

CT1036-2 - Constructiemechanica 2

(voorheen CT1041)

Juli 2012
April 2012
Juni 2011

April 2011
Juni 2010
April 2010



Tentamenbundel Civiele Techniek
Het Gezelschap "Practische Studie"

**EEN REPRODUCERENDE
LEERSTIJL
IS SCHADELIJK VOOR
DE ACADEMISCHE
VORMING**



--	--	--	--	--	--	--	--

Jan Rots

Antwoordformulier

CT1041 Constructiemechanica 2

5 ECTS

UITWERKINGEN

Zet op alle bladen uw naam en studienummer.

Bladen zonder naam en studienummer worden niet geaccepteerd.

Relevante berekeningen vermelden.

Antwoorden zonder berekening/motivering worden niet gehonoreerd.

Gebruik zo nodig de onbedrukte zijden van het antwoordformulier.

Tenzij anders vermeld wordt het **eigen gewicht van een constructie** buiten beschouwing gelaten.

Een blad met relevante **vergeet-me-nietjes** voor buigvervorming is toegevoegd aan dit antwoordformulier.

Een blad met relevante **oppervlakte-eigenschappen** voor gebruik bij de momentenvlakstellingen is toegevoegd aan dit antwoordformulier.

Benut controlemogelijkheden om rekenfouten te vermijden.

Maak de opgaven in een volgorde naar eigen keuze.

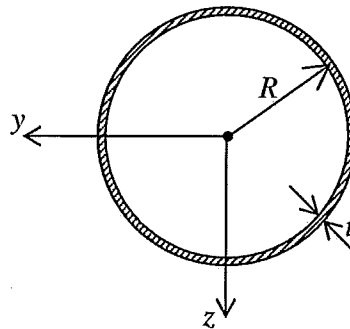
Let op: er zijn **5 opgaven**.

vraag	score
1	
2	
3	
4	
5	
totaal	

--	--	--	--	--	--	--

OPGAVE 1 (gewicht 1,0 - ongeveer 20 minuten)

Gegeven: onderstaande dunwandige cirkelvormige kokerdoorsnede.



Gevraagd:

- a. Toon aan dat het polaire traagheidsmoment I_p gelijk is aan $2\pi R^3 t$.

$$\begin{aligned}
 I_p = \int r^2 dA \\
 \left. \begin{array}{l} \text{alle materiaal op } r=R \end{array} \right\} &\Rightarrow I_p = \int R^2 dA \\
 &= R^2 \int dA \\
 &= R^2 \cdot A_{\text{buis}} \\
 &= R^2 \cdot 2\pi R \cdot t \\
 &= 2\pi R^3 t
 \end{aligned}$$

- b. Waarom geldt $I_{zz} = \frac{1}{2} I_p$?

$$\begin{aligned}
 z^2 + y^2 &= r^2 \\
 \int (z^2 + y^2) dA &= \int r^2 dA \\
 \int z^2 dA + \int y^2 dA &= \int r^2 dA \\
 I_{zz} + I_{yy} &= I_p \\
 \left. \begin{array}{l} \text{Symmetrie: } I_{zz} = I_{yy} \end{array} \right\} &\Rightarrow 2I_{zz} = I_p \\
 &I_{zz} = \frac{1}{2} I_p
 \end{aligned}$$

--	--	--	--	--	--	--

- c. Stel: de doorsnede wordt belast door een wringend moment. Geef het verband tussen de schuifspanning en het wringend moment in de buis, in formulevorm. Werk de formule uit met het gegeven van vraag (a).

$$\tau = \frac{M_t \cdot R}{I_p} = \frac{M_t \cdot R}{2\pi R^3 t} = \frac{M_t}{2\pi R^2 t}$$

$$\left(\text{alternatief: } \tau = \frac{M_t}{2A_{\text{omsloten}} \cdot t} = \frac{M_t}{2 \cdot \pi R^2 t} \right)$$

- d. Stel: de doorsnede wordt belast door een buigend moment om de y-as. Geef het verband tussen de buigspanning en dit buigend moment, in formulevorm. Bepaal de maximale buigspanning en druk deze uit in het buigend moment, R en t .

$$\sigma = \frac{M \cdot z}{I_{zz}} \text{ lineair in } z$$

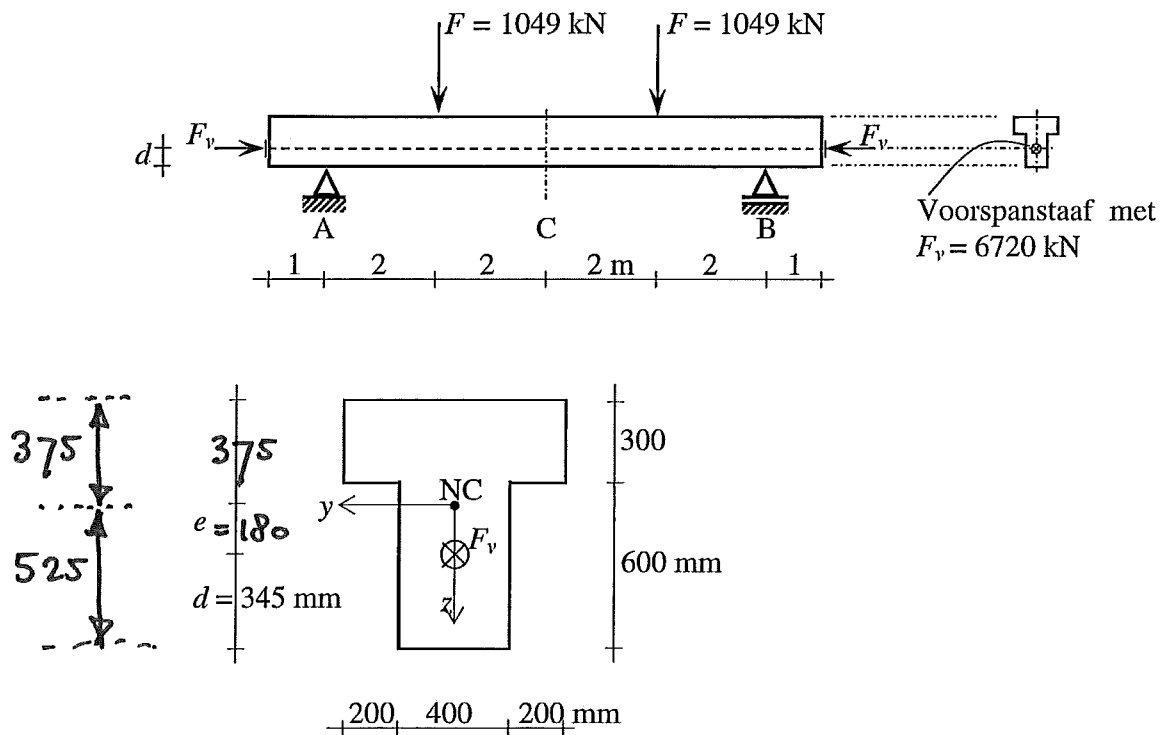
maximum op uiterste vezels, $z = R$

$$\sigma_{\max} = \frac{M \cdot R}{\frac{1}{2} \cdot 2\pi R^3 t} = \frac{M}{\pi R^2 t}$$

