II.4 Stel de volumebalans op: $\frac{dV}{dt} = -Q_{uit} + Q_{in}$ met het volume $V = \frac{1}{2} B \frac{h}{i_b} h$ en $Q = \mu A \sqrt{2gh}$. Herschrijven geeft: $\frac{dh}{dt} = -\frac{\mu A i_b}{B h} \sqrt{2gh} + \frac{Q_{i_b}}{B h}$. Check altijd ter controle de dimensies.

Vraagstuk III

III.1 In een geleidelijk variërende stroming is het wateroppervlak nauwelijks gekromd, de stroomlijnen zijn nagenoeg recht en er heerst daarom een hydrostatische drukverdeling in de vertikale richting. Omdat stroomsnelheden niet abrupt veranderen treden er geen vertragsingsverliezen op, energieverliezen zijn slechts het gevolg van de bodemweerstand en zijn pas over langere afstand merkbaar. Bij een abrupte variërende stroming is de kromming van het wateroppervlak zo groot dat de drukverdeling niet op voorhand hydrostatisch kan worden verondersteld. Waar deze veranderingen gepaard gaan met loslating en turbulentie treden vertragsingsverliezen op. Omdat de afstand waarover dergelijke aanpassingen zich voordoen per definitie klein is speelt de bodemweerstand geen rol van betekenis.

III.2 *Grensdiepte*: de diepte in een kanaal of rivier waarvoor bij een gegeven debiet

de stroming kritisch is ($Fr = 1$). De grensdiepte heerst hier op de kruin van de korte (volkomen) overlaat. Omdat $h_{\text{res}} = E_k = \frac{3}{2}d_g = 0,75 \text{ m}$ vinden we zo $d_g = 0,50 \text{ m}$. (Je kunt ook eerst het specifieke debiet berekenen via $q = m_{\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}} h_{\text{res}} \sqrt{g \frac{2}{3} h_{\text{res}}} = 1,11 \text{ m}^2/\text{s}$, en dan vervolgens $d_g = (q^2/g)^{1/3}$, wat uiteraard op hetzelfde neer komt.) *Evenwichts-diepte*: diepte in een kanaal of rivier waarvoor bij een gegeven debiet de stroming eenparig is; de bodemweerstand is in evenwicht met de verhangkracht. Uit deze definitie volgt: $\tau_b P = \rho g A i_b$. Via $\tau_b = \rho c_f U^2$ volgt hieruit $c_f U^2 P = g A i_b$, oftewel $U^2 = g R i_b / c_f$. Voor een rechthoekig dwarsprofiel met $R \approx d$ volgt nu: $q^2/d_e^2 = g d i_b / c_f$ wat kan worden omgewerkt tot $d_e^3 = (c_f/i_b) q^2/g$, zodat uiteindelijk $d_e = (c_f/i_b)^{1/3} d_g$. Invullen van de gegeven getalswaarden en d_g , zojuist berekend, geeft tenslotte $d_e = 1,55 \text{ m}$.

III.3 We werken altijd van benedenstrooms in stroomopwaartse richting. De waterdiepte op korte afstand voorbij de onderspuier is gelijk aan de evenwichtsdiepte (geen invloed benedenstroomse randvoorwaarden). Noem de waterdiepte ter plaatse van de minimum doorstroomhoogte d_0 . Via een impulsbalans voor het vertragsgebied vinden we $\frac{1}{2} \rho g d_0^2 + \rho q^2/a = \frac{1}{2} \rho g d_e^2 + \rho q^2/d_e = 12,63 \text{ kN/m}$. Hieruit volgt $d_0 = 1,44 \text{ m}$. De bijbehorende specifieke energiehogte bedraagt $E_0 = d_0 + q^2/2g d_0^2 = 1,69 \text{ m}$. Toepassen van de energievergelijking over de onderspuier geeft $d_1 + q^2/2g d_1^2 = E_0$. Hieruit volgt voor de gevraagde diepte (subkritische tak van de oplossing nemen) $d_1 = 1,67 \text{ m}$.

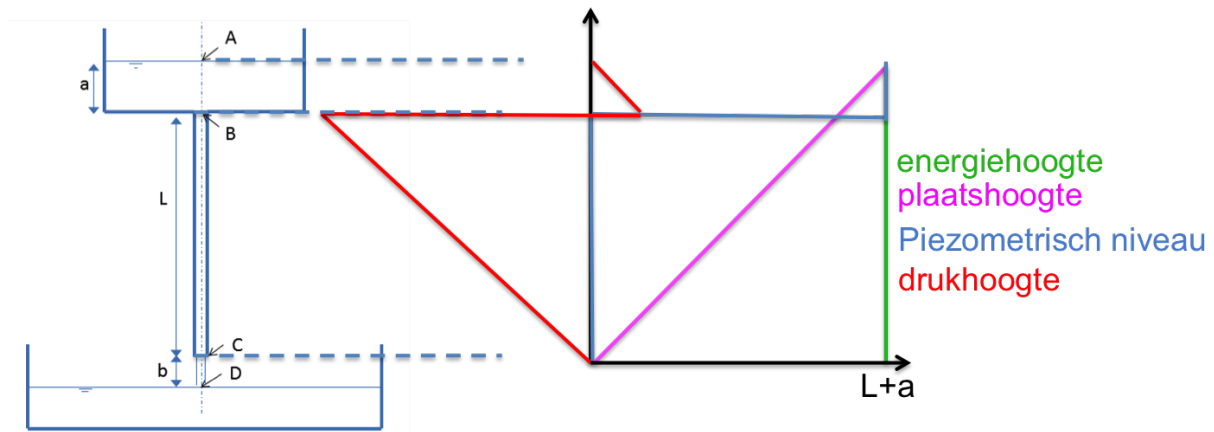
III.4 De theorie voor kleine afwijking van de eenparige toestand mag worden toegepast als de diepteverschillen die langs het traject van de stuwkromme optreden klein zijn ten opzichte van de evenwichtsdiepte. In dit geval treedt een M_1 -type stuwkromme op met een maximaal diepteverschil ten opzichte van de evenwichtsdiepte van $\Delta d_{\text{max}} = d_1 - d_e = 0,12 \text{ m}$, wat klein is ten opzichte van de evenwichtsdiepte zelf ($\Delta d_{\text{max}}/d_e \approx 8\%$). De bijbehorende aanpassingslengte bedraagt $L = (1 - i_b/c_f) d_e / 3 i_b = 5006 \text{ m}$. De waterdiepte d_2 volgt nu uit $\Delta d_2 = \Delta d_1 \exp \Delta s / L$. Met $\Delta d_1 = d_1 - d_e = 0,12 \text{ m}$, en $\Delta s = s_2 - s_1 = -4000 \text{ m}$ (let op het min-teken!) volgt nu $\Delta d_2 = 0,06 \text{ m}$, en $d_2 = d_e + \Delta d_2 = 1,61 \text{ m}$.

III.5 De waterdiepte benedenstrooms van de onderspuier verandert niet en blijft gelijk aan de evenwichtsdiepte d_e ; veranderingen doen zich alleen voor in het bovenstrooms van de onderspuier gelegen traject (flauwe bodemhelling, eenparige stroming is subkritisch, alleen benedenstroomse randvoorwaarden zijn van invloed). Het heffen van de onderspuier geeft een grotere doorstroomhoogte a en een geringere impulsoverdracht door meevoering door deze doorgang. De geringere vertraging leidt tot een afname van het energieverlies over het vertragsgebied ten opzichte van de oorspronkelijke situatie. De energiehogte ter plaatse van de minimum doorgang neemt dus af. De energiehogte $E_1 = E_0$ neemt dan ook af wat bij subkritische stroming een afname van de waterdiepte betekent (denk aan de energiekromme). De opstuwing $\Delta d_1 = d_1 - d_e$ is daardoor kleiner, met een eveneens geringere waterdiepte d_2 als gevolg (M_1 -type stuwkromme).

Vraagstuk IV

IV.1 Er zijn geen verliezen door wandwrijving. Daarmee is Toricelli toepasbaar: De energiehogte in de het bovenste vat en in de buis is overal gelijk. Bij de uitstroming is de plaatshoogte gedefinieerd als $z_C = 0$. Daar is ook de druk gelijk aan de buitensdruk, de waterdruk is daarmee gelijk aan $p_C = 0$. Dit geeft dat het piezometrisch niveau gelijk is aan $h_C = 0$ bij uitstroomopening C. De energiehogte in C is gelijk aan de energiehogte in A, oftewel $H_C = L + a = 3$ m. De energiehogte is gelijk aan $\frac{u^2}{2g} = H_C - h_c = 3$ m. Dat geeft: $u = 7,67$ m/s. Het debiet is daarmee $Q = u \frac{1}{4} \pi D^2 = 0,022$ m³/s.

IV.2 De referentiehogte is niet gegeven en mag (altijd) zelf gekozen worden. In dit geval is de uitstroomopening bij C gekozen als referentie, waar $z = 0$. Teken de plaatshoogte z . Deze lijn loopt onder een hoek van 45 graden. Teken vervolgens het energieniveau. Tussen A en C treedt geen energieverlies op aangezien wandwrijving en intreeverliezen verwaarloosd mochten worden. Het energieniveau is daarmee uniform over A-C. Het piezometrisch niveau is het verschil tussen de energiehogte en de snelheidshoogte. In de bak is de snelheid gelijk aan nul, waardoor het piezometrisch niveau gelijk is aan de energiehogte. Bij de uitstroming is de waterdruk gelijk aan nul en is ook de plaatshoogte gelijk aan nul. Daarmee is het piezometrisch niveau gelijk aan nul: $h = z + \frac{p}{\rho g}$. In de buis is de snelheid overal hetzelfde, evenals de energiehogte. Het piezometrisch niveau is daarmee ook uniform over de buis en gelijk aan nul: $h = 0$. De drukhoogte kan dan bepaald worden door de plaatshoogte van het piezometrisch niveau af te trekken: $\frac{p}{\rho g} = h - z$. Let op: de drukhoogte wordt negatief, er ontstaat daarmee onderdruk in de buis.



IV.3 Het energieverlies is een gevolg van wandwrijving en uittreeverlies. Op het formuleblad is gegeven: $dH_{wrijving} = f \frac{L}{D} \frac{u^2}{2g}$. Het uittreeverlies is gelijk aan: $dH_{uittree} = \frac{u^2}{2g}$. Daarmee wordt het totale energieverlies: $dH = dH_{wrijving} + dH_{uittree} = \left(f \frac{L}{D} + 1\right) \frac{u^2}{2g}$, met de Darcy Weisbach coefficient f als enige onbekende. Dit geeft $f = 0,025$.

IV.4 De hoofdstroming is turbulent als het Reynoldsgetal voldoende groot is: $Re = \frac{uD}{\nu} > 4500$. In dit geval vinden we $Re = \frac{uD}{\nu} = 3,3 \cdot 10^5$. Daarmee wordt ruim aan de voorwaarde voldaan.

Uit EFM, p337: "*The zone immediately adjacent to the wall is a layer of fluid that is essentially laminar because the presence of the wall dampens the cross-stream mixing and turbulent fluctuations.*". Zeer dicht bij de bodem worden fluctuaties loodrecht op de wand sterk gedempt. Daarmee wordt de impulsoverdracht loodrecht op de wand gedempt. Visceuze krachten kunnen zo domineren. De stroming is daarmee laminair zeer dicht bij de wand.

IV.5 In de vrije straal tussen C en D zal geen energieverloren gaan $H_C = H_D$. Ook is de druk gelijk $p_C = p_D$. De plaatshoogte neemt echter af $z_C > z_D$. Omdat geldt dat $H = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g}$ zal de afname in plaatshoogte tussen C en D gecompenseerd moeten worden door een toename in snelheidshoogte, en daarmee in snelheid. Oftewel: de snelheid in D is hoger dan in C. Aangezien de debieten gelijk moeten zijn, zal de doorsnede en daarmee de diameter af moeten nemen: $D_D < D_C$.

Alternatieve redenering. Tussen C en D maakt het water een vrije val, onder invloed van de zwaartekrachtsversnelling. De snelheid in D zal daarmee hoger zijn dan in C en daarmee $D_D < D_C$.

Vergelijk de waterstraal uit een kraan. Deze wordt ook steeds dunner.

Schriftelijk tentamen

Totaal aantal pagina's

pagina's

Datum en tijd

van

uur

Verantwoordelijke docent

Alleen het op tentamenpapier geschreven werk / antwoord wordt beoordeeld, tenzij onder 'aanvullende informatie' anders is aangegeven.

Tentamenvragen (in te vullen door examiner)

Totaal aantal vragen: (waarvan open vragen en multiple-choice vragen)

Max. te behalen punten:

alle vragen tellen even zwaar

vragen hebben verschillende weging (gewicht staat per vraag vermeld of wordt in overzicht gegeven.)

Gebruik hulpmiddelen en informatiebronnen tijdens tentamen (in te vullen door examiner)

Niet toegestaan:

- Smartphone of apparaat met vergelijkbare functies.
- Antwoord geschreven met potlood.
- Hulpmiddelen en/of informatiebronnen tenzij hieronder anders vermeld.

Toegestaan:

boeken aantekeningen woordenboeken dictaten

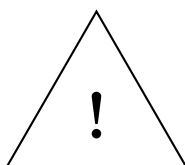
formulebladen (zie ook onder 'Aanvullende informatie') rekenmachines computers

Aanvullende informatie

Uiterlijke datum nakijken tentamen:

(in te vullen door examiner)

(de uiterlijke nakijktermijn bedraagt 15 werkdagen)

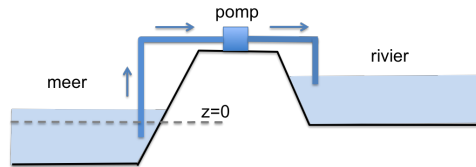


Elk vermoeden van fraude wordt
gemeld bij de Examencommissie

Mobiel UIT

Vraagstuk I (Pomp)

De waterstand in een meer wordt op peil gehouden door een pomp, die in verbinding staat met een rivier. De waterstand in het meer is gegeven door h_M en in de rivier door h_R . Bij een overschot aan water in het meer wordt water naar de rivier gepompt door een pompinstallatie en pijpen met een uniforme diameter D . De uiteinden van de pijpen liggen onder de respectievelijke waterniveau's, zie onderstaande figuur.



Verwaarloos voor de deelvragen 1-3 de wandwrijving en de intreeverliezen.

I.1^{1,5} Schets het verloop van het energieniveau en het piëzometrisch niveau voor het volledige horizontale deel van de pijp. Ga er van uit dat de waterstand in de rivier ruim hoger staat dan de waterstand in het meer, zie bovenstaande figuur. Geef in je schets duidelijk de waterstanden in de rivier en het meer aan.

De pompinstallatie moet een debiet van $3 \text{ m}^3/\text{s}$ kunnen verpompen. Ga uit van de volgende gegevens: $D = 1.2 \text{ m}$, $h_M = 0,5 \text{ m}$ en $h_R = 2,5 \text{ m}$. De horizontale pijpen en de pomp liggen 4 m boven het referentie niveau.

I.2¹ Bereken op basis van van deze gegevens het benodigde pompvermogen.

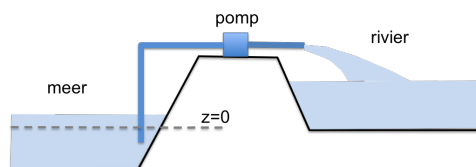
De benodigde sterkte van de pijpen hangt af van de onderdruk in de pijp.

I.3¹ Geef aan waar de onderdruk maximaal (=druk minimaal) is en bepaal deze waarde.

In werkelijkheid zal energieverlies optreden bij de instroming in de pijp.

I.4^{1,5} (a) Geef de fysische verklaring voor het optreden van intreeverliezen. (b) Bepaal het extra vermogen dat de pomp moet leveren om het intreeverlies te compenseren bij een debiet van $3 \text{ m}^3/\text{s}$. Gebruik indien nodig realistische waarden voor additionele parameters.

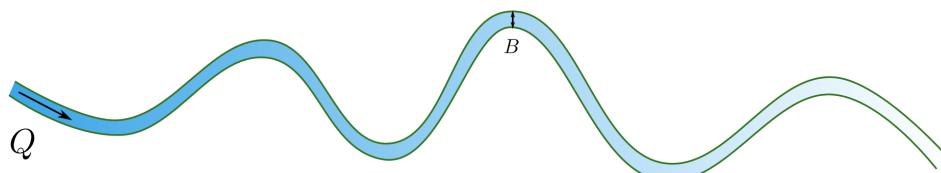
Iemand stelt voor om de verticale pijp aan de rivierzijde weg te halen om kosten te besparen, zie onderstaande figuur. Effecten van wandwrijving zijn nog steeds verwaarloosbaar.



I.5¹ Waarom leidt deze aanpassing echter tot een verlaging van de effectiviteit van de pomp? Een berekening mag, maar hoeft niet. Het gaat om de argumentatie.

Vraagstuk II (meanderende rivier)

In een sterk meanderende rivier heerst een constant debiet Q . Daarbij treedt in de bochten een zogenaamd *dwarsverhang* op. Zie onderstaande schets van de situatie.



II.1^{1,0} Geef een fysische verklaring voor het dwarsverhang. Betrek in je antwoord de onderscheidende parameters die de grootte van dit verhang bepalen.

Het dwarsprofiel van de rivier is bij benadering rechthoekig, met een constante breedte B van 85 m. Variaties van de stroomsnelheid in dwarsrichting kunnen worden verwaarloosd. In een bepaalde bocht van de rivier wordt een waterstandsverschil van 2 cm tussen de beide oevers gemeten. Deze bocht heeft een straal van 1200 m.

II.2^{1,0} Bereken uit deze gegevens de grootte van de stroomsnelheid U in de rivier.

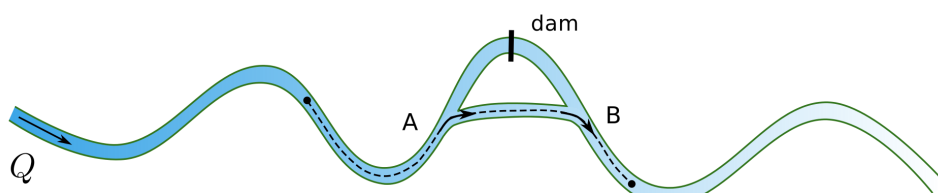
We beschouwen in het vervolg van dit vraagstuk de *langs*richting van de rivier, gebruikmakend van de theorie voor ‘geleidelijk variërende stroming’.

II.3^{1,0} Welke overwegingen en aannamen liggen ten grondslag aan deze theorie?

Het bodemverhang i_b bedraagt 2×10^{-4} en de weerstandscoefficiënt c_f bedraagt 0.003.

II.4^{1,0} Geef de definitie van het begrip evenwichtsdiepte en bereken deze voor de gegeven situatie. Gebruik $U = 1.55$ m/s als je het antwoord op vraag I.2 niet kon berekenen.

Om de bevaarbaarheid van de rivier te verbeteren snijdt men één van de bochten af door middel van een kortsluitgeul. De oorspronkelijke bocht wordt daarbij afgedamd en voert geen water meer af. Zie onderstaande figuur.



De kortsluitgeul heeft hetzelfde dwarsprofiel en weerstandscoefficiënt als de oorspronkelijke rivier, het bodemverhang is daarentegen anderhalf keer zo groot (samenhangend met de verkorting) waarbij de bodem continu verloopt. De waterstand in aansluitpunt B wordt niet beïnvloed door een benedenstrooms gelegen randvoorwaarde.

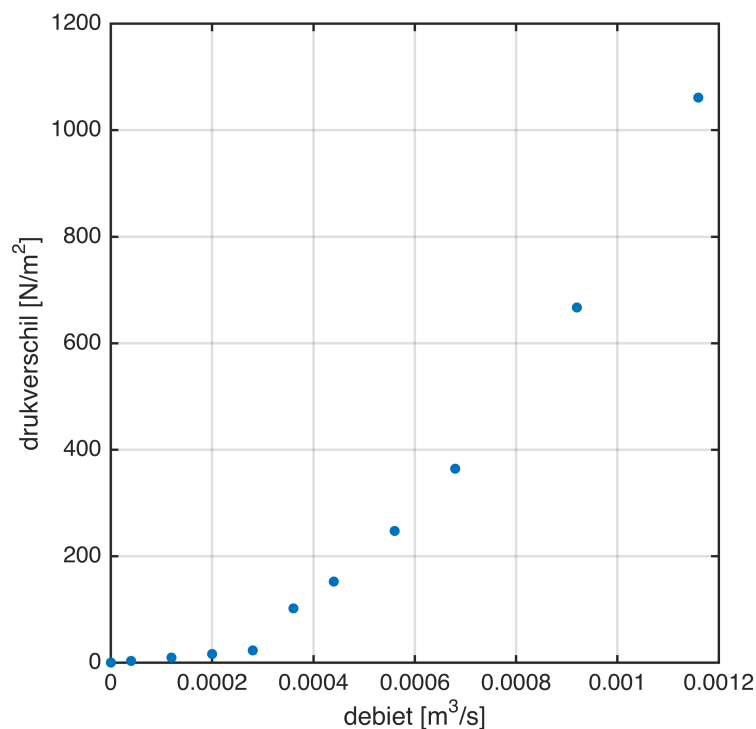
II.5^{1,0} Schets het verloop van de bodem en waterstand langs het gestippelde traject.

De lengte van de kortsluitgeul (traject A-B) bedraagt 2000 m.

II.6^{1,0} Bereken de waterdiepte in aansluitpunt A, gebruikmakend van de theorie voor kleine afwijkingen van de eenparige toestand.

Vraagstuk III (weerstand in leiding)

Een medewerker van een drinkwaterbedrijf analyseert een rechte ondergrondse pijpleiding met een lengte van $L = 200\text{ m}$ en wil op indirecte wijze uitzoeken wat de diameter van de pijpleiding is en wat de ruwheid van de pijpwand is. De onderzoeker kan bij verschillende stationaire condities van ingestelde debieten de drukval over de pijpleiding meten. Veronderstel de viscositeit en dichtheid van water bekend (zie formuleblad). Neem bovendien aan dat de pijp horizontaal ligt en dat alleen de wandwrijving er toe doet. In de tabel staan de gemeten drukvallen bij de verschillende ingestelde debieten.



Q (m³/s)	Δp (N/m²)
0,00000	0,000
0,00004	3,259
0,00012	9,778
0,00020	16,30
0,00028	22,82
0,00036	102,2
0,00044	152,6
0,00056	247,3
0,00068	364,6
0,00092	667,4
0,00116	1061

III.1^{1,0} Leg uit waarom bij lage debieten de grafiek een lineair verband te zien geeft en bij hoge debieten niet.

III.2^{1,5} Bereken uit de gegevens, behorende bij het lineaire deel van de grafiek, de diameter van de buis en laat zien dat uw redering in III.1 klopte.

Indien het u niet gelukt is de diameter van de buis te berekenen, neemt u voor het vervolg een waarde $D = 0,08\text{ m}$ aan.

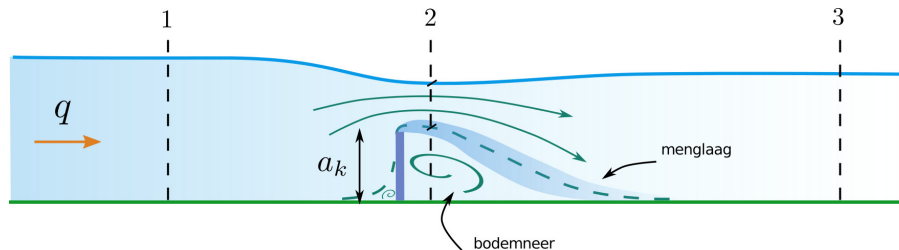
III.3^{1,0} Wat is de maximale wandschuifspanning die er volgens de gegevens uit de tabel geheerst heeft tijdens het experiment.

III.4^{1,5} Bereken uit de gegevens behorende bij de grootste debieten de ruwheidshoogte van de buiswand, onder de veronderstelling dat er hier sprake is van een hydraulisch ruwe wand.

III.5^{1,0} Reken uit vanaf welke grootte van het debiet de wand als hydraulisch ruw verondersteld mag worden. Laat zien dat de aanname bij onderdeel III.4 juist was.

Vraagstuk IV (korte overlaat)

In een drainagekanaal met een rechthoekig dwarsprofiel en horizontale bodem bevindt zich over de volle breedte een korte overlaat met een vaste kruinhoogte. We beschouwen in dit vraagstuk de situatie per eenheid van breedte. Aanvankelijk is er sprake van gestuwde afstroming met een turbulente menglaag en een bodemneer direct achter de stuw, zie onderstaande figuur.



Ter plaatse van doorgang 2 mag een hydrostatische drukverdeling worden aangenomen.

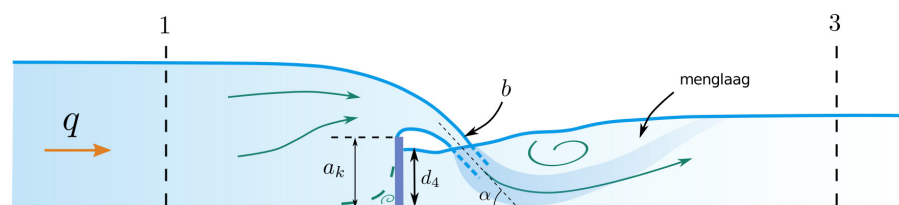
IV.1^{1,0} Leg uit waarom deze benadering hier is toegestaan.

Het specifiek debiet q bedraagt $0,30 \text{ m}^2/\text{s}$ en de waterdiepte d_3 in doorgang 3, op enige afstand benedenstrooms van de overlaat, bedraagt $0,85 \text{ m}$. De overlaat heeft een kruinhoogte a_k van $0,65 \text{ m}$ ten opzichte van het lokale bodemniveau. Slechts het deel van doorgang 2 boven de kruinhoogte is stroomvoerend.

IV.2^{1,5} Berekenen de waterdiepte d_2 in doorgang 2.

IV.3^{1,0} Berekenen de netto horizontale kracht K_H per eenheid van breedte die door het stromende water op de overlaat wordt uitgeoefend.

Men laat nu de waterstand benedenstrooms van de overlaat zakken, waarbij de waterstand bovenstrooms van de overlaat uiteindelijk niet meer verandert. Het specifiek debiet en de kruinhoogte blijven daarbij ongewijzigd. De overlaat heeft in deze situatie een afvoer-coëfficiënt gelijk aan 1.



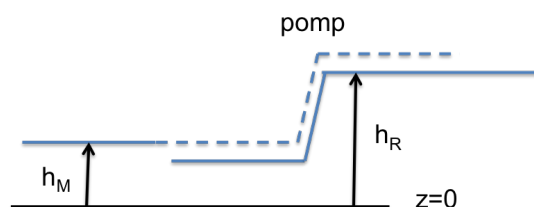
IV.4^{1,0} Bereken de waterdiepte d_1 die uiteindelijk ter plaatse van doorgang 1 bereikt wordt.

De waterdiepte d_4 direct achter de overlaat (zie figuur) bedraagt $0,50 \text{ m}$. De overstortende straal van de overlaat heeft een breedte b van $0,10 \text{ m}$ en maakt een hoek α van 45° met het horizontale vlak, zie bovenstaande figuur.

IV.5^{1,5} Bereken voor bovenstaande situatie de waterdiepte d_3 in doorgang 3 op enige afstand benedenstrooms van de overlaat.

Vraagstuk I (pomp)

I.1 In het pijpstuk voor de pomp is de energiehogte gelijk aan de energiehogte in het meer. Aangezien de snelheid in het meer verwaarloosbaar klein is geldt dat de energiehogte in het meer gelijk is aan het piëzometrisch niveau in het meer. De snelheid is constant in de buis (continuïteit en uniforme buisdiameter). Daarmee is de snelheidshogte ook uniform in de buis. Het piëzometrisch niveau kan getekend worden door de snelheidshogte van de energiehogte af te trekken. De kinetische energie wordt gedissipeerd bij de uitstroming. Het piëzometrisch niveau in de buis na de pomp is daarmee gelijk aan het waterniveau in de rivier. Het energieniveau in het pijpdeel aan de rivierzijde van de pomp kan getekend worden door de snelheidshogte (gelijk aan de snelheidshogte in de pijp aan de meerzijde) op te tellen bij het uniforme piëzometrisch niveau. De pomp zorgt voor een verhoging van het energieniveau.



I.2 Het pompvermogen wordt gegeven door $P = \rho g Q \Delta H$. Zie formuleblad voor $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ en $g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Het debiet is gegeven: $Q = 3 \text{ m}^3/\text{s}$. De te overbruggen energiehogte is het verschil tussen het energieniveau na de pomp min het energieniveau voor de pomp. Het energieniveau voor de pomp is gelijk aan het energieniveau in het meer: $H_{\text{voor}} = H_M = h_m$. Het energieniveau na de pomp is het energieniveau in de rivier plus het uittreeverlies: $H_{\text{na}} = H_R + \frac{u^2}{2g} = h_R + \frac{u^2}{2g}$. De snelheid in de pijp is gegeven door $u = \frac{Q}{0.25\pi D^2} = 2.65 \text{ m/s}$. Het te overbruggen energieverval wordt daarmee: $\Delta H = h_R - h_M + \frac{u^2}{2g} = 2.5 - 0.5 + \frac{2.65^2}{2 \cdot 9.81} = 2.36 \text{ m}$. Het pompvermogen wordt daarmee: $P = \rho g Q \Delta H = 69.4 \text{ kW}$.

I.3 De onderdruk is maximaal (de druk is minimaal) in het horizontale deel van de pijp voor de pomp. Aangezien intreeverliezen verwaarloosbaar zijn is het energieniveau in de pijp voor de pomp gelijk aan het energieniveau in het meer: $H = h_M$. In de pijp is het energieniveau tevens gegeven door $H = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g}$, met $H = 0.5 \text{ m}$, $z = 4 \text{ m}$, $u = \frac{Q}{0.25\pi D^2} = 2.65 \text{ m/s}$. Dit geeft als druk tov de luchtdruk: $p = \rho g \left(H - z - \frac{u^2}{2g} \right) = -37.8 \text{ kW}$.

I.4 (a) Intreeverliezen ontstaan doordat de stroming niet in staat is de geometrie van de pijpopening te volgen. Daardoor treedt contractie op, waarbij de stroming eerst versnelt en daarna weer vertraagt. Juist bij de vertraging treedt energieverlies op. Dit is eenvoudig te laten zien met een combinatie van een impuls- en energiebalans. (b) Het extra vermogen is gegeven door $\Delta P = \rho g Q \Delta H$, waarbij ΔH het intreeverlies representeert.

Zie formuleblad voor: $\Delta H = \left(\frac{1}{\mu} - 1\right) \frac{u^2}{2g}$. Voor μ moet een realistische waarde ingevuld worden. Realistisch is $\mu = 0.5 - 1$. Voor $\mu = 0.5$: $\Delta P = 10.5$ kW.

I.5 De effectiviteit van de pomp wordt bepaald door $P = \rho g Q \Delta H$. Door de verticale pijp aan de rivierzijde weg te halen wordt het energieniveau aan de rivierzijde sterk verhoogd. Dit moet overbrugd worden door de pomp. Vergelijk dit met een hevel.

Vraagstuk II (meanderende rivier)

II.1 In een ideale vloeistof is de versnelling van een waterdeeltje bepaald door de ruimtelijke (partiële) afgeleiden van het piëzometrisch niveau (h). Voor stationaire stroming heeft de deeltjesversnelling een component in de stroomrichting s (als de *grootte* van de snelheid verandert langs een stroomlijn) en een component in de normaalrichting n (als de *richting* van de snelheid verandert langs een stroomlijn). Deze versnellingen zijn gekoppeld aan de gradiënt van het piëzometrisch niveau in de s richting, respectievelijk de n richting. In een rivierbocht volgt de hoofdstroming de oriëntatie van de oevers en de bijbehorende stroomlijnen zijn daarom gekromd in het horizontale vlak. Deze richtingsverandering leidt tot een *dwarsverhang* dat groter is naarmate de versnelling in dwarsrichting groter is. Bepalend voor dit laatste zijn de grootte van de stroomsnelheid (U) en de kromtestraal van de rivierbocht (R).

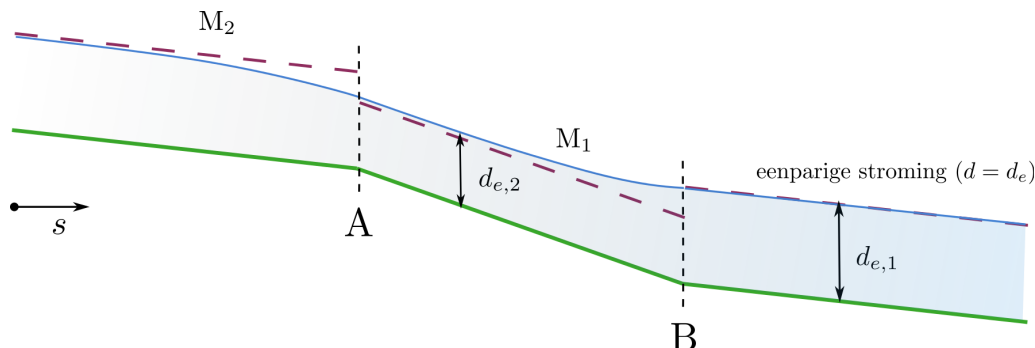
II.2 In de stationaire toestand luidt de vergelijking van Euler in de normaal-richting van een stroomlijn (zie formuleblad): $g \partial h / \partial n = -U^2 / R$, waarin R de kromtestraal van de stroomlijn is en n de richting naar het middelpunt van de bijbehorende kromtecirkel. Een willekeurige stroomlijn volgt de rivierbocht en heeft daarom een (gemiddelde) kromtestraal R van 1200 m. (Verskil in kromtestraal tussen binnen- en buitenbocht is verwaarloosbaar klein vanwege $B \ll R$.) De grootte van het dwarsverhang kan worden afgeleid via $|\partial h / \partial s| = \Delta h / B = 2.35 \times 10^{-4}$. Hieruit volgt uiteindelijk $U = \sqrt{g \Delta h R / B} = 1.66$ m/s. (Zie bijvoorbeeld ook practicumopdracht 1A: roterend vat.)

II.3 De stationaire stroming in een waterloop streeft naar een eenparige toestand, gekenmerkt door een evenwicht tussen de weerstandskracht (ten gevolge van de bodemschuifspanning) en de aandrijvende verhangkracht (ten gevolge van de zwaartekracht). Door verschillende invloeden (kunstwerken, lokale aanpassingen in het rivierbed, aangrenzende watersystemen) is dit evenwicht mogelijk niet overal aanwezig. De waterdiepte zal zich in dat geval gaan aanpassen totdat de stroming weer eenparig is. Uitgangspunt van de theorie is dat deze overgangen zich over grote afstand voltrekken, zodat de drukverdeling hydrostatisch is (rechte stroomlijnen, geen verticale versnellingen) en abrupte vertragen zich niet voordoen. Dit leidt tot een balansvergelijking voor de energiehoopte met een dissipatieterm ten gevolge van uitsluitend de bodemweerstand, de zogenaamde *verhanglijnv vergelijking*.