--	--	--	--	--	--	--

OPGAVE 2 (gewicht 3,5 - ongeveer 60 minuten)

Gegeven: onderstaande vrij opgelegde voorgespannen T-balk, belast door twee even grote krachten F . De voorspanstaaf is recht en bevindt zich op een afstand $d = 345$ mm van de onderzijde van de balk. De lengtematen en de afmetingen van de balkdoorsnede zijn aangegeven.



Gevraagd:

- a. Bepaal de ligging van het normaalkrachtencentrum NC van de doorsnede. Bepaal daaruit de excentriciteit e van de voorspanstaaf.

t.o.v. bovenzijde:

$$300 \cdot 800 \cdot 150 + 400 \cdot 600 \cdot 600 = (300 \cdot 800 + 400 \cdot 600) \cdot \bar{z}_{NC}$$

$$\Rightarrow \bar{z}_{NC} = 375 \text{ mm}$$

$$\text{afstand NC tot onderzijde} = 900 - 375 = 525 \text{ mm}$$

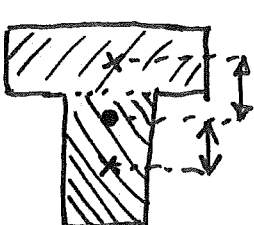
$$e = 525 - 345 = 180 \text{ mm}$$

(ingetekend in figuur)

--	--	--	--	--	--	--

- b. Toon aan dat het relevante traagheidsmoment van de doorsnede gelijk is aan $33,3 \times 10^9 \text{ mm}^4$.

buiging om y-as $\rightarrow I_{zz}$ relevant

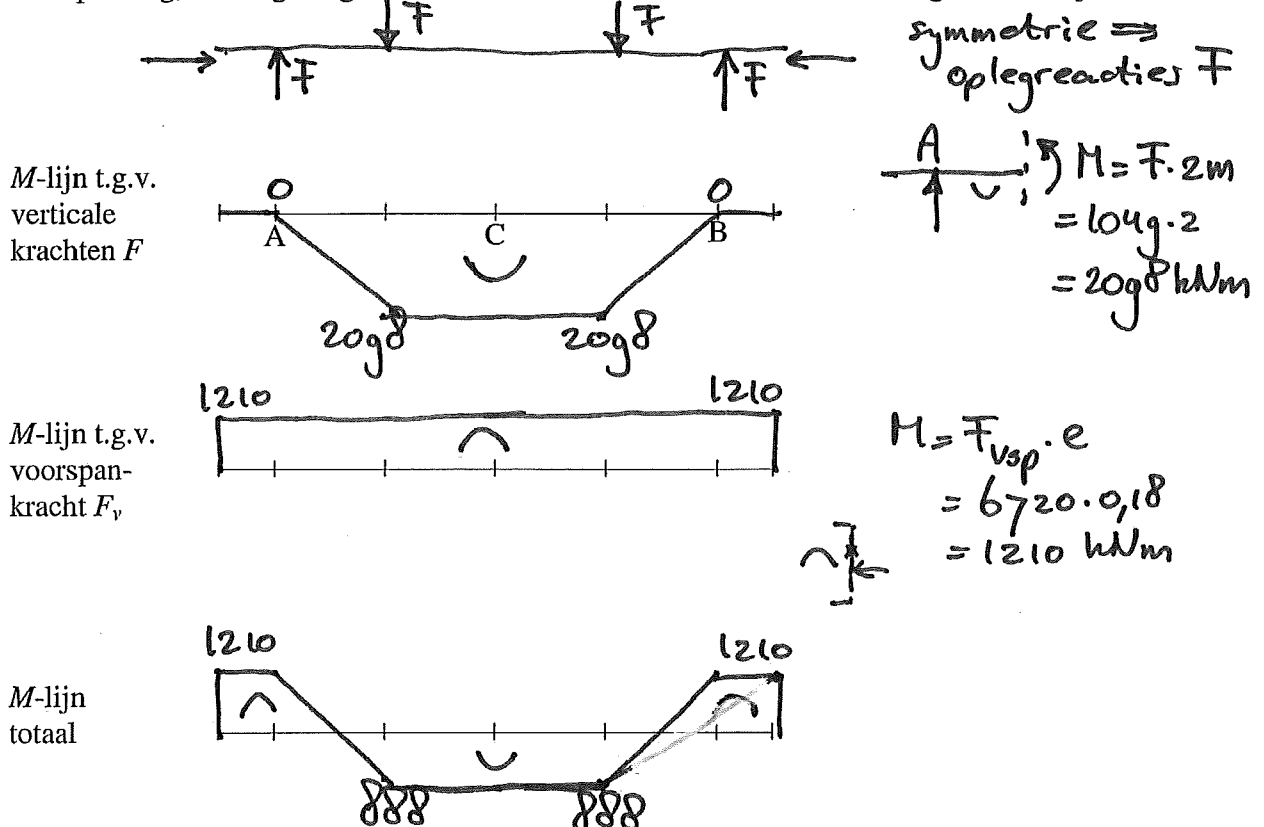


$$I_{zz} = \frac{1}{12} \cdot 800 \cdot 300^3 + 800 \cdot 300 \cdot (375 - 150)^2 + \frac{1}{12} \cdot 400 \cdot 600^3 + 400 \cdot 600 \cdot (525 - 300)^2$$