II.4 Evenwichtsdiepte: de waterdiepte in een waterloop (rivier, kanaal) waarbij voor een gegeven (specifiek) debiet de stroming eenparig is. De totale bodemweerstand is dan in evenwicht met de verhangkracht, met het weerstandsverhang gelijk aan het bodemverhang. Uit het voorgaande volgt: $g A i_b = c_f U^2 P$, waarin A en P respectievelijk het natte

oppervlak en de natte omtrek van de dwarsdoorgang zijn. Met $A/P = R \approx d$ (wat een goede benadering is indien, zoals hier, $B \gg d$) en de eerder berekende waarde van U volgt nu $d_e = c_f U^2 / (g i_b) = 4.24 \text{ m}$.

II.5 Zie onderstaande schets.



II.6 Langs het traject A-B is het bodemverhang anderhalf keer zo groot als langs de rest van de rivier waarmee de evenwichtsdiepte langs dit traject $d_{e,AB} = 3,96 \text{ m}$. In punt B heerst de evenwichtsdiepte d_e behorend bij het riviertraject benedenstrooms van B. Er treedt hierdoor langs A-B een M_1 -type verhanglijn op (flauwe bodemhelling, $d_B > d_{e,AB}$). De aanpassingslengte L hiervan bedraagt $L = d_{e,AB}(i_b^{-1} - c_f^{-1})/3 = 6158 \text{ m}$. Volgens de benadering voor kleine afwijkingen van de eenparige toestand geldt $d_A = d_{e,AB} + (d_B - d_{e,AB}) \exp((s_A - s_B)/L)$. Met $s_A - s_B = -2000 \text{ m}$ (let op het minteken!) en $d_B - d_{e,AB} = 0,20 \text{ m}$ volgt uiteindelijk $d_A = 3,95 \text{ m}$.

Vraagstuk III (pijpleiding)

III.1 Als de drukval veroorzaakt wordt door wandwrijving is deze evenredig met het weerstandsverhang. Dit verhang is voor een turbulente stroming evenredig met de gemiddelde snelheid in het kwadraat en voor een laminaire stroming evenredig met de snelheid. Omdat de snelheid evenredig is met het debiet, duidt een lineair verband tussen drukval en debiet op een laminaire stroming. Omdat in de grafiek het lineaire deel bij lage debieten te vinden is en omdat de drukval bij hogere debieten meer dan lineair toemeent, lijkt dit een goede verklaring.

III.2 Het verband tussen drukval en debiet volgt uit het verband tussen weerstandsverhang en snelheid. $i_w = \frac{f U^2}{8 g R}$ dus $\frac{\Delta p}{\rho g} = f \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g} = f \frac{L}{D} \frac{Q^2}{2g(\pi/4 D^2)^2}$ voor het laminaire geval kunnen we voor de Darcy-Weisbach weerstandsfactor nemen $f = \frac{64}{Re}$ met $Re = \frac{UD}{\nu}$ dan volgt $\frac{\Delta p}{Q} = \frac{128}{\pi} \frac{\nu \rho L}{D^4}$. Als we kijken naar de eerste 4 punten dan liggen die netjes op een lijn, met helling $81,5 \text{ kNs/m}^5$. Met de diameter als enige onbekende levert dit op: $D = 0,1 \text{ m}$. Met deze informatie kunnen we direct zien dat de stroming laminair is: bij $Q = 0,0002 \text{ m}^3/\text{s}$ volgt $U = 0,025 \text{ m/s}$ en $Re = 2550$. Dus de aanname dat voor kleine debieten de stroming laminair is klopt.

III.3 De maximale wandschuifspanning wordt gevonden voor de maximale drukval en dus ook bij het maximale debiet; immers de lengte en de diameter van de buis blijven

hetzelfde. $\tau_0 LP = \Delta p A$ zodat $\tau_0 = \frac{D\Delta p}{4L} = \frac{0,1 \cdot 1061}{4 \cdot 200} = 0,133 \text{ N/m}^2$.

III.4 Als we uitgaan van hydraulisch ruwe condities bij de grote debieten, dan geldt voor de weerstandsfactor $\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \left(\frac{3,7D}{k} \right)$ (Colebrook-White). Als we kijken naar het verloop van de grafiek waarin de evenredigheid met het debiet (en dus de snelheid) in het kwadraat te herkennen is, dan geldt daar het verband $\frac{\Delta p}{Q^2} = 7,89 \cdot 10^8 \frac{Ns^2}{m^8}$ op basis van het weerstandsverhang geldt voor deze relatie: $\frac{\Delta p}{Q^2} = f \frac{8L\rho}{\pi^2 D^5}$ zodat hieruit volgt dat $f = 0,0486$. Gebruikmakend van de White-Colebrook formule voor hydraulisch ruwe condities levert een relatieve ruwheid $\frac{k}{D} = 0,02$, zodat $k = 2 \text{ mm}$.

III.5 De voorwaarde voor hydraulisch ruwe condities geldt dat de stroming turbulent moet zijn en dat $k > \delta$ met $\delta = 11,6 \frac{\nu}{u^*}$ de dikte van de viskeuze sublaag. Met de inmiddels bekende waarde van de weerstandsfactor kunnen we u^* berekenen. Immers $\frac{u^*}{U} = \sqrt{f}$. Voor het debiet van $Q = 0,00028 \text{ m}^3/\text{s}$ geldt $\delta = 1,5 \text{ mm} \approx k$ maar bij $Q = 0,00036 \text{ m}^3/\text{s}$ geldt $\delta = 1,2 \text{ mm} < k$ dus ruw. Bij grotere debieten wordt de viskeuze sublaag alleen maar dunner.

Vraagstuk IV (korte overlaat)

IV.1 In het stroomvoerende deel van doorgang 2 zijn de stroomlijnen bij benadering recht waardoor in dit deel van de vertikaal een hydrostatische drukverdeling heerst. Het deel van de doorgang dat zich in het zog bevindt kenmerkt zich door de aanwezigheid van een bodemneer waarin de stroomlijnen gekromd zijn. De stroomsnelheden in deze zone zijn echter zo laag (ten opzichte van de hoofdstroom) dat de bijbehorende gradiënt van het piëzometrisch niveau ($\simeq U^2/gR$) verwaarloosbaar klein waardoor ook hier, zijn het bij benadering, de aanname van hydrostatische druk opgaat.

IV.2 Gebruik een balans voor horizontale impuls tussen doorgangen 2 en 3: $F_2 = F_3$, waarin $F_{2,3} = \frac{1}{2} \rho g d_{2,3}^2 + \rho q U_{2,3}$. Met $U_3 = q/d_3$ en $U_2 = q/(d_2 - a_k)$ geeft dit (op een constante factor ρ na): $\frac{1}{2} g d_2^2 + q^2/(d_2 - a_k) = \frac{1}{2} g d_3^2 + q^2/d_3$. Het rechterlid uit deze vergelijking kan rechtstreeks uit de gegevens berekend worden ($F_3 = 3650 \text{ N/m}$) waarna een vergelijking met één onbekende (d_2) resteert. Oplossen (grafische rekenmachine of iteratief) geeft uiteindelijk $d_3 = 0,76 \text{ m}$ (subkritische tak van de oplossing kiezen).

IV.3 De horizontale kracht K_H van het stromende water op de overlaat kan gevonden worden via een impulsbalans voor het balansgebied tussen doorgangen 1 en 3: $F_1 - K_H - F_3 = 0$ (balansgebied kiezen tussen doorgangen 1 en 2 kan ook). De impulsoverdracht in doorgang 3 volgt rechtstreeks uit het tussenresultaat van de vorige deelvraag. Voor de impulsoverdracht in doorgang 1 moeten we eerst de watediepte d_1 bepalen, via de energievergelijking tussen doorgang 1 en 2: $H_1 = H_2$. Met $U_2 = q/(d_2 - a_k)$ vinden we $H_2 = 1,137 \text{ m}$. De waterdiepte d_1 volgt vervolgens uit $d_1 + q^2/(2g d_1^2) = 1,137 \text{ m}$. Oplossen hiervan levert (subkritische tak kiezen): $d_1 = 1,13 \text{ m}$. Invullen in de uitdrukking voor de impulsoverdracht geeft vervolgens $F_1 = 6378 \text{ N/m}$ en uiteindelijk $K_H = F_1 - F_3 = 2727 \text{ N/m}$.

IV.4 De overlaat is volkomen met afvoercoëfficiënt $m = 1$ zodat $q = d_k \sqrt{g d_k}$, oftewel

$d_k = (q^2/g)^{1/3} = 0,21 \text{ m}$ (grensdiepte) en $E_k = \frac{3}{2}d_g = 0,31 \text{ m}$. De energiehoopte in doorgang voor de overlaat bedraagt nu $H_1 = a_k + E_k = 0,96 \text{ m}$. Via de uitdrukking voor de energiehoopte kan hieruit de waterdiepte in doorgang 1 berekend worden: $d_1 = 0,95 \text{ m}$.

IV.5 Beschouw het behoud van horizontale impuls in het balansgebied tussen doorgangen 4 en 3: $F_4 + F_{\text{straal}} - F_3 = 0$. Hierin is F_{straal} de door de straal meegevoerde impuls gelijk aan de massa overdracht via straal keer de *horizontale* stroomsnelheid in de straal: $\rho q \times U_{\text{straal}} \cos 45^\circ$, waarin $U_{\text{straal}} = q/b = 3,0 \text{ m/s}$. De impulsoverdracht door doorgang 4 is gegeven door $F_4 = \frac{1}{2}\rho g d_4^2$ (dichte wand, stroomsnelheid nul). De balansvergelijking kan hiermee worden omgewerkt tot: $\frac{1}{2}g d_3^2 + q^2/d_3 = \frac{1}{2}g d_4^2 + (q^2/b) \cos 45^\circ$. Het rechterlid kan rechtstreeks uit de gegevens berekend worden. Oplossen van de resulterende vergelijking voor d_3 geeft (subkritische oplossing kiezen) $d_3 = 0,59 \text{ m}$.

Technische Universiteit Delft

Faculteit Civiele Techniek en Technische Aardwetenschappen

Sectie Vloeistofmechanica

Tentamen CTB2110 / CT2140

Vloeistofmechanica / Vloeistofmechanica 2

Donderdag 29 januari 2015, 14:00 tot 17:00 uur

Bij de beoordeling van het examenwerk zal voornamelijk worden gelet op een goede systematische aanpak en een juiste toepassing van de theorie. Per deelvraag staat het maximum aantal te behalen punten vermeld. Indien bij de uitwerkingen aannames worden gedaan, dan moeten deze duidelijk worden vermeld. Geef waar nodig een beknopt commentaar en geef duidelijk aan waarom een bepaalde aanname toelaatbaar is.

Wanneer het antwoord op een subvraag in vervolgvragen nodig is, maar niet kan worden berekend, neem dan een plausibele waarde daarvoor aan in de beantwoording van de vervolgvragen.

Getalsmatige grootheden moeten van eenheden worden voorzien, in elk geval in de eindantwoorden en bij voorkeur ook in de tussenstappen.

Tijdens het tentamen mag alleen het formuleblad (wordt apart uitgedeeld) worden geraadpleegd.

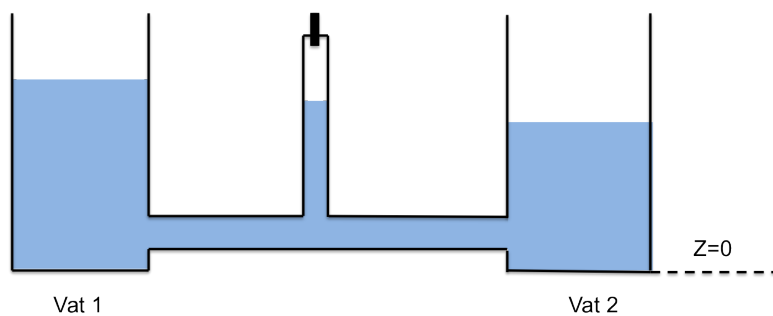
Tenzij anders gegeven geldt: massa dichtheid water $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, kinematische viscositeit water $\nu = 1.0 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, gravitatie $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

**Lever ieder vraagstuk in op een afzonderlijk antwoordformulier,
voorzien van je naam en studienummer!**

Vraagstuk I (CTB2110)

Twee identieke vaten met diameter $D_{vat} = 10\text{ m}$ zijn verbonden met een pijp (diameter: $D_{pijp} = 0.1\text{ m}$). Halverwege de pijp is een stijgbuis geplaatst met een ventiel aan het uiteinde. Op $t = 0$ is de waterstand in vat 1 veel hoger dan in vat 2. Op $t = t_1$ is de situatie bereikt met waterstanden in vat 1 en vat 2 van respectievelijk $h_1 = 3\text{ m}$ en $h_2 = 2.5\text{ m}$.

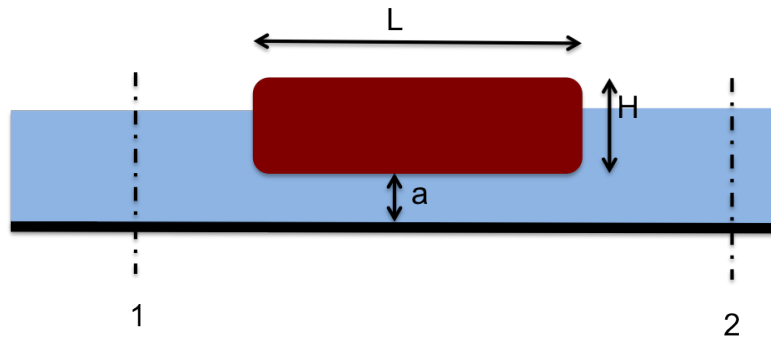
Aannames: Houd rekening met een uittreeverlies, overige verliezen mogen verwaarloosd worden. Het ventiel in de stijgbuis staat open, tenzij anders vermeld. Het volume water in de verbindingspijp en in de stijgbuis mag verwaarloosd worden ten opzichte van het volume in de vaten. Oscillaties als gevolg van traagheidseffecten mogen buiten beschouwing gelaten worden.



- 1.0** **I.1** Bepaal het waterniveau in de stijgbuis op $t = t_1$ ten opzichte van $z = 0$. Hoe wordt dit niveau genoemd?
- 1.0** **I.2** Bereken de stroomsnelheid door de pijp op $t = t_1$.
- 1.5** **I.3** Leid de uitdrukking af (in symbolen) voor de tijd die nodig is om het evenwicht te verkrijgen waarbij de waterstanden in de vaten gelijk zijn (let op: het waterniveau in vat 2 stijgt).
- 1.0** **I.4** Op $t = t_1$ wordt het ventiel dicht gezet. Bepaal de luchtdruk in de buis onder het ventiel in de eindsituatie, waarin het systeem in evenwicht is.
- 1.0** **I.5** Er wordt voorgesteld om een Venturimeter te plaatsen halverwege de pijp. Leg beknopt uit hoe een Venturimeter werkt.

Vraagstuk II (CTB2110)

Een ponton met een massa van 180.000 kg (= 180 ton), een lengte $L = 4$ m en een hoogte $H = 4$ m ligt over de volle breedte van een kanaal (breedte $B = 20$ m). Zie figuur. Aanvankelijk wordt in doorgang 1 een diepte van $d_1 = 3$ m gemeten terwijl het water stil staat: $u_1 = 0$ m/s. In alle vragen mag ervan uitgegaan worden dat het ponton horizontaal ligt.



- 1.0 **II.1** Bepaal de hoogte a onder het ponton.

In een nieuwe situatie wordt in doorsnede 1 eveneens een waterdiepte van $d_1 = 3$ m gemeten, maar nu stroomt het water van links naar rechts met een stroomsnelheid van $u_1 = 0,35$ m/s.

- 1.0 **II.2** Bereken voor de situatie met stroming de waterdruk p net onder het ponton. Gebruik in het vervolg $p = 22$ kPa als je het antwoord op deze vraag niet kunt berekenen.

- 1.5 **II.3** Laat zien dat bij deze bovenstroomse snelheid de doorstroomhoogte $a = 0,60$ m bedraagt.

- 1.0 **II.4** Bereken de horizontale kracht die nodig is om het ponton op zijn plek te houden. Maak indien nodig gebruik van de gegevens uit de vragen II.2 en II.3.

Door aangroei van mosselen treedt aan de onderkant van het ponton een schuifspanning op die evenredig is met het product van de dichtheid van water (ρ) en de stroomsnelheid onder het ponton in het kwadraat (u^2).

- 1.0 **II.5** Teken/schets de energiehogte en het piëzometrisch niveau tussen de doorgangen 1 en 2. Ga er van uit dat de doorstroomhoogte a niet is veranderd.

Vraagstuk III (CTB2110 & CT2140)

Het bepalen van de wandschuifspanning voor een stroming over een oppervlak is niet eenvoudig. Deze wordt dan ook vaak indirect gemeten, dat wil zeggen afgeleid uit ander te meten grootheden dan de schuifspanning zelf.

Een methode voor de directe meting van een schuifspanning staat in de figuur weergegeven. In de bodem van een brede stroomgoot zit een uitsparing waarin een stuk bodemoppervlak ($A = 0,1 \text{ m}^2$) bij C vast zit aan een scharnier en veren zodat de kracht F gemeten kan worden die de stroming op het oppervlak uitoefent. Het spleetje rondom het oppervlak is klein en we veronderstellen dat dit de meting niet beïnvloedt.

De diepte gemiddelde stroomsnelheid U in de goot bedraagt 1 m/s en de waterdiepte is $0,3 \text{ m}$. In eerste instantie is de bodem van de goot en het meetoppervlak glad en wordt een kracht gemeten van $F = 0,2 \text{ N}$.

- 1.0** **III.1** Geef in formulevorm aan hoe de gemeten kracht op het oppervlak onder bovenstaande condities afhangt van de over de diepte gemiddelde snelheid in de goot.

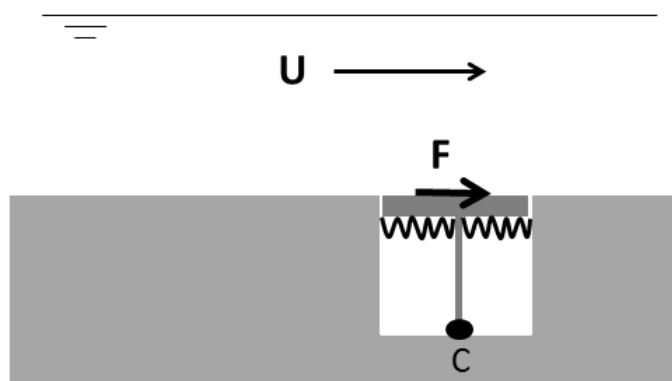
Om te onderzoeken of de ruwheid van de bodem van invloed is op de gemeten kracht, wordt de bodem beplakt met korreltjes die een typische afmeting d hebben.

- 1.5** **III.2** Hoe groot moeten de korreltjes zijn om het oppervlak onder de bovengenoemde omstandigheden als hydraulisch ruw te mogen opvatten en dus effecten te kunnen meten van de ruwheid? Geef aan waarom het van belang is dat ook de rest van de stroomgoot beplakt wordt met dezelfde korrels.

Tijdens een meting wordt bij een constante waterdiepte van $0,3 \text{ m}$ de snelheid gevarieerd en de bijbehorende kracht gemeten. De gegevens staan in bijgevoegde tabel.

- 1.5** **III.3** Zet de waarden in bijgevoegde tabel in een grafiek en bepaal hieruit de weerstandscoefficiënt. Geef een verklaring waarom bepaalde meetwaarden afwijken van je verwachting.

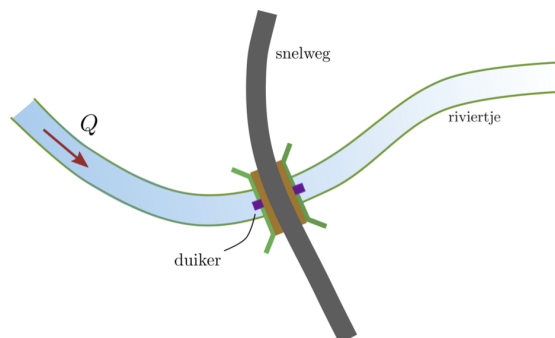
- 1.0** **III.4** Geef minimaal één andere manieren om de schuifspanning te bepalen op basis van andere informatie die in stroming te meten is, zoals bijv. snelheden en drukken en waterniveau's.



meting	$U \text{ (m/s)}$	$F \text{ (N)}$
1	0,08	0,002
2	0,18	0,011
3	0,29	0,026
4	0,50	0,074
5	0,80	0,191
6	1,00	0,305

Vraagstuk IV (CTB2110 & CT2140)

Het voorgenomen traject van een nieuwe snelweg kruist een riviertje. Men wil nagaan of deze kruising kan worden uitgevoerd middels een dam, waarbij de rivierafvoer door de dam wordt geleid via een duiker. Deze moet dan uiteraard zo ontworpen worden dat er bij hoge afvoeren van het riviertje geen wateroverlast optreedt. Zie onderstaande schets.



Het riviertje heeft een bodemverhang i_b van $5,0 \times 10^{-5}$ en een dimensieloze weerstandscoefficiënt c_f van $4,0 \times 10^{-3}$.

- 1.0** **IV.1** Omschrijf op welke wijze de aanleg van de dam plus duiker de waterstand in het riviertje kan beïnvloeden, en geef daarbij aan in welk deel van het riviertje (boven- of benedenstrooms van de duiker) deze verandering van toepassing is.

Het dwarsprofiel van het riviertje wordt rechthoekig verondersteld met een constante breedte B van 20 m. De randvoorwaarden benedenstrooms van de duiker liggen op een zodanig grote afstand dat deze geen invloed hebben op de waterstand ter plaatse van de duiker.

- 1.0** **IV.2** Bereken voor een maatgevende afvoer Q_0 van $25 \text{ m}^3/\text{s}$ de waterdiepte d_0 in het riviertje op *korte* afstand benedenstrooms van de duiker.

Het ontwerp van de duiker bestaat uit een betonnen koker met een lengte ℓ van 40 m, een breedte b van 3,0 m en een hoogte h van 1,5 m. De ruwheidshoogte k_N van de wand van de koker bedraagt 4 mm. De koker is altijd volledig gevuld met water. De bodemniveaus aan weerszijden van de duiker zijn aan elkaar gelijk.

- 1.5** **IV.3** Bereken voor de maatgevende afvoer Q_0 de waterdiepte d_1 in het riviertje op *korte* afstand bovenstrooms van de duiker. Neem aan dat de vertragsingsverliezen als gevolg van de duiker verwaarloosbaar zijn ten opzichte van het wandwrijvingsverlies in de duiker.

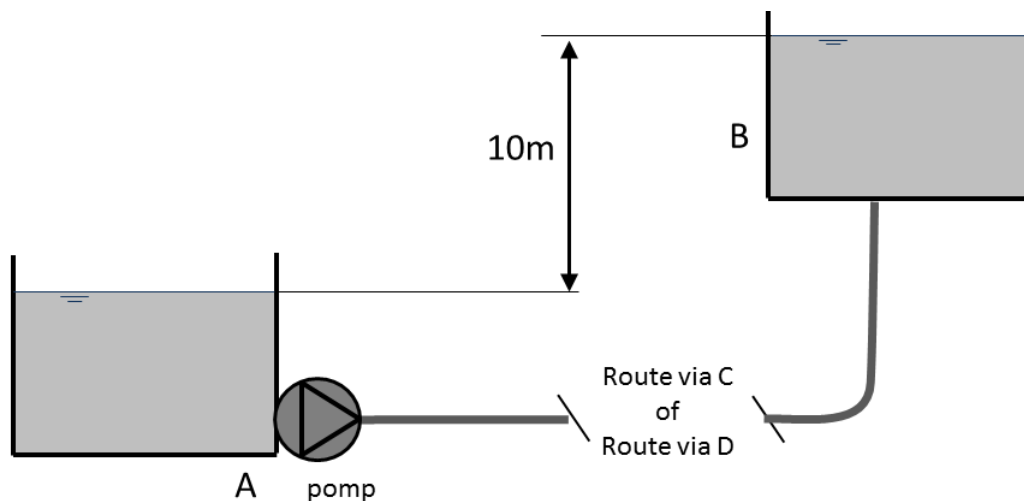
- 1.0** **IV.4** Bereken voor de situatie met een afvoer Q_0 de waterdiepte d_2 in het riviertje op een afstand s van 7,5 km bovenstrooms van de duiker, waarbij mag worden aangenomen dat de waterstanden in de rivier slechts weinig verschillen van die bij eenparige stroming.

De snelweg komt onder water te staan wanneer de waterdiepte in het riviertje nabij de duiker groter is dan 4 m.

- 1.5** **IV.5** Reken uit vanaf welk debiet (Q_1) hiervan sprake is.

Vraagstuk V (CT2140)

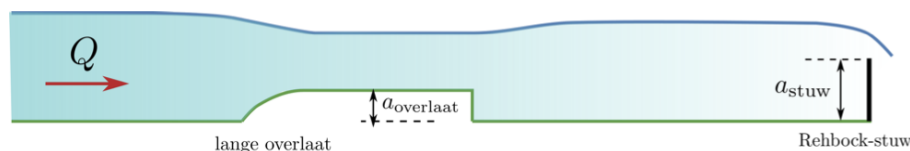
Er moet een pijpleiding worden aangelegd tussen twee plaatsen A en B maar er ligt een heuvel tussen. Er zijn twee mogelijke routes bedacht. De kortste route die over de heuveltop C, die midden in het traject ligt, heen gaat heeft een lengte van 500 m. De langere route die om de heuvel heen loopt via D, heeft een lengte van 1000 m. Het water wordt met een debiet van $0,1 \text{ m}^3/\text{s}$ bij A vanuit een reservoir met een pomp naar een iets hoger gelegen reservoir bij B verplaatst. Het waterniveau in B is 10 m hoger dan in A en het hoogste punt op de heuvel bij C ligt 25 m boven de waterspiegel in A. De keuzes van de pijpdiameter en wanddikte worden bepaald door de energieverliezen en de te verwachten drukken. Bij het ontwerp wordt uitgegaan van een pijpdiameter $D = 0,2 \text{ m}$ en een weerstandsfactor van Darcy-Weisbach $f = 0,02$.



- 1.5 V.1** Benoem de verschillende bijdragen aan het totale energie-hoogte-verlies en bereken dit verlies voor de twee verschillende routes.
- 1.5 V.2** Schets het verloop van het piezometrisch niveau en van de druk in de leiding voor beide routes, en geef daarin aan waar de plaatsen A,B,C en D liggen. De precieze vorm van de heuvel is niet belangrijk als het maar duidelijk is dat C op het hoogste punt ligt.
- 1.0 V.3** Geef aan welke problemen er met de leiding bij C kunnen ontstaan vanwege de hoge ligging?
- Uiteindelijk wordt de route via D verkozen.
- 1.0 V.4** Welk pompvermogen is er nodig om het bovengenoemde debiet van $0,1 \text{ m}^3/\text{s}$ te realiseren?
- 1.0 V.5** Geef aan door welke maatregel het benodigde pompvermogen eenvoudig te halveren is zonder de route aan te passen. Laat dit aan de hand van een berekening zien.

Vraagstuk VI (CT2140)

Beschouw een horizontale stroomgoot met een constante breedte B . Halverwege de goot bevindt zich een lange overlaat. Het debiet Q in de goot is constant en de waterstand wordt geregeld met een Rehbock-stuw aan het benedenstroomse uiteinde van de goot. Zie onderstaande figuur.



Stroomgoot met lange overlaat

- 1.0 VI.1** Wat is, hydraulisch gezien, het bepalende kenmerk waaraan de lange overlaat zijn naam ontleent?

De breedte B van de stroomgoot bedraagt 35 cm. De Rehbock-stuw heeft een afvoercoëfficiënt m van 1,05. Op de kruin van de Rehbock-stuw meet men een waterdiepte d_k van 8 cm.

- 1.0 VI.2** Bereken het debiet Q in de goot. Gebruik in het vervolg $Q = 0,020 \text{ m}^3/\text{s}$ als je het antwoord op deze vraag niet kunt berekenen.

De lange overlaat heeft een kruinhoogte a_{overlaat} van 10 cm. Aanvankelijk bedraagt de kruinhoogte van de Rehbock-stuw (a_{stuw}), eveneens 10 cm.

- 1.0 VI.3** Bereken de waterdiepte op de kruin van de lange overlaat voor het eerder berekende debiet Q . Ga er hier en in het vervolg vanuit dat bij de in de goot optredende energieverliezen de bodemweerstand geen rol speelt.

- 1.0 VI.4** Bereken de bijbehorende horizontale kracht K_H die door het stromende water op de lange overlaat wordt uitgeoefend.

Men laat nu de Rehbock-stuw zakken totdat aan de benedenstroomse zijde van de lange overlaat een watersprong optreedt. De kruinhoogte (a_{stuw}) van de Rehbock-stuw bedraagt op dat moment 5 cm. Alle overige gegevens blijven ongewijzigd.

- 1.5 VI.5** Bereken de hoogte van de optredende watersprong (dat wil zeggen, het onderlinge verschil tussen de waterdiepten rondom de sprong).

Met laat vervolgens de Rehbock-stuw helemaal zakken ($a_{\text{stuw}} = 0$). Er is daarbij sprake van een zogenaamde 'vrije afstroming'. Ook hier blijven alle overige gegevens ongewijzigd.

- 1.0 VI.6** Hoe groot is in deze situatie de waterdiepte aan de bovenstroomse zijde van de lange overlaat?

Vraagstuk I

I.1 De vaten zijn groot ten op zichte van de pijp. Daarmee mag aangenomen worden dat de snelheid in de vaten gelijk is aan nul. Er treedt alleen uittreeverlies op. De energiehoogtes in Vat 1 en de pijp zijn gelijk. Het verschil in energiehoogte tussen Vat 1 en Vat 2 wordt gedissipeerd net na de uitstroom van de pijp in Vat 2. Het piëzometrisch niveau in de pijp is daarmee gelijk aan het piëzometrisch niveau in Vat 2: $h = 2.5\text{m}$. De stijghoogte in de buis representeert dit piëzometrisch niveau.

I.2 De snelheidshoogte in de pijp is het verschil tussen de waterstanden tussen Vat 1 en Vat 2. Daarmee volgt de snelheid: $u = \sqrt{2g\Delta h} = 3,13\text{m/s}$.

I.3 Stel een massabalans op voor de twee vaten: $\frac{dV_1}{dt} = -Q$ en $\frac{dV_2}{dt} = +Q$. Uitgaan van gelijke oppervlaktes geeft: $A_{vat}\frac{dh_1}{dt} = -Q$ en $A_{vat}\frac{dh_2}{dt} = +Q$. Het debiet wordt bepaald door het waterstandsverschil $Q = A_{pijp}\sqrt{2g(h_1 - h_2)}$. We kunnen daarmee de differentiaalvergelijking voor het waterstandsverschil bepalen door de massabalansen van elkaar af te trekken en de definitie voor het debiet in te vullen: $A_{vat}\frac{dh_1}{dt} - A_{vat}\frac{dh_2}{dt} = \frac{d\Delta h}{dt} = -2Q = -2A_{pijp}\sqrt{2g(h_1 - h_2)}$. Herschrijven geeft: $\frac{d\Delta h}{dt} = -2\frac{A_{pijp}}{A_{vat}}\sqrt{2g\Delta h}$. Om de tijdschaal te bepalen wordt de vergelijking herschreven tot: $\left(\frac{1}{\sqrt{\Delta h}}\right)d\Delta h = \left(-2\frac{A_{pijp}}{A_{vat}}\sqrt{2g}\right)dt$. Als we tijdstip t_2 definiëren als het tijdstip waarop de situatie in evenwicht is dan geeft integratie: $2(\sqrt{\Delta h_2} - \sqrt{\Delta h_1}) = \left(-2\frac{A_{pijp}}{A_{vat}}\sqrt{2g}\right)(t_2 - t_1)$. Uitgaande van $\Delta h_2 = 0$ en $\Delta t = t_2 - t_1$, volgt: $\Delta t = \frac{A_{vat}}{A_{pijp}}\frac{\sqrt{\Delta h_1}}{\sqrt{2g}}$. Check: tijd neemt toe voor groter initieel hoogteverschil, grotere vatdiameter en kleinere pijpdiameter.

I.4 In de eindsituatie zijn de waterstanden gelijk: $h_1 = h_2 = 2.75\text{m}$. Er is echter geen lucht ontsnapt uit de buis. Bovendien mag de lucht als onsamendrukbaar beschouwd worden. Daarmee is de waterstand in de buis onveranderd: $h_{buis} = 2.5\text{m}$. De luchtdruk moet daarmee het verschil in waterstand compenseren. De overdruk in de buis is daarmee: $\Delta p_{lucht} = \rho g \Delta h = 1000 * 9.8 * 0.25 = 2450\text{ Pa}$. Deze druk komt bovenop de atmosferische druk.

I.5 Een Venturimeter bestaat uit een versmalling van een pijp met een stijghoogtemeter voor de versmalling en ter plaatse van de versmalling. Door de versmalling zal de snelheid in de versmalling hoger zijn dan ervoor. Het verschil in piëzometrisch niveau, de diameters en de vergelijking voor energiebehoud geven vervolgens het debiet door de pijp.

Vraagstuk II

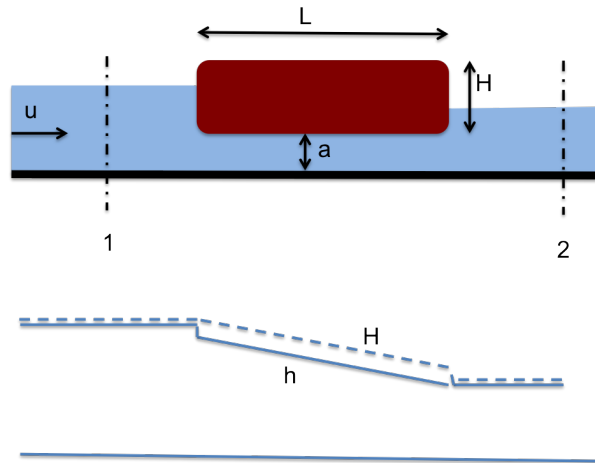
II.1 De massa van het ponton bedraagt 180.000 kg. Dit moet overeenkomen met de massa van het weggedrukte water. Het volume van het weggedrukte water is daarmee: $V = m/\rho_w = 180.000/1000 = 180\text{m}^3$. Het ponton ligt daarmee over een diepte van $V/(LB) = 180/(20 * 4) = 2,25\text{m}$ in het water. Bij een waterdiepte van 3m, volgt: $a = 3 - 2.25 = 0.75\text{m}$.

II.2 De druk net onder het ponton moet groot genoeg zijn om het ponton te dragen. De druk net onder het ponton bedraagt daarmee: $p = (mg)/(LB) = 22.050\text{Pa}$.