$$= 1,8 \cdot 10^9 + 12,15 \cdot 10^9 + 7,2 \cdot 10^9 + 12,15 \cdot 10^9$$

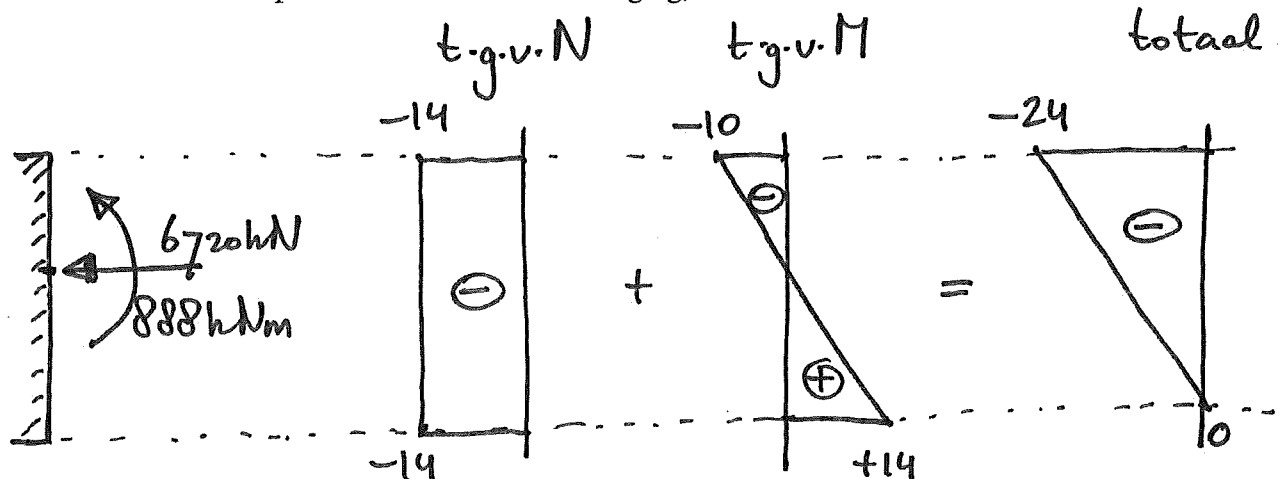
$$= 33,3 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$$

- c. Schets onderstaand de momentenlijn ten gevolge van de verticale krachten, ten gevolge van de voorspanning, en ten gevolge van de som van die twee. Zet waarden en buigtekens erbij.



--	--	--	--	--	--	--	--

- d. Bereken de resulterende spanningen (ten gevolge van normaalkracht en buiging) voor de middendoorsnede C. Geef schetsen van het spanningsdiagram over de hoogte, met tekens en waarden. Splits in normaalkracht en buiging, en sommeer.

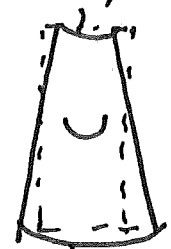


t.g.v. Normaalkracht $N = -6720 \text{ kN}$:

$$\sigma = \frac{N}{A} = - \frac{6720 \cdot 10^3}{480000} = -14 \text{ N/mm}^2$$

t.g.v. Buiging $M = 888 \text{ kNm}$ ∪ :

hoger, druk



lager, trek

bovenvezel druk, $z = 375 \text{ mm}$

$$\sigma = \frac{Mz}{I} = - \frac{888 \cdot 10^6 \cdot 375}{33,3 \cdot 10^9} = -10 \text{ N/mm}^2$$

ondervezel, trek, $z = 525 \text{ mm}$

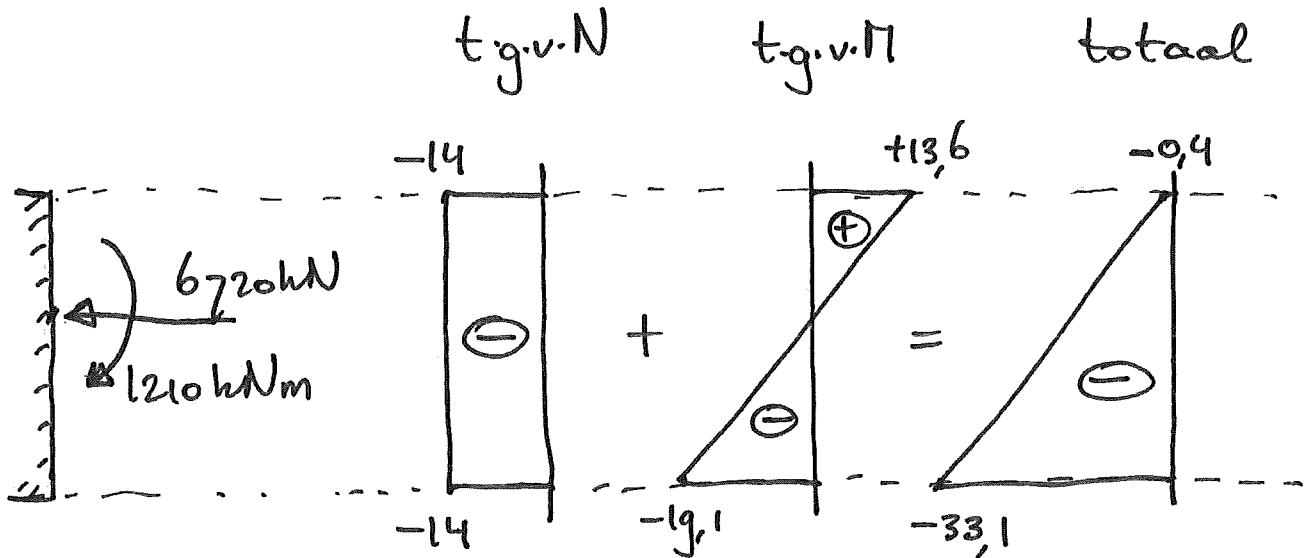
$$\sigma = \frac{Mz}{I} = + \frac{888 \cdot 10^6 \cdot 525}{33,3 \cdot 10^9} = +14 \text{ N/mm}^2$$

totaal: bovenvezel $-14 - 10 = -24 \text{ N/mm}^2$

ondervezel $-14 + 14 = 0$

--	--	--	--	--	--	--	--

e. Idem als d, maar nu voor de doorsnede ter plaatse van oplegging B.



t.g.v. Normaalkracht:

$$\sigma = -14 \text{ N/mm}^2 \text{ zelfde als bij d, constante N}$$

t.g.v. Buiging $M = 1210 \text{ kNm}$ $\wedge$:



bovenvezel trek, $z = 375 \text{ mm}$:

$$\sigma = \frac{Mz}{I} = + \frac{1210 \cdot 10^6 \cdot 375}{33,3 \cdot 10^9} = +13,6 \text{ N/mm}^2$$

ondervezel druk, $z = 525 \text{ mm}$:

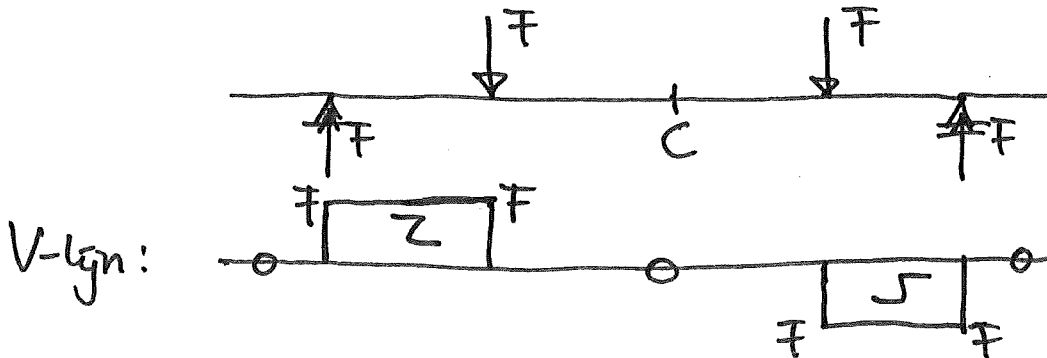
$$\sigma = \frac{Mz}{I} = - \frac{1210 \cdot 10^6 \cdot 525}{33,3 \cdot 10^9} = -19,1 \text{ N/mm}^2$$

totaal: bovenvezel $-14 + 13,6 = -0,4 \text{ N/mm}^2$

ondervezel $-14 - 19,1 = -33,1 \text{ N/mm}^2$

--	--	--	--	--	--	--	--

- f. Bereken de maximale schuifspanning in de balk, voor middendoorsnede C.



in middendoorsnede C:

$$V=0 \text{ dus } \tau=0 \text{ in hele middendoorsn. C}$$

- g. Bereken de maximale schuifspanning in de balk, voor de gehele balk (alle doorsneden). Waar treedt deze op?

In langsrichting: maximum waar V maximaal is, d.w.z. in de twee delen tussen de oplegging en de puntlast

In dwarsrichting: maximum t.p.v. NC.

$$\tau_{\max} = \frac{V \cdot S_a}{b \cdot I}$$

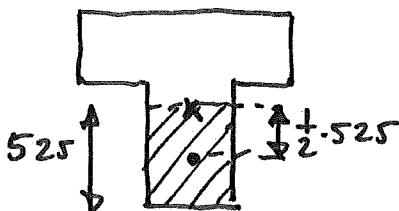
$$V_{\max} = 1049 \text{ kN} = 1049 \cdot 10^3 \text{ N}$$

$$b = 400 \text{ mm}$$

$$I = 33,3 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$$

$$S_a = 525 \cdot 400 \cdot \frac{1}{2} \cdot 525 = 55,1 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

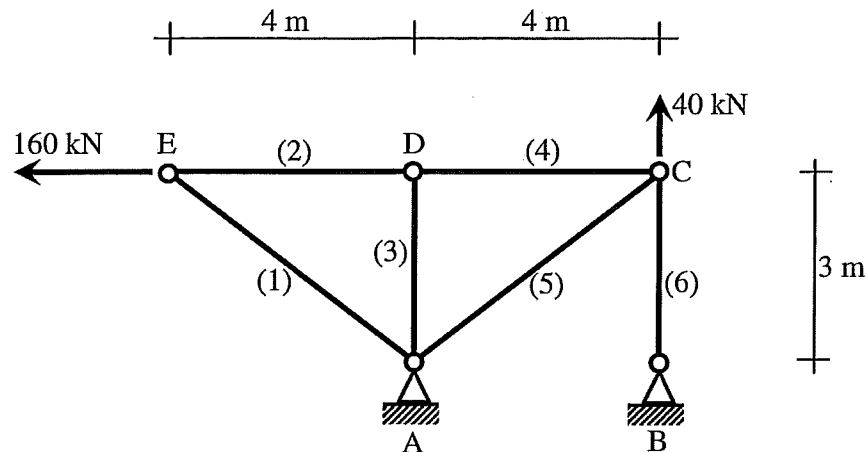
$$\tau_{\max} = \frac{1049 \cdot 10^3 \cdot 55,1 \cdot 10^6}{400 \cdot 33,3 \cdot 10^9} = 4,34 \text{ N/mm}^2$$



--	--	--	--	--	--	--

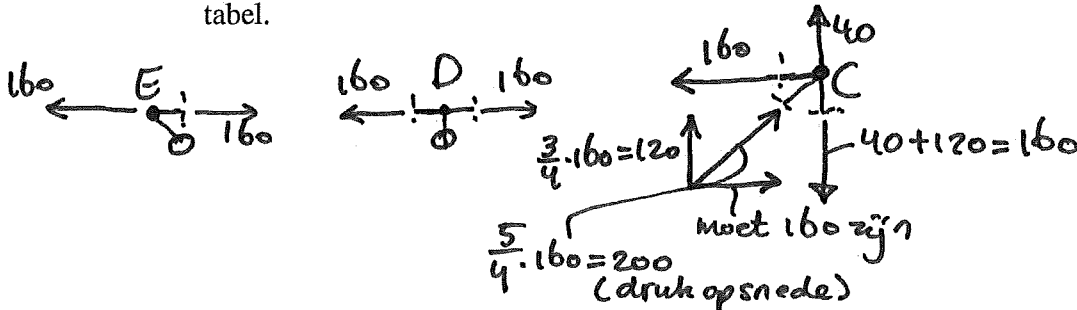
OPGAVE 3 (gewicht 2,0 – ongeveer 35 minuten)

Gegeven: onderstaand vakwerk. Afmetingen, belastingen en opleggingen zijn aangegeven. De rekstijfheid EA van de staven is aangegeven in onderstaande tabel.



Gevraagd:

- a. Bepaal de staafkrachten. Let op het teken (trek, druk of nul). Verzamel de gegevens in de tabel.