II.3 De bovenstroomse waterstand en snelheid zijn gegeven $d_1 = 3\text{m}$ en $u_1 = 0,35\text{m/s}$. Dit geeft een specifiek debiet van $q = 1,05\text{m}^2/\text{s}$. Om de doorgang te bepalen wordt gebruik gemaakt van energiebehoud tussen doorgang 1 en de doorgang onder het ponton: $H_1 = H_{ponton} = h_1 + \frac{u_1^2}{2g} = 3 + \frac{0.35^2}{2*9.8} = 3,006\text{m}$. Het piëzometrisch niveau aan de onderkant van het ponton is gelijk aan $h_{ponton} = a + \frac{p}{\rho g}$. De druk direct onder het ponton moet gelijk zijn aan $p = F/A = mg/(LB) = 22.050\text{Pa}$. De snelheidshoogte is gelijk aan $\frac{q^2}{a^2 2g}$. Daarmee is de energiehogte onder het ponton gegeven door: $H_p = a + \frac{p}{\rho g} + \frac{q^2}{a^2 2g}$. Invullen van $a = 0,6\text{m}$ geeft $H_p = H_1$.

II.4 Om de krachten op het ponton te berekenen moet de waterstand benedenstrooms berekend worden. Aangezien energie wordt gedissipeerd achter het ponton, wordt een impulsbalans toegepast tussen de doorsnede net achter het ponton ($p+$) en doorsnede 2. De kracht per eenheid van breedte op doorsnede $p+$ is $\frac{1}{2}\rho g d_{p+}^2 + \rho a u_{p+}^2$. Let op: het water stroomt niet over de volle diepte, maar alleen over doorsnede a . De kracht per breedte in doorsnede 2 is gelijk aan: $\frac{1}{2}\rho g d_2^2 + \rho d_2 u_2^2$. Gelijkstellen geeft: $\frac{1}{2}\rho g (d_2^2 - d_{p+}^2) = \rho \left(a \frac{q^2}{a} - d_2 \frac{q^2}{d_2} \right)$. Het piëzometrisch niveau op $p+$ is gegeven door $d_{p+} = a + \frac{p}{\rho g} = 0,6 + 2,25 = 2,85\text{m}$. Het specifiek debiet is gegeven door $q = u_1 d_1 = 1,05\text{m}^2/\text{s}$. Invullen geeft: $d_2 = 2,90\text{m}$. De kracht op de het ponton wordt vervolgens bepaald worden door de impulsbalans tussen doorgang 1 en 2: $F_{ponton} = F_1 - F_2 = \frac{1}{2}\rho g (d_1^2 - d_2^2) + \rho q^2 \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) = 2,82\text{ kN}$.

II.5 Benedenstrooms is het piëzometrisch niveau bijna gelijk aan het energieniveau, aangezien de snelheid gering is. Net achter het ponton treedt energieverlies op vanwege de verwijding. Onder het ponton neemt het energieniveau af in stroomafwaartse richting vanwege bodemwrijving. De snelheid blijft uniform vanwege de gelijke doorstroomhoogte, daarmee loopt het piëzometrisch niveau parallel aan het energieniveau. Bovenstrooms van het ponton is het piëzometrisch niveau bijna gelijk aan het energie niveau, vanwege de relatief lage snelheid.

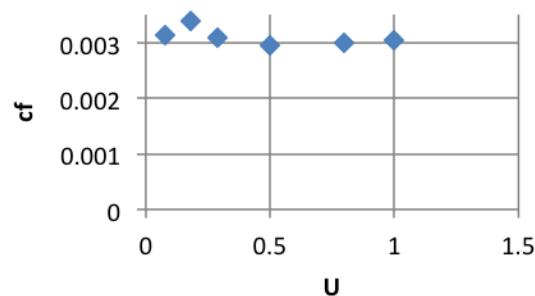


Vraagstuk III

III.1 De afhankelijkheid van de snelheid wordt bepaald door het al dan niet turbulent zijn van de stroming. Met een Reynoldsgetal van $Re = UL/\nu = 300.000$ mag geconcludeerd worden dat de stroming turbulent is zodat geldt: $F = A\tau = A\rho c_f U^2$.

III.2 De ruwheid van de wand is van invloed op de stroming zodra de ruwheidshoogte veel groter is dan de dikte van de viskeuze sub-laag. Deze laatste wordt beschreven met $\delta = 11,6\nu/u^*$. Omdat de gemeten kracht bekend is kunnen we de frictie-snelheid halen uit $F = \tau A = \rho (u^*)^2 A$, zodat volgt $u^* = 0,045$ m/s en $\delta = 0,26$ mm. De korrels moeten dus veel groter zijn dan deze waarde, zeg 2 mm. Om de effecten van de ruwheid goed te kunnen meten moet de grenslaag zich goed hebben kunnen ontwikkelen en daar is een grote lengte voor nodig waarover de ruwheid uniform is.

III.3 Omdat bij onderdeel 1 geconstateerd is dat de kracht evenredig is met U^2 is het handig om deze als functie van de kracht in een grafiek uit te zetten. De helling van de lijn waarop de punten zouden moeten liggen is dan gelijk aan $\frac{\Delta F}{\Delta U^2} = A\rho c_f$. Er kan ook een grafiek gemaakt worden waarin de voor iedere snelheid berekende waarde van c_f uitgezet wordt tegen de snelheid.



Hierin is te zien dat de waarde van c_f voor kleinere snelheden iets groter wordt en de curve wat onregelmatiger. Bij kleine snelheden zijn de krachten klein en dus moeilijker te meten. Bovendien komen we bij lage snelheden in de buurt van het hydraulisch gladde

regime waar de waarde van c_f toeneemt.

III.4 De schuifspanning kan ook gemeten worden door te kijken naar het weerstandsverhang. Dit verhang is immers in balans met de bodemschuifspanning: $\rho g h i_w = \tau$. Door het verticale profiel van de horizontale snelheid te meten en in een grafiek de snelheid uit te zetten tegen de logaritme van de afstand tot de bodem wordt een lijn gevonden waarvan de helling gelijk is aan u^*/κ . Hiermee is ook de schuifspanning bekend.

Vraagstuk IV

IV.1 De versnelling en vervolgens weer vertraging van het stromende water rondom de duiker zorgt voor een verlies aan energiehogte in benedenstroomse richting en een bijbehorende stijging van het piëzometrisch niveau in bovenstroomse richting. Het riviertje heeft een flauwe bodemhelling (want $i_b < c_f$). Deze lokale afwijking van de eenparige toestand zal zich dus in bovenstroomse richting manifesteren in de vorm van een stuwkromme. Benedenstrooms van de duiker zullen er geen veranderingen van de waterstand optreden.

IV.2 Benedenstrooms van de duiker heerst de *evenwichtsdiepte* $d_e = (c_f q^2 / i_b g)^{1/3}$ (flauwe bodemhelling, geen invloed benedenstroomse rvw). Het specifiek debiet $q = Q_0/B = 1,25 \text{ m}^2/\text{s}$. Met de gegeven waarden van c_f en i_b volgt nu $d_0 = d_e = 2,34 \text{ m}$.

IV.3 Gebruik de energievergelijking: $H_1 - \Delta H_w = H_0$, waarin H_1 de energiehogte is aan de bovenstroomse zijde van de duiker, H_0 die aan de benedenstroomse zijde en ΔH_w het weerstandsverlies gegeven door $\Delta H_w = c_{f,d} \frac{\ell}{R} \frac{U_d^2}{g}$. Het dwarsprofiel van de duiker heeft een oppervlak $A = bh = 4,5 \text{ m}^2$ en hydraulische straal $R = \frac{1}{2} A / (b + h) = 0,5 \text{ m}$. Met $k = 4 \text{ mm}$ volgt hieruit $c_{f,d} = 0,003$ (White-Colebrook). De stroomsnelheid U_d in de duiker bedraagt $U_d = Q_0/A = 5,56 \text{ m/s}$ zodat uiteindelijk een weerstandsverval ΔH_w van $0,75 \text{ m}$ resulteert. Met de lokale bodemhoogte als referentieniveau is de energiehogte H_0 gelijk aan $d_0 + U_0^2/2g = d_0 + Q_0^2/(2gd_0^2B^2) = 2,35 \text{ m}$ zodat $H_1 = H_0 + \Delta H_w = 3,10 \text{ m}$. Via $H_1 = d_1 + Q_0^2/(2gd_1^2B^2)$ volgt uiteindelijk een waterdiepte d_1 van $3,09 \text{ m}$. (Merk op dat in het riviertje de snelheidshogte verwaarloosbaar klein is ten opzichte van de waterdiepte, de benadering $d_{0,1} \approx H_{0,1}$ is eventueel gerechtvaardigd.)

IV.4 Oplossing verhanglijnvergelijking voor kleine afwijkingen van de eenparige toestand: $d(s) = d_e + (d(s_0) - d_e) \exp(-(s_0 - s)/L)$. Hierin is s_0 de positie van de randvoorwaarde (de duiker) en $s_0 - s = 7500 \text{ m}$. De aanpassingslengte L is gegeven door $L = (1/i_b - 1/c_f) d_e/3 = 15.377 \text{ m}$. Met $d(s_0) = d_1 = 3,09 \text{ m}$ en de eerder berekende waarde van $d_e (=d_0$ uit vraag IV.2) volgt nu $d(s) = 2,80 \text{ m}$.

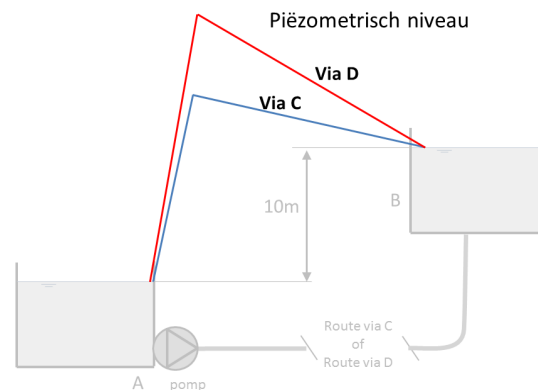
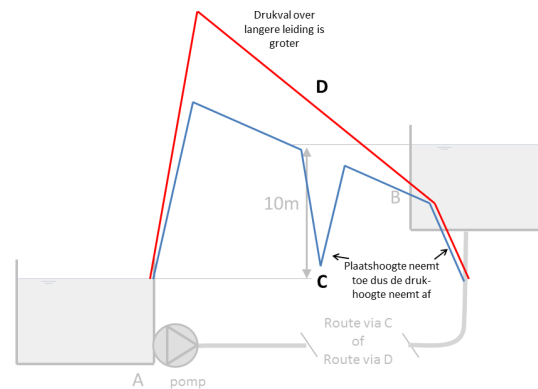
IV.5 Als de afvoer toeneemt neemt niet alleen het weerstandsverval over de duiker toe maar ook de benedenstroomse waterdiepte d_0 , deze is immers gelijk aan de evenwichtsdiepte welke ook afhankelijk is van het debiet. Toepassen van de energievergelijking geeft nu $d_1 + U_1^2/2g - c_{f,d} \frac{\ell}{R} \frac{U_d^2}{2g} = d_e + U_e^2/2g$. (Vanwege de eerder genoemde reden kunnen de termen met de snelheidshogte hierin verwaarloosd worden, maar voor de volledigheid zullen ze hier worden meegenomen.) Ga zelf na dat het rechterlid kan worden geschreven

als $d_e \left(1 + \frac{1}{2} \frac{i_b}{c_f}\right)$. Substitutie van $U_d = Q_1/A$ en de gebruikelijk uitdrukking voor d_e geeft $d_1 = c_{f,d} \frac{\ell}{R} \frac{Q_1^2}{2gA^2} + (c_f Q_1^2 / g B^2 i_b)^{1/3} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{i_b}{c_f}\right) - Q^2 / (2g B^2 d_1^2) = 4 \text{ m}$. Deze vergelijking voor Q_1 kan worden opgelost (grafische rekenmachine of iteratief) met als resultaat $Q_1 = 32,0 \text{ m}^3/\text{s}$. De bijbehorende waterdiepte $d_0 = d_e$ bedraagt dan 2,73 m. (Iteratief: reken eerst het debiet Q_1 uit voor $d_0 = d_e = 4 \text{ m}$. Bepaal nu, via de methode van vraag IV.3 de waterdiepte d_1 , deze is dan groter dan 4 m. Trek het verschil af van de beginschatting van d_e en herhaal de procedue, totdat het antwoord Q_1 niet meer noemenswaardig verandert.)

Vraagstuk V

V.1 De verliezen bestaan uit in- en uittree-verliezen en als gevolg van de leidingweerstand, eventueel ook in de pomp, maar daar zijn geen gegevens van. Het uittreeverlies bedraagt: $\Delta H_u = U^2/2g$, het intreeverlies is een deel daarvan afhankelijk van de contractie. Uit de gegevens is via $U = Q/A$ te halen dat $U = 3,18 \text{ m/s}$. Hiermee volgt voor het uittreeverlies $\Delta H_u = 0,52 \text{ m}$. Voor het weerstandsverlies geldt $\Delta H_w = f \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g}$, zodat met de gegevens voor het traject langs C geldt $\Delta H_{wC} = 25,8 \text{ m}$ en $\Delta H_{wD} = 51,6 \text{ m}$.

V.2 Zie figuur.



V.3 Door de hoge ligging is de druk in C laag en kan deze onder de atmosferische druk komen te liggen. Hierdoor kan de pijpleiding in elkaar gedrukt worden, of wanneer de onderdruk te groot wordt treedt er cavitatie op, dwz de vloeistof gaat over in dampvorm.

V.4 Voor het pompvermogen geldt: $P_p = \rho g \Delta H Q$. Nu moet ook het hoogteverschil tussen de reservoirs meegenomen worden zodat voor de route langs D geeft dit: $P_p = 61$ kW.

V.5 Het is het eenvoudigst om de diameter van de pijp te vergroten. Wanneer het debiet constant gehouden wordt neemt ook nog eens de snelheid af waardoor het verlies nog sterker afneemt. Het vermogen is evenredig met $1/D^5$, dus als de diameter met een factor 1,15 vergroot wordt kan bij gelijkblijvend debiet het vermogen gehalveerd worden.

Als alleen de snelheid verlaagd wordt neemt het debiet af en wordt er te weinig water geleverd.

Vraagstuk VI

VI.1 Een lange overlaat is lang genoeg om de stroomlijnen ter plaatse van de kruin een recht, horizontaal verloop te laten aannemen. De drukverdeling in het stromende water is ter plaatse van de kruin zodoende hydrostatisch. (Van deze eigenschap maken we dankbaar gebruik bij het toepassen van de energie- en impulsbalans in situaties met een lange overlaat.)

VI.2 Rehbock-stuw: volkomen overlaat, afvoer $q = m d_k \sqrt{g d_k}$. Invullen van $d_k = 8$ cm geeft $q = 0,074 \text{ m}^2/\text{s}$ en $Q = Bq = 0,026 \text{ m}^3/\text{s}$.

VI.3 De berekening verloopt in twee stappen: 1) bereken via de energievergelijking de waterdiepte d_0 benedenstrooms van de lange overlaat / bovenstrooms van de Rehbock-stuw; 2) bereken vervolgens via een impulsbalans de waterdiepte op de kruin van de lange overlaat. Eerste stap: specifieke energiehogte voor Rehbock-stuw: $E_0 = d_0 + u_0^2/2g = a_{\text{stuw}} + \frac{3}{2}d_k = 0,22 \text{ m}$. Uit deze vergelijking volgt $d_0 = 0,21 \text{ m}$. Stap twee: gebruik de balansvergelijking voor horizontale impuls om de diepte d_0 te relateren aan de diepte d_1 op de kruin van de lange overlaat: $f_0 = \frac{1}{2}\rho g d_0^2 + \rho q^2/d_0 = 250,0 \text{ N/m}$. Via $f_0 = \frac{1}{2}\rho g (d_1 + a_{\text{overlaat}})^2 + \rho q^2/d_1$ volgt tenslotte de waterdiepte $d_1 = 0,10 \text{ m}$ (grafische rekenmachine of iteratie).

VI.4 Bereken eerst de waterdiepte d_2 bovenstrooms van de lange overlaat via de energievergelijking: $H_2 = d_2 + \frac{1}{2}u_2^2/g = a_{\text{overlaat}} + d_1 + \frac{1}{2}u_1^2/g = 0,23 \text{ m}$. Met $u_{1,2} = q/d_{1,2}$ volgt hieruit $d_2 = 0,22 \text{ m}$. De horizontale kracht op de lange overlaat volgt nu uit de balans voor horizontale impuls tussen de doorgangen voor en achter de overlaat: $K_H = F_2 - F_0$, waarin $F_{0,2} = \rho B (\frac{1}{2}g d_{0,2}^2 + q^2/d_{0,2})$. Invullen van de eerder berekende waarden van d_0 en d_2 geeft uiteindelijk $K_H = 5,83 \text{ N}$.

VI.5 De waterdiepte na de sprong (d_3) volgt uit de stand van de overlaat: $d_3 + q^2/(2g d_3^2) = a_{\text{stuw}} + \frac{3}{2}d_k = 17 \text{ cm}$ (merk op dat de waterdiepte op de kruin van de Rehbock-stuw vanwege gelijkblijvend debiet niet veranderd is). Hieruit volgt $d_3 = 0,16 \text{ m}$. De waterdiepte vóór de watersprong (d_4) is de geconjugeerde van d_3 , te berekenen uit een impulsverge-

lijking: $\frac{1}{2}gd_3^2 + q^2/d_3 = \frac{1}{2}d_4^2 + q^2/d_4$ (rechterlid na invulling van d_4 bekend, superkritische oplossing voor d_4 kiezen). Hieruit volgt $d_4 = 0,022$ m, en de spronghoogte $\Delta d = d_3 - d_4 = 0,14$ m.