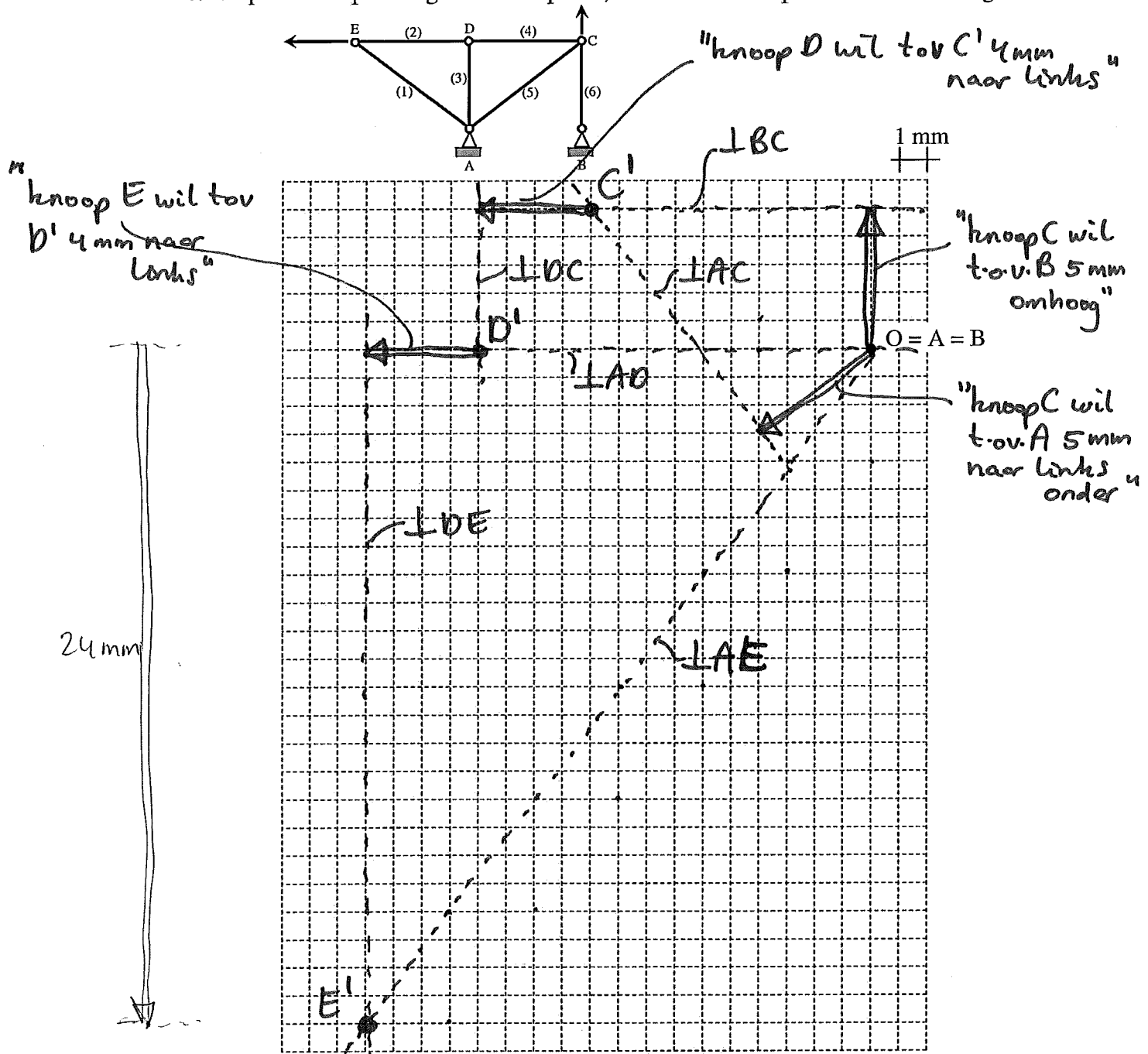


Staaf nr. i	N_i (kN)	l_i (m)	EA_i (MN)	Δl_i (mm)
1	0		200	0
2	+160	4	160	+4
3	0		160	0
4	+160	4	160	+4
5	-200	5	200	-5
6	+160	3	96	+5

- b. Bepaal voor alle staven de lengteverandering, in mm en met het goede teken voor verlenging of verkorting. Verzamel de gegevens in de tabel.

--	--	--	--	--	--	--

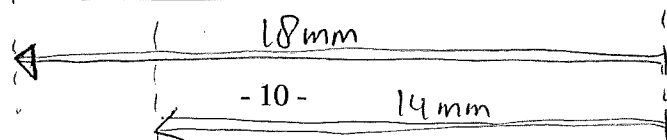
c. Bepaal de verplaatsing van de knopen C, D en E met behulp van een Williot-diagram.



d. Verzamel de gevonden horizontale verplaatsing (u_h) en verticale verplaatsing (u_v) van knoop D en E in onderstaande tabel. Geef met een pijltje de richting aan.

Knooppunt	u_h (mm)	u_v (mm)
D	14 ←	0
E	18 ←	24 ↓

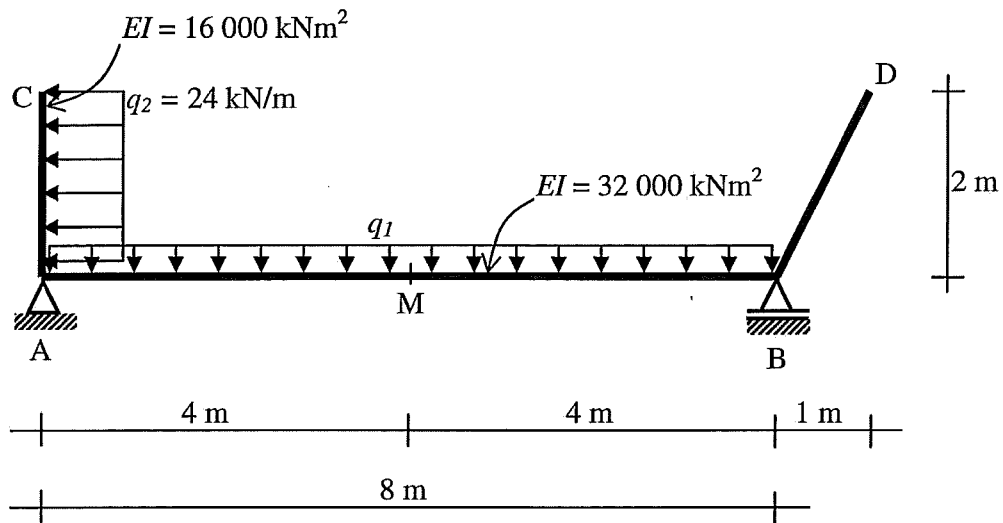
check: AD
nulstaaf 8



--	--	--	--	--	--

OPGAVE 4 (gewicht 2,0 - ongeveer 35 minuten)

Gegeven: een vrij opgelegde geknikte ligger CABD. De ligger wordt belast door twee gelijkmatig verdeelde belastingen, een gegeven last q_2 op AC en een nog onbekende last q_1 op AB. Maten, belastingen en buigstijfheden EI zijn aangegeven in de figuur. De buigstijfheden van AC en AB zijn verschillend. Een blad met vergeet-me-nietjes voor buigvervorming is toegevoegd aan dit antwoordformulier.



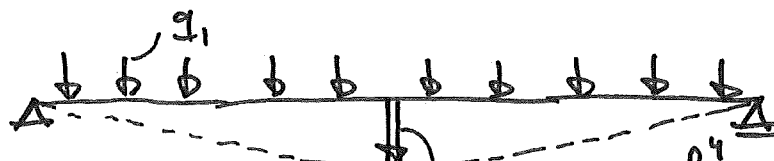
Gevraagd:

- a. De belasting q_1 zodanig dat de totale verticale verplaatsing in het midden M precies gelijk is aan nul.

$$K = \frac{1}{2} \cdot q_2 \cdot 2^2 = 48 \text{ kNm}$$

tgv. q_2 :

$$w_M = \frac{1}{16} \frac{K l^2}{EI} = \frac{1}{16} \frac{48 \cdot 8^2}{32000} = 0,006 \text{ m} \uparrow \quad (= 6 \text{ mm})$$

tgv q_1 :

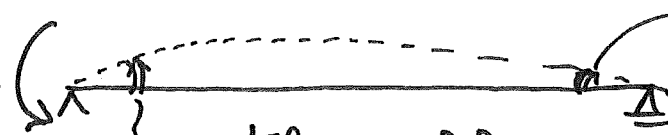
$$\frac{5}{384} \frac{q_1 \cdot 8^4}{32000} = 0,006$$

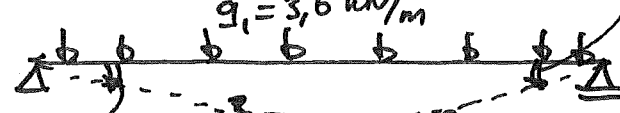
$$w_M = \frac{5}{384} \frac{q_1 l^4}{EI} \text{ moet gelijk zijn aan } 0,006 \text{ m} \downarrow \quad (\text{totaal is dan } 0)$$

$$\Rightarrow q_1 = \frac{0,006 \cdot 32000 \cdot 384}{5 \cdot 8^4} = \boxed{3,6 \text{ kN/m}}$$

--	--	--	--	--	--	--	--

- b. Uitgaande van de bij (a) gevonden waarde van q_1 en de gegeven waarde van q_2 : de hoekverdraaiing φ_A van A. Geef met een pijltje aan of het linksom of rechtsom is.

$K = 48 \text{ kNm}$

 $\varphi_B = \frac{1}{6} \frac{Kl}{EI} = 0,002 \text{ rad } \downarrow$
 $\varphi_A = \frac{1}{3} \frac{Kl}{EI} = \frac{1}{3} \cdot \frac{48 \cdot 8}{32000} = 0,004 \text{ rad } \uparrow$

$q_1 = 3,6 \text{ kN/m}$

 $\varphi_B = \varphi_A = 0,0024 \text{ rad } \uparrow$
 $\varphi_A = \frac{1}{24} \frac{q_1 l^3}{EI} = \frac{1}{24} \cdot \frac{3,6 \cdot 8^3}{32000} = 0,0024 \text{ rad } \downarrow$

totaal:
 $\varphi_A = 0,004 \uparrow + 0,0024 \downarrow$
 $= 0,0016 \text{ rad } \uparrow$

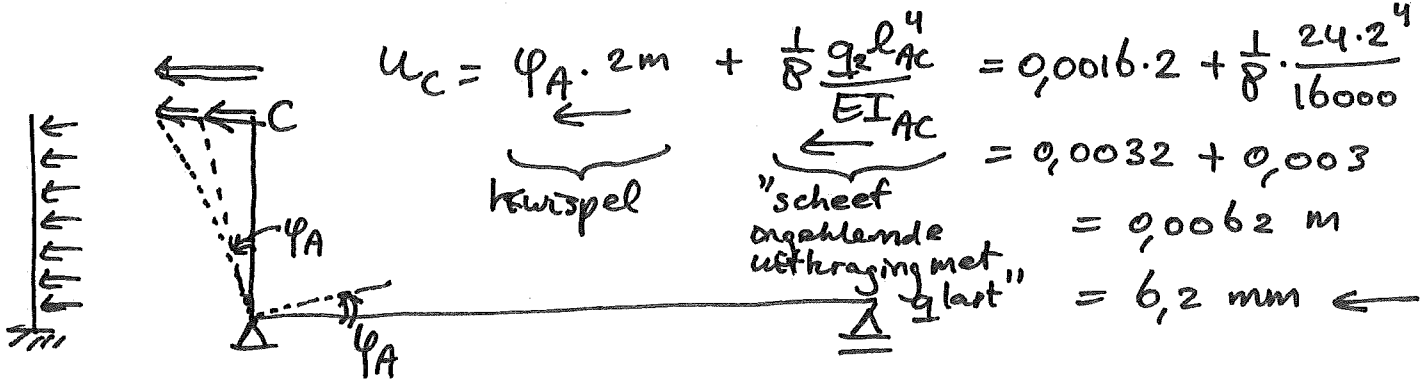
- c. Uitgaande van de bij (a) gevonden waarde van q_1 en de gegeven waarde van q_2 : de hoekverdraaiing φ_B van B. Geef met een pijltje aan of het linksom of rechtsom is.

zie bij b):

totaal: $\varphi_B = 0,002 \downarrow + 0,0024 \uparrow$
 $= 0,0004 \text{ rad } \uparrow$

--	--	--	--	--	--	--

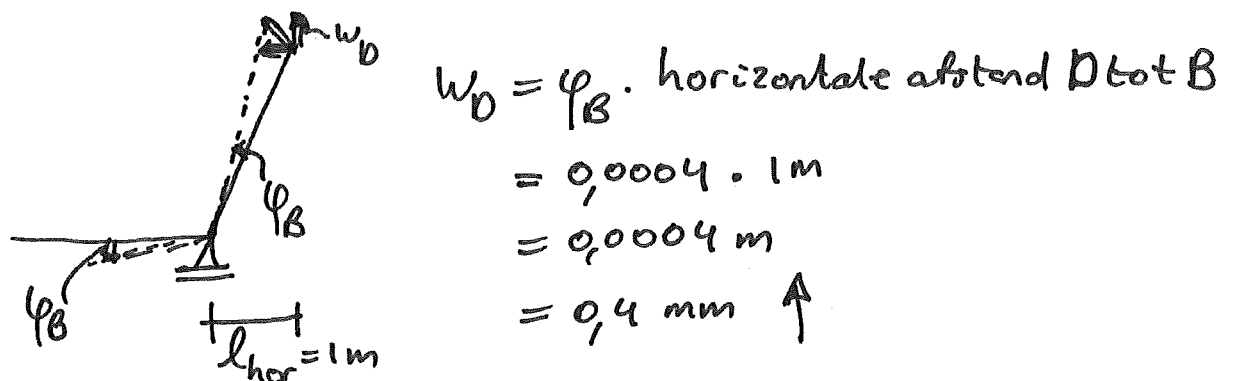
- d. Uitgaande van de bij (a) gevonden waarde van q_1 en de gegeven waarde van q_2 : de horizontale verplaatsing u_C van C. Geef met een pijltje aan of het naar links of naar rechts is.