VI.6 Vrije afstroming: de waterdiepte op de lange overlaat is gelijk aan de grensdiepte d_g . Deze is gelijk aan de eerder gegeven waarde voor de diepte op de kruin van de Rehbock-stuw (ga zelf na waarom): $d_g = 0,08$ m. Energiehoogte op de lange overlaat is nu $H = a_{\text{overlaat}} + \frac{3}{2}d_g = 0,22$ m (t.o.v. bodem goot). De waterdiepte voor de overlaat behorend bij deze energiehoogte bedraagt 0,21 m (zelfde antwoord als voor d_0 in tussenstap vraag VI.3).

Technische Universiteit Delft

Faculteit Civiele Techniek en Technische Aardwetenschappen

Sectie Vloeistofmechanica

Tentamen CTB2110 / CT2140

Vloeistofmechanica / Vloeistofmechanica 2

Woensdag 5 november 2014, 14:00 tot 17:00 uur

Bij de beoordeling van het examenwerk zal voornamelijk worden gelet op een goede systematische aanpak en een juiste toepassing van de theorie. Per deelvraag staat het maximum aantal te behalen punten vermeld. Indien bij de uitwerkingen aannames worden gedaan, dan moeten deze duidelijk worden vermeld. Geef waar nodig een beknopt commentaar en geef duidelijk aan waarom een bepaalde aanname toelaatbaar is.

Wanneer het antwoord op een subvraag in vervolgvragen nodig is, maar niet kan worden berekend, neem dan een plausibele waarde daarvoor aan in de beantwoording van de vervolgvragen.

Getalsmatige grootheden moeten van eenheden worden voorzien, in elk geval in de eindantwoorden en bij voorkeur ook in de tussenstappen.

Tijdens het tentamen mag alleen het formuleblad (wordt apart uitgedeeld) worden geraadpleegd.

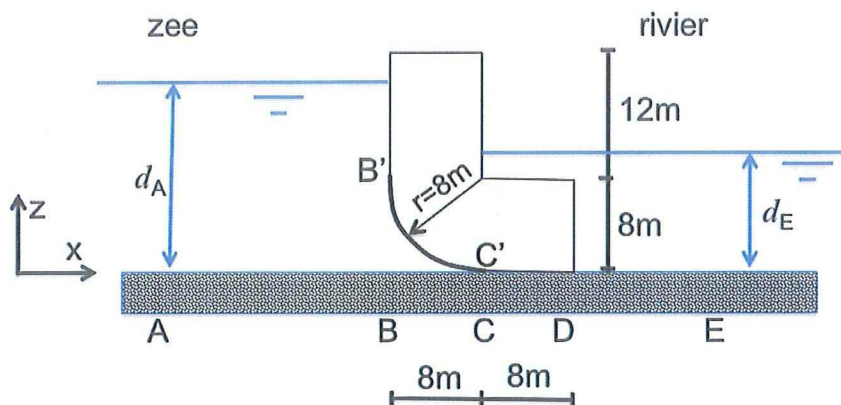
Tenzij anders gegeven geldt: massa dichtheid water $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, kinematische viscositeit water $\nu = 1.0 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, gravitatie $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

Gebruik bijgevoegd antwoordformulier.

**Vergeet niet je naam en studienummer in te vullen op het
antwoordformulier!**

Vraagstuk I (CTB2110)

De schuif van een stormvloedkering heeft een doorsnede zoals weergegeven in onderstaande figuur. Beschouw de situatie per eenheid van breedte.



In gesloten toestand staat de schuif op de horizontale bodem. De waterdiepte d_A aan de zeezijde (links) bedraagt daarbij 16 m en de diepte aan de rivierzijde d_E bedraagt 10 m.

I.1¹ Bereken de netto horizontale drukkracht van het water op de schuif p.e.v. breedte.

Deel $B' - C'$ van de schuif is de omtrek van een kwart cirkel met een straal r van 8 m.

I.2^{1.5} Bereken de grootte en de richting van de netto drukkracht van het water op $B' - C'$ p.e.v. breedte.

Na een storm neemt de waterstand aan de zeezijde af terwijl de waterstand op de rivier gelijk blijft. Zodra het waterstandsverschil dat toelaat wordt de schuif gedeeltelijk in verticale richting geopend totdat de opening $a_C (= a_D)$ onder de schuif 1 m bedraagt. In de ontstane situatie is de stationaire stroomsnelheid u_{CD} in de doorstroomopening tussen C en D gelijk aan 3 m/s.

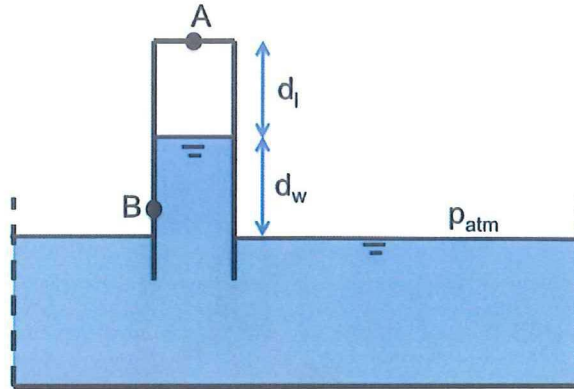
I.3¹ Schets het verloop van de snelheid u en van de versnelling a langs een willekeurige stroomlijn tussen de doorgangen A en D . De precieze waarden van de snelheden en versnellingen hoeven niet bepaald te worden.

I.4¹ Bereken voor de situatie met een gedeeltelijk geopende schuif de waterdiepte d_D juist benedenstrooms van doorgang D . (Gebruik verder $d_D = 9.25$ m als je het antwoord op deze vraag niet kunt berekenen.)

I.5^{1.5} Bereken de bijbehorende horizontale kracht van het stromende water op de schuif p.e.v. breedte. (Aanwijzing: bereken eerst de waterdiepte d_A .)

Vraagstuk II (CTB2110)

Beschouw een groot aquarium, gevuld met water (dichtheid: ρ_w). Een beker wordt omgekeerd in het aquarium gezet, waarbij een verschil ontstaat tussen de waterstand in de beker en de constante waterstand in het aquarium, zie tekening.



De dichtheid van lucht ρ_l bedraagt 1 kg/m^3 en lucht mag als onsamendrukbaar beschouwd worden. De atmosferische druk wordt gegeven door p_{atm} . De bodem van het bekerglas heeft een oppervlak A_b .

II.1¹ Geef de uitdrukking voor de druk aan de binnenzijde van de bodem van het bekerglas. Laat zien dat de bijdrage van het gewicht van de lucht verwaarloosd mag worden (gebruik deze aanname in het vervolg van deze vraag).

In de bodem van het bekerglas (punt A) zit een ventiel. De opening van het ventiel heeft een netto doorstroomoppervlak $\mu A_v \ll A_b$.

II.2^{1,5} Leid af dat de stroomsnelheid van lucht in het openstaande ventiel gegeven is door:

$$u_{\text{ventiel}} = \sqrt{2g \frac{\rho_w}{\rho_l} d_w}$$

Het ventiel wordt op tijdstip $t = 0$ plotseling geopend.

II.3¹ Geef de uitdrukking voor de zaksnelheid van het waterniveau in het bekerglas op tijdstip $t = 0$.

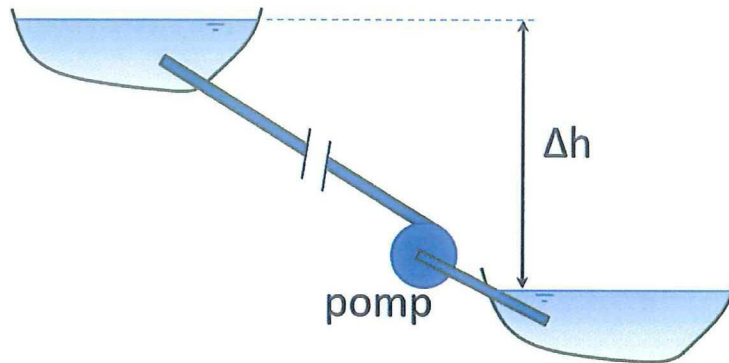
II.4^{1,5} Leid de differentiaalvergelijking af die de hoogte van de waterkolom d_w in het bekerglas beschrijft als functie van de tijd t .

In plaats van een ventiel aan de bovenzijde in punt A te maken, wordt het ventiel in een punt B onder de waterspiegel in de zijwand van het bekerglas aangebracht.

II.5¹ Beredeneer wat er zal gebeuren als het ventiel in B opengezet wordt.

Vraagstuk III (CTB2110 & CT2140)

Een opslagsysteem voor drinkwater bestaat uit twee reservoirs met een onderling hoogteverschil Δh waarbij water via een leiding met een constante diameter door middel van een pomp naar het hogergelegen reservoir verplaatst wordt. Zie onderstaande figuur.



Beschouw een situatie met een constant debiet in de leiding. Het energieverlies over de leiding is daarbij bepaald door de wandweerstand in de leiding en het uittreeverlies. Eventuele intree- en bochtverliezen kunnen in dit geval verwaarloosd worden.

III.1^{1.5} Maak een prinscheskets van het bijbehorend verloop van het piëzometrisch niveau h en de energiehogte H langs de leiding. Geef daarbij aan hoe de energiehogte samengesteld is en benoem de energieverliezen.

Het hoogteverschil Δh tussen de reservoirs bedraagt 200 m. De leiding heeft een lengte ℓ van 1000 m en een diameter D van 0.5 m. De gemiddelde stroomsnelheid U in de leiding bedraagt 2 m/s waarbij het weerstandsverhang i_w gelijk is aan 10^{-2} .

III.2^{1.5} Bereken het vermogen dat de pomp in deze situatie moet leveren.

III.3¹ Bepaal de grootte van de wandschuifspanning τ en de bijbehorende schuifspanningssnelheid u_* .

III.4¹ Bereken, onder de veronderstelling dat de wandstroming hydraulisch ruw is, de Nikuradse ruwheidshoogte k van de leidingwand.

III.5¹ Laat door middel van een berekening zien dat de veronderstelling van hydraulisch ruwe wandstroming inderdaad juist is.

6.

Vraagstuk IV (CTB2110 & CT2140)

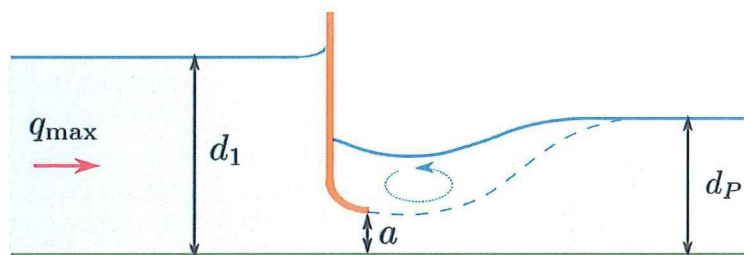
Een afwateringskanaal met rechthoekig dwarsprofiel en constante breedte ($R \approx d$) mondt uit in een groot meer met constant waterpeil. Het kanaal heeft een bodemverhang i_b van 5×10^{-4} en een weerstandscoefficiënt c_f van 3×10^{-3} . Het kanaal is zodanig ontworpen dat voor de ontwerpafvoer $q_{\max}$ de eenparige stroming een diepte heeft van 3.25 m.

IV.1¹ Hoe groot bedraagt de (specifieke) ontwerpafvoer $q_{\max}$? (Gebruik verder $q_{\max} = 5.5 \text{ m}^2/\text{s}$ als je het antwoord op deze vraag niet kunt berekenen.)

De waterdiepte d_0 in het kanaal ter plaatse van de aansluiting met het meer bedraagt 3.75 m.

IV.2^{1.5} Bereken voor de ontwerpafvoer de waterdiepte d_P in een punt P op 4 km afstand bovenstrooms van de monding. Ga uit van kleine afwijkingen van de eenparige toestand. (Gebruik verder $d_P = 3.50 \text{ m}$ als je het antwoord op deze vraag niet kunt berekenen.)

Om de waterstand in het kanaal te kunnen regelen legt men ter plaatse van P een onderspuier met verstelbare doorstroomhoogte a aan, zie onderstaande figuur.



IV.3¹ Beargumenteer in welk deel van het kanaal de waterstand wordt beïnvloed indien men in bovenstaande situatie de doorstroomhoogte een klein beetje laat variëren.

Voor een doorstroomhoogte a van 1.25 m is voor de ontwerpafvoer $q_{\max}$ het stroombeeld direct achter de onderspuier conform de weergave in bovenstaande figuur (zgn. ‘verdrongen’ watersprong).

IV.4^{1.5} Bereken voor deze situatie de diepte d_1 direct bovenstrooms van de onderspuier en geef aan welk type verhanglijn er bovenstrooms van de onderspuier aanwezig is.

Laat men bij gelijkblijvende afvoer de onderspuier verder zakken, dan zal voor een doorstroomhoogte $a \leq a'$ benedenstrooms van de onderspuier een vrijstaande watersprong optreden.

IV.5^{1.5} Bereken de doorstroomhoogte a' waarbij de vrijstaande watersprong zich tijdens het zakken van de onderspuier voor het eerst voordoet.

$$6\frac{1}{2}$$

$$11 + 12\frac{1}{2}$$

$$23.5$$

Vraagstuk V (CT2140)

Voor het aanleggen van bodembescherming worden stenen met een massadichtheid van $\rho_s = 2600 \text{ kg/m}^3$, in het water gegooid. De aannemer wil weten hoe snel de stenen naar de bodem zinken. Voor het gemak worden de stenen beschouwd als bollen met een diameter D van 0.3 m. Als waarde voor de weerstandscoefficiënt c_D kiest hij/zij 0.5 overeenkomend met de aanname van de bolvorm.

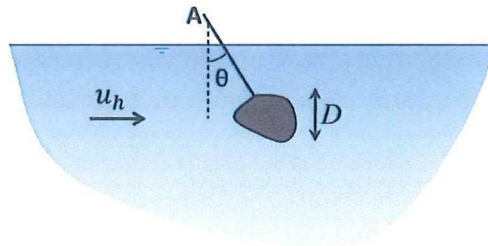
V.1¹ Hoe groot is de verticale kracht die een steen in het water ondervindt als gevolg van de zwaartekracht en de opwaartse kracht? (Als je het antwoord op deze vraag niet hebt kunnen vinden gebruik je verder een waarde van 200 N.)

V.2¹ Hoe groot is de stationaire valsnelheid w die de steen zal krijgen als de waterdiepte groot genoeg is?

V.3¹ Leg uit waarom onder condities vergelijkbaar met die van de vorige vraag de weerstandscoefficiënt c_D constant mag worden verondersteld.

De steen is hier beschouwd als bolvormig maar is in werkelijkheid onregelmatig van vorm. Hierdoor zal de weerstandscoefficiënt afwijken van die van een bol. **V.4^{0.5}** Beredeneer op welke manier de afwijking van de bolvorm leidt tot een andere waarde van de weerstandscoefficiënt c_D .

Om er achter te komen wat de werkelijke waarde is voor c_D , voert de aannemer een proef uit zoals geschetst in de figuur hieronder. De steen wordt in het punt A aan een flexibel touw opgehangen in water dat met een horizontale snelheid $u_h = 2.7 \text{ m/s}$ stroomt. De massa van het touw en de sleepkracht die op het touw wordt uitgeoefend kunnen daarbij worden verwaarloosd. Zodra de situatie stationair is blijkt het touw een hoek $\theta = 10^\circ$ te maken met de verticaal.

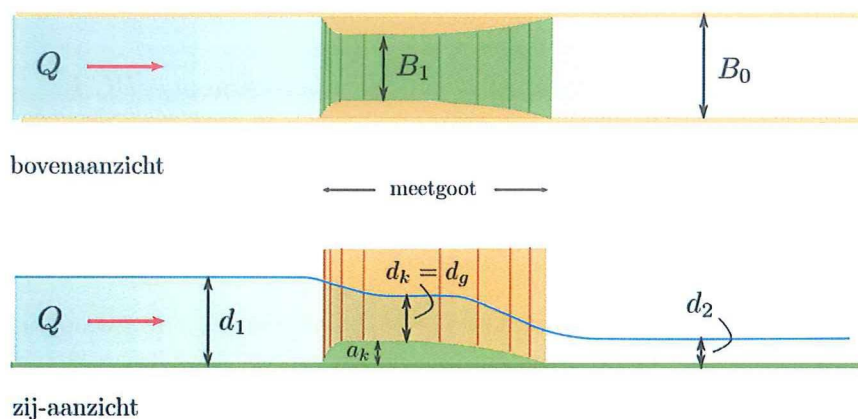


V.5^{1.5} Bereken de werkelijke waarde van de weerstandscoefficiënt c_D die uit de resultaten van deze proef kan worden berekend.

$u \frac{1}{2}$

Vraagstuk VI (CT2140)

In een kanaal met horizontale bodem, rechthoekig dwarsprofiel en constante breedte bevindt zich een zgn. meetgoot uitgevoerd als een lange overlaat met een versmalling. Dergelijke kunstwerken worden in de praktijk veelvuldig toegepast om afvoeren te meten. We beschouwen een situatie met vrije (ongestuwde) afstroming. In de meetgoot treedt daarbij de grensdiepte op, e.e.a. zoals weergegeven in onderstaande figuur.



VI.1¹ Leg uit waarom de waterstand benedenstrooms van de meetgoot in dit geval geen invloed heeft op de bovenstroomse waterstand.

Het kanaal heeft een breedte B_0 van 2.5 m. De breedte B_1 van de meetgoot bedraagt 1.5 m en de kruinhoogte a_k bedraagt 1.0 m. Men meet op de kruin van de meetgoot een waterdiepte d_k van 0.8 m. De afvoercoëfficiënt m is gelijk aan 1.

VI.2¹ Bereken het debiet Q in het kanaal. (Gebruik verder $Q = 4.76 \text{ m}^3/\text{s}$ als je het antwoord op deze vraag niet kunt berekenen.)

De meetgoot verloopt zowel aan de aanstroomzijde als aan het benedenstroomse uiteinde vloeiend om zodoende de optredende energieverliezen te minimaliseren.

VI.3^{1.5} Bereken de waterdiepte d_1 bovenstrooms en de waterdiepte d_2 benedenstrooms van de meetgoot in geval de energieverliezen in het geheel worden verwaarloosd. (Gebruik verder $d_1 = 2.16 \text{ m}$ en $d_2 = 0.31 \text{ m}$ als je het antwoord op deze vraag niet kunt berekenen.)

VI.4^{1.5} Bereken voor de situatie van vraag VI.3 de horizontale kracht K_H (N) die door het stromende water op de meetgoot wordt uitgeoefend.

Verwaarlozing van het energieverlies aan de voorzijde van de meetgoot (versnelling) zal in werkelijkheid een goede aanname zijn maar aan de achterzijde (vertraging) zal er wel degelijk energie gedissipeerd worden.

VI.5^{1.5} Laat met behulp van de bijbehorende energiekromme en impuls-kromme zien of daarbij de horizontale kracht K_H op de meetgoot toeneemt of juist afneemt ten opzichte van het eerder beschouwde geval zonder energiedissipatie.

6 1/2.

Uitwerking

Vraagstuk I

I.1 Beschouw het horizontaal evenwicht p.e.v. breedte van de vloeistof tussen de doorgangen A en E : $F_{H,A} - F_{H,E} - K_H = 0$, hierin is K_H de door het water uitgeoefende horizontale kracht op de schuif en $F_{H,(A,E)}$ de hydrostatische drukkracht in de respectievelijke doorgangen. Gebruikmakend van $F_H = \frac{1}{2}\rho g d^2$ volgt nu $K_H = \frac{1}{2}\rho g (d_A^2 - d_E^2) = 765 \text{ kN/m}$.

I.2 Beschouw het evenwicht p.e.v. breedte van het vloeistofmootje $BC'B'$.

Horizontaal evenwicht: $\frac{1}{2}(p_B + p_{B'}) \times BB' - K_H = 0$, waarin K_H de horizontale component is van de door het water uitgeoefende drukkracht op $B'C'$. Met $p_B = \rho g d_A = 156.96 \text{ kPa}$, $p_{B'} = \rho g (d_A - r) = 78.48 \text{ kPa}$ en $BB' = 8 \text{ m}$ volgt hiervoor $K_H = 942 \text{ kN/m}$ (naar rechts).

Verticaal evenwicht: $p_{BC} \times BC - F_{zw} - K_V = 0$, waarin F_{zw} de zwaartekracht is op het vloeistofmootje en K_V de verticale component is van de door het water uitgeoefende drukkracht op $B'C'$. Via $p_{BC} = \rho g d_A = 156.96 \text{ kPa}$ (druk op de bodem links van de schuif) en $F_{zw} = \rho g (1 - \frac{1}{4}\pi) r^2 = 134.75 \text{ kN/m}$ en $BC = 8 \text{ m}$ volgt uiteindelijk: $K_V = 1121 \text{ kN/m}$ (opwaarts).

De totale kracht K op het beschouwde deel van de schuif wordt hiermee: $K = \sqrt{K_H^2 + K_V^2} = 1464 \text{ kN/m}$. De hoek θ van de werklijn van deze kracht met de horizontaal is gegeven door $\theta = \arctan(K_V/K_H) = 50^\circ$.

I.3 Zie onderstaande figuur.

I.4 Beschouw een impulsbalans (p.e.v. breedte) voor het balansgebied tussen doorgang E en de doorgang juist benedenstrooms van D . Uitgedrukt in de gevraagde waterdiepte d_D luidt deze (op een constance factor ρ na): $\frac{1}{2}g d_D^2 + q^2/a_{CD} = \frac{1}{2}g d_E^2 + q^2/d_E$, waarin $a_{CD} = 1 \text{ m}$ de doorstroomhoogte onder de schuif is en $q = a_{CD} u_{CD} = 3 \text{ m}^2/\text{s}$ het specifieke debiet. Uit de gegevens kan het rechterlid van deze balansvergelijking direct berekend worden ($490.5 \text{ m}^2 \cdot \text{m/s}^2$). Oplossen van de resulterende vergelijking voor d_D (één oplossing mogelijk) geeft uiteindelijk $d_D = 9.90 \text{ m}$.

I.5 De horizontale kracht K_H door het stromende water op de schuif uitgeoefend volgt uit de horizontale-impulsbalans voor het balansgebied tussen de doorgangen A en E . Per eenheid van breedte luidt deze: $\frac{1}{2}\rho g d_A^2 + \rho q^2/d_A - \frac{1}{2}\rho g d_E^2 - \rho q^2/d_E - K_H = 0$. De impulsoverdracht door doorgang E (je kunt ook doorgang D nemen) is bekend uit de vorige deelvraag. Voor het berekenen van de impulsoverdracht door doorgang A moet de waterdiepte d_A bekend zijn. Deze kan bepaald worden via de energievergelijking tussen doorgang A en doorgang D (over korte afstand versnellende stroming): $H_A = H_D \rightarrow d_A + q^2/(2g d_A^2) = d_D + q^2/(2g a_{CD}^2) = 10.37 \text{ m}$. Hieruit volgt (subkritische tak van de oplossing kiezen) $d_A = 10.36 \text{ m}$. Het bepalen van de horizontale kracht op schuif is nu verder een invuloefening waaruit volgt $K_H = 40.4 \text{ kN/m}$ (naar rechts).

Vraagstuk II

II.1 De druk in de beker ter hoogte van het waterniveau in het aquarium is gelijk aan de atmosferische druk p_{atm} (wet van Pascal). Beschouwing van het hydrostatisch evenwicht in het bekglas geeft nu (begin bovenin met rekenen): $p_A + \rho_l g d_l + \rho_w g d_w = p_{\text{atm}}$, oftewel $p_A = p_{\text{atm}} - \rho_w g d_w - \rho_l g d_l$. De laatste term in het rechterlid (t.g.v. het gewicht van de lucht in de beker) is verwaarloosbaar vanwege $\rho_l \ll \rho_w$ indien d_l en d_w van dezelfde grootte orde zijn.

II.2 Bij stroming door het ventiel zijn de stroomsnelheden op enige afstand hiervan verwaarloosbaar klein (voor de atmosfeer is dit evident, voor de lucht in de beker geldt dit vanwege $\mu A_v \ll A_b$). In dergelijke situaties geldt de wet van Torricelli: $u_{\text{ventiel}} = \sqrt{2g\Delta h}$, waarin Δh het verschil in piëzometrisch niveau is over de opening. In termen van het drukverschil over de opening Δp kunnen we dit herschrijven als $\Delta h = \Delta p / \rho_l g = (p_{\text{atm}} - p_A) / \rho_l g$. Gebruikmakend van de uitdrukking voor p_A uit de vorige deelvraag geldt $\Delta h = \rho_w / \rho_l d_w$ waaruit onmiddellijk de gegeven uitdrukking voor u_{ventiel} volgt.

II.3 De binnenkomende luchtstroom op tijdstip $t = 0$ heeft een debiet $Q_{\text{in}} = \mu A_v u_{\text{ventiel}} = \mu A_v \sqrt{2g \frac{\rho_w}{\rho_l} d_w} (t = 0)$. Uit een volumebalans volgt dat dit debiet gelijk is aan de zaksnelheid w van het vloeistofoppervlak maal de grootte van dit oppervlak: $Q = w A_b$. Voor de zaksnelheid volgt nu: $w(t = 0) = \frac{\mu A_v}{A_b} \sqrt{2g \frac{\rho_w}{\rho_l} d_w} (t = 0)$.

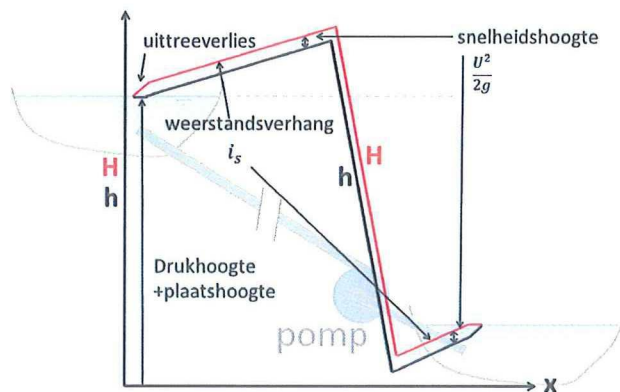
II.4 De vergelijking voor de zaksnelheid geldt feitelijk voor ieder tijdstip $t \geq 0$. Via $w = -dd_w/dt$ volgt hieruit een differentiaalvergelijking voor $d_w(t)$, gegeven door: $dd_w/dt = -\frac{\mu A_v}{A_b} \sqrt{2g \frac{\rho_w}{\rho_l} d_w}$.

II.5 De druk in de beker ter hoogte van B is lager dan de atmosferische druk. Uit de hydrostatische drukverdeling volgt: $p_B = p_{\text{atm}} - \rho_w g z_B$, waarin z_B de hoogte van punt B is t.o.v. het waterniveau in het aquarium. Na opening van het ventiel in B heerst er een drukverschil over het ventiel waarbij de druk aan de buitenkant ervan hoger is dan aan de binnenzijde in de beker. Hierdoor zal er lucht van buiten naar binnen gaan stromen.

Vraagstuk III

III.1 In de twee reservoirs staat het water stil en valt de energiehogte samen met het vrije oppervlak. In de leiding heerst een uniforme stroomsnelheid U , wat een bijdrage aan de energiehogte in de leiding levert van $U^2/2g$. Dit is tevens het uittreeverlies. Door de weerstand in de pijpleiding is er een verhang i_w . De pomp compenseert de verliezen en zorgt voor het benodigde opvoerhoogte om het water naar boven te laten stromen. Zie figuur.

III.2 De pomp moet een hoogteverschil $\Delta h = 200$ m overbruggen en energieverlies compenseren. Het energiehogteverlies in de leiding bedraagt $i_w L = 10^{-2} \times 1000 = 10$ m, het uittreeverlies is gelijk aan de snelheidshogte $U^2/2g = 0.20$ m. De opvoerhoogte van de pomp wordt hiermee $\Delta H_{\text{pomp}} = 210.2$ m. Voor het pompvermogen van de pomp geldt: $\Delta P_{\text{pomp}} = \rho g \Delta H_{\text{pomp}} Q$, waarbij $Q = \frac{1}{4} \pi D^2 U = 0.2 \text{ m}^3/\text{s}$. Met de gegeven grootheden



levert dit een vermogen op van 412 kW

III.3 Bij het gegeven weerstandsverhang is de wandschuifspanning te bepalen via $\tau_0 P = \rho g A i_w$ (evenwicht verhangkracht en weerstand), waaruit volgt $\tau_0 = \rho g R i_w = 12.3 \text{ N/m}^2$. Via de definitie van de schuifspanningssnelheid, $\tau_0 = \rho u_*^2$ volgt $u_* = 0.11 \text{ m/s}$.

III.4 De wandschuifspanning is gerelateerd aan de gemiddelde stroomsnelheid via $\tau_0 = \rho(f/8)U^2$, waaruit volgt dat in dit geval $f = 0.025$. In het hydraulisch ruwe regime is f gegeven door $1/\sqrt{f} = 2 \log(3.7D/k)$ (White-Colebrook) waaruit voor de eerder berekende waarde van f volgt dat $k = 1.3 \text{ mm}$.

III.5 Hydraulisch ruw wil zeggen dat de dikte van de laminaire sublaag δ verwaarloosbaar klein is t.o.v. de ruwheidshoogte k_N , oftewel $\delta \ll k$. De laminaire-sublaagdikte $\delta = 11.6\nu/u_* = 0.1 \text{ mm}$, dit is een factor 13 kleiner dan de gevonden ruwheidshoogte, waarmee voldaan is aan de eerder gestelde voorwaarde voor hydraulisch ruwe wandstroming.

Vraagstuk IV

IV.1 Uit de gegevens valt op te maken dat de evenwichtsdiepte (d_e) tijdens maatgevende afvoer gelijk is aan 3.25 m. Via $d_e^3 = (c_f/i_b) q_{\text{max}}^2/g$ volgt $q_{\text{max}} = 7.49 \text{ m}^2/\text{s}$.

IV.2 Oplossing verhanglijn voor kleine afwijkingen van de eenparige toestand geeft: $d_P = d_e + (d_0 - d_e) \exp((s_P - s_0)/L)$, waarin de 'aanpassingslengte' $L = d_e(1 - i_b/c_f)/(3i_b) = 1805 \text{ m}$. Met $s_P - s_0 = -4000 \text{ m}$ volgt $d_P = 3.25 \text{ m} + [0.50 \text{ m}] \times \exp([-4000 \text{ m}]/[1805 \text{ m}]) = 3.30 \text{ m}$.

IV.3 De stroming in de rivier en rondom de onderspuier is sub-kritisch. Dit betekent dat beïnvloeding van de waterstand alleen in bovenstroomse richting plaatsvindt. Een (kleine) variatie van de doorstroomhoogte ter plaatse van de onderspuier zal dus alleen in het bovenstrooms ervan gelegen kanaalpand merkbaar zijn. De diepte op enige afstand benedestrooms van de onderspuier is blijft daarbij bepaald door de randvoorwaarde ter plaatse van het meer. (Voor grote variaties van de doorstroomopening kan de stroming ter

plaatse van de onderspuier superkritisch worden, waarna bovenstaande redenering niet meer opgaat. Daarnaast heeft een variatie van de doorstroomhoogte effect op de waterdiepten onmiddellijk bovenstrooms (d_1) en benedenstrooms van de onderspuier (punt van maximum contractie), maar dit betreft uiteraard niet de verhanglijn).

IV.4 De berekening verloopt in twee stappen:

1. Bereken de waterdiepte ter plaatse van het maximum contractiepunt bij de onderspuier (d_a) via een impulsbalans tussen deze doorgang en de doorgang bij P . Uitwerken van $F_a = F_P$ geeft $\frac{1}{2}\rho g d_a^2 + \rho q_{\max}^2/a = \frac{1}{2}\rho g d_P^2 + \rho q_{\max}^2/d_P = 70.55 \text{ kN/m}$. Invullen van $q_{\max}$ en de gegeven waarde van a geeft $d_a = 2.29 \text{ m}$.
2. Pas vervolgens de energievergelijking (Bernoulli) toe tussen doorgang a en doorgang 1: $E_1 = E_a$ (horizontale bodem) geeft $d_1 + q_{\max}^2/(2gd_1^2) = d_a + q_{\max}^2/(2ga^2) = 4.12 \text{ m}$. Oplossen van de resulterende vergelijking geeft $d_1 = 3.93 \text{ m}$ (sub-kritische tak van de oplossing kiezen).

IV.5 Als er een watersprong optreedt is de waterdiepte net benedenstrooms van de onderspuier gelijk aan de doorstroomhoogte a . De watersprong treedt op zodra de waterdiepte a als geconjugeerde de waterdiepte d_P heeft. Dit geeft $F_{a'} = F_P$ oftewel $\frac{1}{2}\rho g (a')^2 + \rho q_{\max}^2/a' = 70.55 \text{ kN/m}$ (rechterlid volgt onmiddellijk uit vorige vraag), waarbij voor a' de superkritische tak van de oplossing moet worden gekozen. Oplossen van deze vergelijking geeft tenslotte $a' = 0.84 \text{ m}$.

Vraagstuk V

V.1 De resulterende verticale kracht is het verschil tussen de opwaartse kracht en de zwaartekracht: $F_{\text{res}} = F_{\text{zw}} - F_{\text{opw}} = (\rho_s - \rho_w) g V_{\text{bol}} = (\rho_s - \rho_w) g \frac{4}{3} \pi R^3 = 222 \text{ N}$.

V.2 Als de snelheid stationair is, is er een krachtenevenwicht tussen de eerder berekende netto zwaartekracht en de sleepkracht: $F_{\text{res}} = c_D \frac{1}{2} \rho_w w^2 A$, hierin is w de valsnelheid en $A = \pi R^2$ het aangestroomd oppervlak. Hieruit volgt $w = 3.5 \text{ m/s}$.

V.3 De weerstandscoefficiënt c_D hangt sterk af van het Reynoldsgetal wanneer deze klein is. In de huidige situatie is het Reynoldsgetal groot $\text{Re} = wD/\nu \approx 10^6$ en is de weerstandscoefficiënt nagenoeg constant.

V.4 Door de onregelmatige vorm zal de stroming bij de hoeken en randen gemakkelijker loslaten waardoor het zog vergroot. Dit leidt in de regel tot een hogere weerstand met bijbehorende grotere weerstandscoefficiënt

V.5 De hoek die het touw met de verticaal maakt, wordt bepaald door de verhouding van de horizontale sleepkracht en de verticale netto zwaartekracht: $\tan \theta = F_{\text{res}} / \left(c_D \frac{1}{2} \rho_w U_h^2 A \right)$. Invullen van de gegeven waarde van θ en de eerder berekende waarde voor F_{res} en de gegeven snelheid U_h geeft dan $c_D = 0.15$.

Deze kleine waarde voldoet niet aan de verwachting zoals bij deelvraag V.4 benoemd.

Kennelijk is er bij deze meting iets bijzonders aan de hand. Dit kan het gevolg zijn van een meetfout of van een fysisch verschijnsel zoals het mogelijk optreden van het fenomeen 'drag crisis', wat bij de beschouwde Reynolds getallen niet uit te sluiten is.