$$u_C = \underbrace{\varphi_A \cdot 2\text{m}}_{\text{kwispel}} + \underbrace{\frac{1}{8} \frac{q_2 l_{AC}^4}{EI_{AC}}}_{\text{"scheef oghellende uithraging met q last"}} = 0,0016 \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot \frac{24 \cdot 2^4}{16000}$$

$$= 0,0032 + 0,003 = 0,0062 \text{ m} = 6,2 \text{ mm} \leftarrow$$

- e. Uitgaande van de bij (a) gevonden waarde van q_1 en de gegeven waarde van q_2 : de verticale verplaatsing w_D van D. Geef met een pijltje aan of het omhoog of omlaag is.



$$w_D = \varphi_B \cdot \text{horizontale afstand D tot B}$$

$$= 0,0004 \cdot 1\text{m}$$

$$= 0,0004 \text{ m}$$

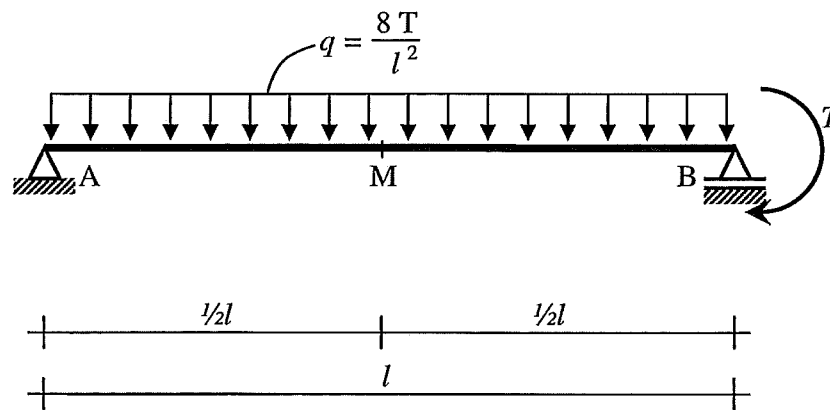
$$= 0,4 \text{ mm} \uparrow$$

--	--	--	--	--	--	--	--

OPGAVE 5 (gewicht 1,5 - ongeveer 30 minuten)

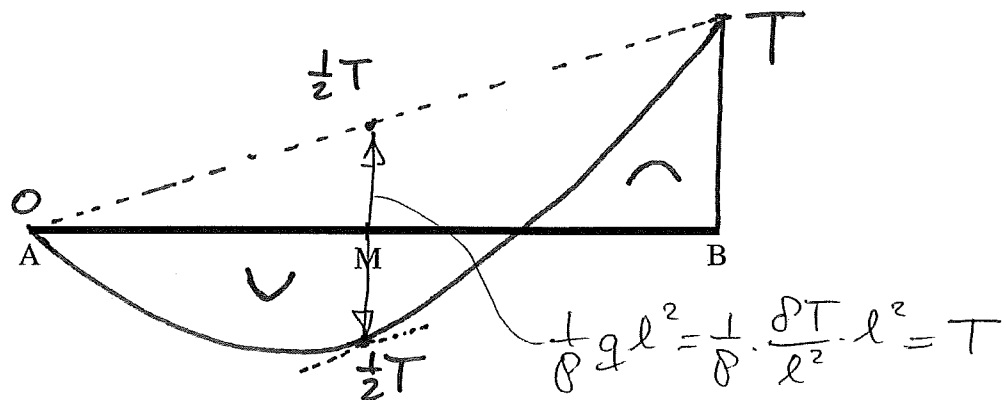
Gegeven: een vrij opgelegde ligger, belast door een gelijkmatig verdeelde belasting $q = 8 T / l^2$ en een koppel T als aangegeven.

Deze opgave dient te worden uitgewerkt met momentenvlakstellingen. Een blad met relevante oppervlakte-eigenschappen is toegevoegd aan dit antwoordformulier.



Gevraagd:

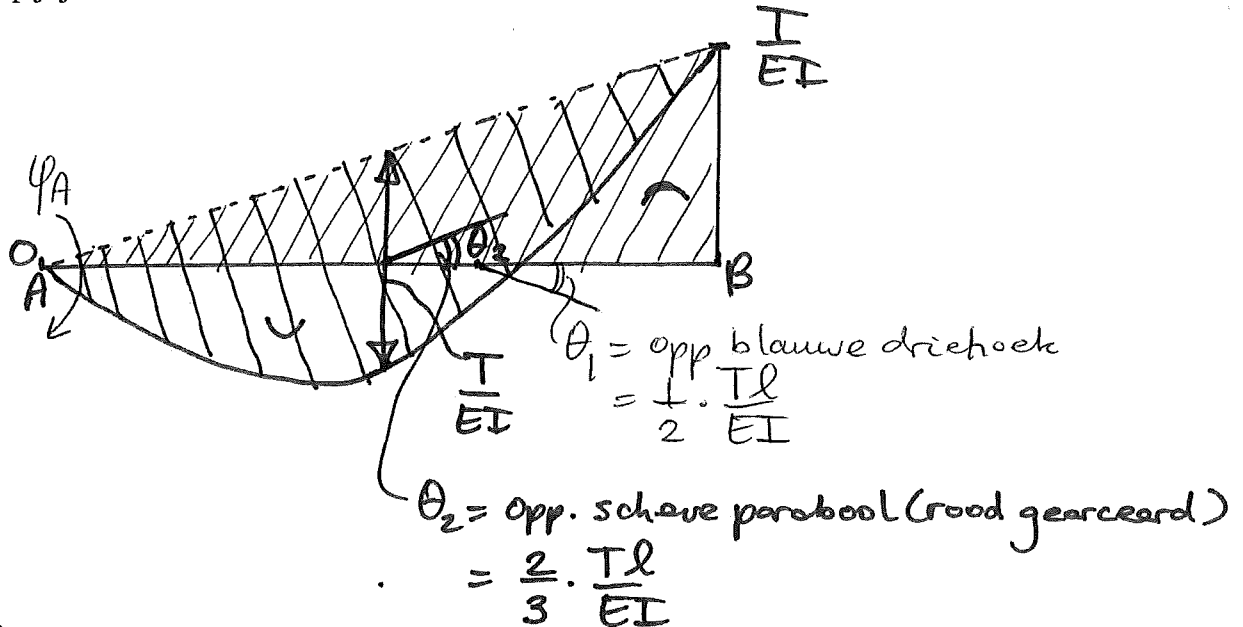
- a. Teken de momentenlijn in onderstaande figuur, met buigtekens en waarden erbij.