Vraagstuk VI

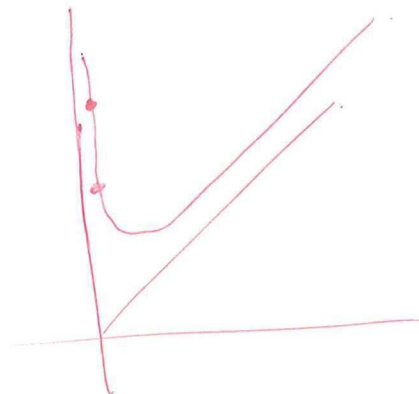
VI.1 Gegeven is dat in de meetgoot de grensdiepte optreedt, de stroming is daar dus kritisch. Storingen (van bijvoorbeeld de waterstand) planten zich dan met dezelfde snelheid voort als de stroomsnelheid en kunnen zich dus niet in bovenstroomse richting uitbreiden. Dit betekent dat een de waterstand bovenstrooms van de meetgoot niet beïnvloed wordt door de waterstand benedenstrooms ervan.

VI.2 Stroomsnelheid op de kruin volgt uit het gegeven dat de stroming er kritisch is: $U_k = \sqrt{gd_k} = 2.80 \text{ m/s}$. Voor het specifieke debiet op de kruin volgt nu $q_k = m d_k U_k = 2.24 \text{ m}^2/\text{s}$ en tenslotte voor het debiet $Q_k = q_k B_1 = 3.36 \text{ m}^3/\text{s}$. Dit is gelijk aan het debiet Q in het kanaal (continuïteit).

VI.3 Zowel in doorgang 1 als in doorgang 2 is de energiehogte gelijk aan de energiehogte ter plaatse van de kruin, met de bodemhoogte van het kanaal als referentie geeft dit: $H_1 = H_2 = H_k = a_k + \frac{3}{2}d_k = 2.2 \text{ m}$. De waterdiepten d_1 respectievelijk d_2 volgen nu uit oplossen van de energievergelijking $d_{1,2} + Q^2 / (2gB_0^2 d_{1,2}^2)$ waarbij voor d_1 de sub-kritische tak van de oplossing gekozen moet worden en voor d_2 de super-kritische tak. Dit geeft uiteindelijk $d_1 = 2.18 \text{ m}$ en $d_2 = 0.22 \text{ m}$.

VI.4 De horizontale kracht K_H op de meetgoot volgt uit een impulsbalans tussen de doorgangen 1 en 2: $K_H = \frac{1}{2}\rho g B_0 (d_1^2 - d_2^2) + \rho Q (U_1 - U_2)$ waarin $U_{1,2} = Q / (B_0 d_{1,2})$. Invullen van d_1 en d_2 geeft: $K_H = 38.84 \text{ kN}$.

VI.5 Indien er aan de achterzijde wel dissipatie optreedt (tussen de kruin en doorgang 2) dan zal de waterdiepte d_2 groter zijn dan de eerder berekende waarde zonder energiedissipatie. Immers, de stroming in doorgang 2 is super-kritisch en in dat geval betekent een afname van de specifieke energiehogte een toename van de diepte (zie energiekromme). Een toename van de diepte betekent in het super-kritische regime echter een afname van de impulsoverdracht (zie impuls-kromme). Alles natuurlijk onder de voorwaarde dat het debiet gelijk blijft. Het verschil tussen F_1 en F_2 wordt dus groter hetgeen een toename van de horizontale kracht op de meetgoot betekent.



Formuleblad Vloeistofmechanica CTB2110

Fysische constanten

zwaarteverversnelling: $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

dichtheid water: $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$

kinematische viscositeit water $\nu = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

Kentallen

Froude-getal, stroomsnelheid U , waterdiepte d :

$$Fr \equiv \frac{U}{\sqrt{gd}}$$

Reynolds-getal, lengteschaal ℓ , dynamische viscositeit η , kinematische viscositeit ν , dichtheid ρ :

$$Re \equiv \frac{\rho U \ell}{\eta} = \frac{U \ell}{\nu}$$

Hydrostatica

Hydrostatisch evenwicht:

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = 0$$

bij constante dichtheid:

$$p + \rho g z = \text{constant}$$

Hydrostatische drukkracht in open waterloop, diepte d , constante dichtheid:

$$F_p = \frac{1}{2} \rho g d^2 \quad \text{p.e.v. breedte}$$

Piëzometrisch niveau, atmosferische druk p_a :

$$h \equiv z + \frac{p - p_a}{\rho g}$$

Hydrostatisch evenwicht, ρg en p_a constant:

$$h = \text{constant}$$

Kinematica

Versnelling van een deeltje

Meebewegende (materieële) afgeleide, groothed f , snelheidsvector $(u_x, u_y, u_z)^T$:

$$\frac{Df}{Dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + u_x \frac{\partial f}{\partial x} + u_y \frac{\partial f}{\partial y} + u_z \frac{\partial f}{\partial z}$$

In natuurlijk (s, n, b) assenstelsel:

$$\frac{Df}{Dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + u_s \frac{\partial f}{\partial s}$$

Meevoering

Volumestroom door doorgang D , normaalsnelheid u_N :

$$Q = \int_D u_N \, dA$$

Overdracht willekeurige grootheid X met dichtheid ρ_X :

$$S_X = \int_D \rho_X u_N \, dA$$

Bijvoorbeeld, impuls $\rho \mathbf{u}$:

$$S_{\text{imp}} = \int_D \rho \mathbf{u} u_N \, dA$$

Idem, kinetische energie:

$$S_{\text{kin}} = \int_D \frac{1}{2} \rho u^2 u_N \, dA$$

Ideale-vloeistofstroming

Euler-vergelijkingen

Bewegingsvergelijkingen in termen van hoogte piëzometrisch niveau $h = z + p/\rho g$ (natuurlijk assenstelsel):

$$a_s = \frac{\partial u_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = -g \frac{\partial h}{\partial s}$$

$$a_n = \frac{\partial u_n}{\partial t} + \frac{u^2}{R} = -g \frac{\partial h}{\partial n}$$

$$a_b = \frac{\partial u_b}{\partial t} = -g \frac{\partial h}{\partial b}$$

Bernoulli

Stationaire ideale-vloeistofstroming:

$$H = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u_s^2}{2g} = h + \frac{u_s^2}{2g} = \text{constant langs stroomlijn} \quad \left(\frac{\partial H}{\partial s} = 0 \right)$$

Torricelli

Stroming uit reservoir via kleine opening:

$$Q = \mu A \sqrt{2g \Delta h},$$

waarin Δh de hoogte is van het piëzometrisch niveau in het bovenstroomse reservoir boven dat in de uittrekkende straat.

Energie

Energieoverdracht

Doorgang D met oppervlak A en normaalsnelheid u_N :

$$P = \int \int_D \left(p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho u^2 \right) u_N \, dA$$

Dwarsprofiel gemiddelde energiehoogte:

$$\langle H \rangle \equiv \frac{P}{\rho g Q}$$

Rechte stroomlijnen (h constant binnen dwarsprofiel), gem. stroomsnelheid U :

$$\langle H \rangle = h + \beta \frac{U^2}{2g}$$

waarin $\beta = \int_D u^3 \, dA / U^3 A \approx 1$

Energiebalans

Voor een stroombuis geldt (stationair, geen toevoeging/onttrekking van energie):

$$P = \rho g Q \langle H \rangle = \text{constant}$$

Pomp, turbine:

$$\Delta P_{\text{pomp, turb}} = \rho g Q \Delta H_{\text{pomp, turb}}$$

Energie dissipatie balansgebied met doorgangen D_1 en D_2 , stationair:

$$\Delta P_{\text{diss}} = \rho g Q \Delta \langle H \rangle = \rho g Q (\langle H \rangle_1 - \langle H \rangle_2)$$

Drukverschil

Gelidelijke vernauwing (bijv. Venturi-meter), dynamische druk p :

$$p_1 - p_2 = \Delta p = \frac{1}{2} \rho Q^2 (A_2^{-2} - A_1^{-2})$$

Impuls

Impulsoverdracht

Doorgang D met normaalvector $\mathbf{e}_N$:

$$\mathbf{F} = \int \int_D (p + \rho u^2) \mathbf{e}_N \, dA$$

Ideen, doorgang met oppervlak A , evenwijdige stroomlijnen en gemiddelde snelheid U :

$$F = \int \int_D p \, dA + \alpha \rho U^2 A$$

waarin $\alpha = \int_D u^2 \, dA / U^2 A \approx 1$

Impulsbalans

Kracht vloeistof op zijdelingse begrenzing stroombuis, doorgangen D_1 en D_2 , zwaartekracht $\mathbf{F}_g$, stationaire stroming:

$$\mathbf{K} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

Horizontale kracht op begrenzing balansgebied, verticale doorgangen D_1 en D_2 , stationaire stroming:

$$K_H = F_1 - F_2 = \Delta F$$

Lokaal vertragsverlies

Carnot (abrupte verwijding van diameter D_1 tot D_2 in pijpstroming)
Stijging piezometrisch niveau:

$$h_2 - h_1 = \Delta h = U_2 (U_1 - U_2) / g$$

Daling energieniveau:

$$H_1 - H_2 = \Delta H_v = (U_1 - U_2)^2 / 2g$$

Vertragsverlies na lokale vernauwing, contractie μ :

$$\Delta H_v = \left(\frac{1}{\mu} - 1 \right)^2 \frac{U^2}{2g}$$

Buisje van Borda (intreeverlies):

$$\mu = \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta H_v = \left(\frac{1}{\mu} - 1 \right)^2 \frac{U^2}{2g}$$

Uitreeverlies (Carnot met $U_2 = 0$):

$$\Delta H_v = \frac{U^2}{2g}$$

Snel variërend vrij oppervlak

Bodemhoogte z_b , diepte d , specifiek debiet q , diepte-gemiddelde snelheid $U = q/d$, rechte stroomlijnen.

Energiehoogte

Diepte-gemiddelde energiehoogte (vormfactor β):

$$H = z_b + d + \beta \frac{U^2}{2g}$$

Specifieke energiehoogte:

$$E = H - z_b = d + \beta \frac{U^2}{2g}$$

Impuls- en energieverdracht

Impulsverdracht (vormfactor α):

$$F = \frac{1}{2} \rho g d^2 + \alpha \rho q U \quad \text{p.e.v. breedte}$$

Energieverdracht:

$$P = \rho g q H \quad \text{p.e.v. breedte}$$

Kritische stroming

Froude-getal Fr :

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gd}} = 1 \Rightarrow U^2 = gd \Rightarrow q^2 = gd^3$$

Specifieke energiehoopte:

$$E = d + \frac{U^2}{2g} = d + \frac{gd}{2g} = \frac{3}{2}d$$

Grensdiepte (kritische diepte):

$$d_g = \left(\frac{q^2}{g} \right)^{1/3} = \frac{2}{3} E_g$$

Onderspuier

Gelijke energiehoopte, overgang d_1 - d_2 (sub- naar superkritisch):

$$d_1 + \frac{q^2}{2gd_1^2} = d_2 + \frac{q^2}{2gd_2^2}$$

Kracht op schuif (via impulsbalans):

$$K = \frac{1}{2} \rho g (d_1^2 - d_2^2) + \rho q^2 (d_1^{-1} - d_2^{-1}) \quad \text{p.e.v. breedte}$$

Stationaire watersprong

Gelijke impulsverdracht overgang d_1 - d_2 (super- naar subkritisch):

$$\frac{1}{2} g d_1^2 + \frac{q^2}{d_1} = \frac{1}{2} g d_2^2 + \frac{q^2}{d_2} \quad \text{p.e.v. breedte}$$

Dissipatie in sprong (via energiebalans):

$$P_{\text{diss}} = \rho g q \left(d_1 - d_2 + \frac{q^2}{2g} (d_1^{-2} - d_2^{-2}) \right) \quad \text{p.e.v. breedte}$$

Lopende watersprong

Voortplantingssnelheid:

$$c = \sqrt{g \frac{d_1 + d_2}{2} \frac{d_2}{d_1}}$$

Idem, lage storing ($d_1 \approx d_2 = d$):

$$c = \sqrt{gd}$$

Overlaten

Diepte op kruin d_k , specifieke energiehoopte op kruin E_k , afvoercoëfficiënt m .

Volkomen afvoer

$$q = m d_k \sqrt{gd_k} = m \frac{2}{3} E_k \sqrt{\frac{2}{3} g E_k}$$

afvoer te bepalen via één meting (bijv. d_k of E_k)

Onvolkomen afvoer

$$q = m d_k \sqrt{2g (E_k - d_k)}$$

afvoer te bepalen via twee metingen (bijv. d_k en E_k)

Weerstand omstroomd voorwerp

Stuwdruk, aanstroomsnelheid U :

$$\Delta p_a = \frac{1}{2} \rho U^2$$

Sleepkracht, aangestroomd oppervlak A :

$$F_w = c_w \frac{1}{2} \rho U^2 A$$

waarin c_w de weerstandscoefficiënt is. Voorbeeld bol:

$$Re < 1 : \quad c_w = \frac{24\nu}{UD} = \frac{24}{Re}$$

$$10^3 < Re < 2 \times 10^5 : \quad c_w \approx 0,4$$

Energiedissipatie omstroomd voorwerp:

$$\Delta P_{\text{diss}} = F_w U = c_w \frac{1}{2} \rho U^3 A$$

Wandrijving eenparige stroom

Buisstroming

Diameter $D = 2r_0$, hydraulische straal $R = D/4$, ruwheid k , kinematische viscositeit ν , gemiddelde snelheid $U = Q/A$, wandschuifspanning τ_0 .

Algemeen

Evenwicht schuifkracht - netto drukkracht:

$$\tau_0 L P = \Delta p A = \rho g \Delta h A$$

zodat

$$\tau_0 = \frac{\rho g \Delta h A}{L P} = \rho g i_w R$$

Definitie weerstandsfactor:

$$\tau_0 = c_f \rho U^2 = \frac{f}{8} \rho U^2$$

geeft:

$$i_w = \frac{f}{8} \frac{U^2}{gR}$$

en

$$\Delta H_w = i_w L = f \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g} \quad (\text{Darcy-Weisbach})$$

waarin $f = f(Re, \frac{k}{D})$, zie diagram of onderstaande vergelijkingen

Poiseuille

$Re < \text{ca. } 2300$, laminair:

$$f = \frac{64}{Re}$$

waarin $Re = \rho U D / \eta = U D / \nu$

White-Colebrook

$Re > \text{ca. } 4000$, turbulent:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(0,27 \frac{k}{D} + \frac{2,5}{Re \sqrt{f}} \right) = 2 \log \frac{3,7D}{k(1 + 3,3/Re_*)} = 2 \log \frac{3,7D}{k + \delta/3,5}$$

waarin $\delta = 11,6\nu/u_*$, $Re_* = u_* k / \nu$ en $u_* = \sqrt{g R i_w} = \frac{1}{2} \sqrt{g D i_w}$.

Willekeurig dwarsprofiel

Doorstroomd oppervlak A , weerstand leverende omtrek P , schuifspanning, gemiddeld over P , is $\langle \tau_0 \rangle$, hydraulische straal $R = A/P$, turbulente hoofdstroom ($Re = UR/\nu > \text{ca. } 600$). Open waterlopen: $i_w = i_b$

Algemeen

Evenwicht schuifkracht - netto drukkracht (eenparige stroom):

$$\langle \tau_0 \rangle = c_f \rho U^2 = \rho u_*^2 = \rho g R i_w$$

$$U = \sqrt{g R i_w / c_f}$$

$$\Delta H_w = i_w L = c_f \frac{U^2}{g R} L$$

White-Colebrook

Gegenaliseerde coëfficiënten voor willekeurige sprofelvorm:

$$\frac{U}{u_*} = \frac{U}{\sqrt{g R i_w}} = \frac{1}{\sqrt{c_f}} = 5,75 \log \frac{12R}{k(1+3,3/Re_*)} = 5,75 \log \frac{12R}{k+\delta/3}, 5$$

waarin $\delta = 11,6\nu/u_*$, $Re_* = u_* k/\nu$ en $u_* = \sqrt{g R i_w}$.

Hydraulisch ruw:

$$\frac{U}{u_*} = \frac{U}{\sqrt{g R i_w}} = \frac{1}{\sqrt{c_f}} = 5,75 \log \frac{12R}{k} \approx 8,3 \left(\frac{R}{k} \right)^{1/6}$$

Verhanglijnen

Tweedimensionale stroom, breedte en diepte constant in dwarsprofiel

Eenparige stroom

Evenwichtsdiepte ($i_b = i_w$):

$$d_e = \left(\frac{c_f q^2}{i_b g} \right)^{1/3}$$

Grensdiepte: zie (1)

Bélanger

Algemeen:

$$\frac{dd}{ds} = \frac{i_b - i_w}{1 - F_r^2} = \frac{i_b - c_f Q^2 P / g A^3}{1 - \alpha Q^2 B / g A^3}$$

Tweedimensionale stroom (breedte en diepte constant in dwarsprofiel):

$$\frac{dd}{ds} = \frac{i_b - c_f q^2 / g d^3}{1 - \alpha q^2 / g d^3} = i_b \frac{d^3 - d_e^3}{d^3 - d_g^3} \quad (d \neq d_g \quad \text{en} \quad i_b > 0)$$

Oplossingen

Kleine afwijkingen van de eenparige toestand:

$$\Delta d = \Delta d_0 \exp \left(\frac{s - s_0}{L} \right) \quad \text{waarin} \quad L = \frac{1 - i_b / c_f}{3 i_b} d_e$$

Horizontale bodem:

$$\frac{1}{4} d^4 - d_g^3 d + c_f d_g^3 s = \text{constant}$$