--	--	--	--	--	--	--

- b. Bereken (met de methode van momentenvlakstellingen) de rotatie van punt A. Geef met een pijltje aan of het linksom of rechtsom is.

$\frac{M}{EI}$ -vlak



De nog onbekende φ_A oplossen door de eis dat de verticale verplaatsing van B nul moet zijn.

Vanuit A naar B kijken.

$\curvearrowright^+$
 $\downarrow^+$

$$w_B = \varphi_A \cdot l - \theta_2 \cdot \frac{1}{2}l + \theta_1 \cdot \frac{1}{3}l \stackrel{\downarrow \text{ eis}}{=} 0$$

$$\Rightarrow \varphi_A \cdot l - \frac{2}{3} \frac{Tl}{EI} \cdot \frac{1}{2}l + \frac{1}{2} \frac{Tl}{EI} \cdot \frac{1}{3}l = 0$$

$$\Rightarrow \varphi_A - \frac{1}{3} \frac{Tl}{EI} + \frac{1}{6} \frac{Tl}{EI} = 0 \Rightarrow \boxed{\varphi_A = + \frac{1}{6} \frac{Tl}{EI}} \quad \Delta$$

betekent: in
 vooraf aangenomen
 richting $\downarrow$

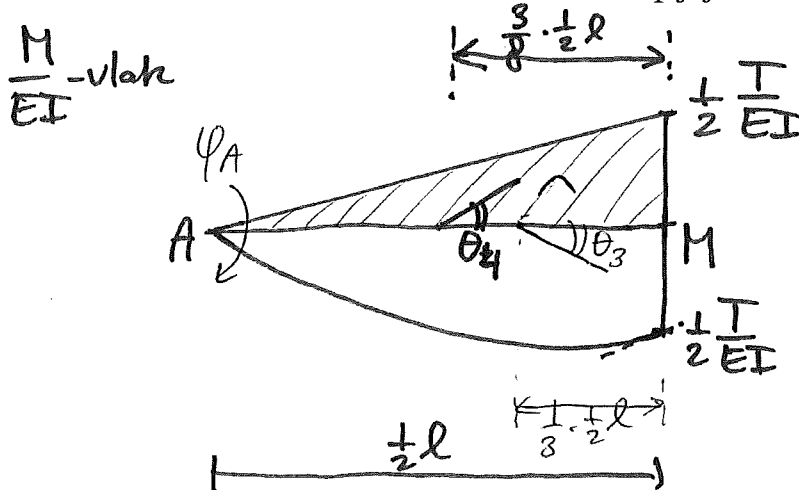
- c. Bereken (met de methode van momentenvlakstellingen) de rotatie van punt B. Geef met een pijltje aan of het linksom of rechtsom is.

$$\begin{aligned} \varphi_B &= \varphi_A - \theta_2 + \theta_1 = + \frac{1}{6} \frac{Tl}{EI} - \frac{2}{3} \frac{Tl}{EI} + \frac{1}{2} \frac{Tl}{EI} \\ &= \left(\frac{1}{6} - \frac{4}{6} + \frac{3}{6} \right) \frac{Tl}{EI} \\ &= \boxed{0} \end{aligned}$$

(alternatief: vanuit B naar A kijken en eisen $w_A = 0$)

--	--	--	--	--	--	--	--

- d. Bereken (met de methode van momentenvlakstellingen) de verticale verplaatsing van de middendoorsnede M. Geef met een pijltje aan of het omhoog of omlaag is.



$$\varphi_A = \frac{1}{6} \frac{Tl}{EI} \downarrow$$

$$\theta_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \frac{T}{EI} \cdot \frac{1}{2} l$$

$$= \frac{1}{8} \frac{Tl}{EI} \downarrow$$

$$\theta_4 = \text{opp. parabool t.o.v. sluitlijn}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{T}{EI} \cdot \frac{1}{2} l$$

$$= \frac{1}{3} \frac{Tl}{EI} \uparrow$$

$\downarrow +$

$$w_M = \varphi_A \cdot \frac{1}{2} l - \theta_4 \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} l + \theta_3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} l$$

$$= \frac{1}{6} \frac{Tl}{EI} \cdot \frac{1}{2} l - \frac{1}{3} \frac{Tl}{EI} \cdot \frac{3}{16} l + \frac{1}{8} \frac{Tl}{EI} \cdot \frac{1}{6} l$$

$$= \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{16} + \frac{1}{48} \right) \frac{Tl^2}{EI} =$$

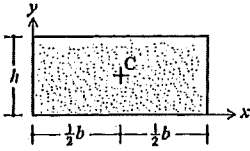
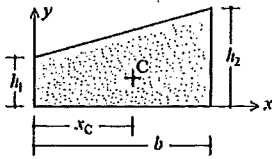
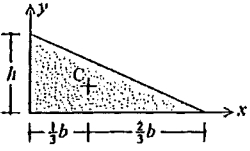
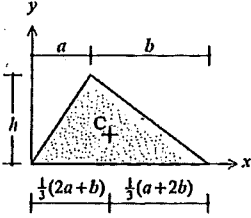
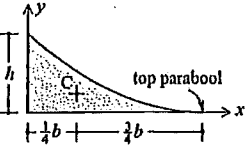
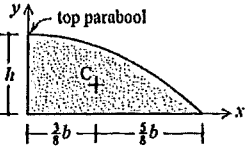
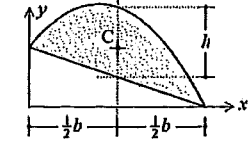
$$= \left(\frac{4}{48} - \frac{3}{48} + \frac{1}{48} \right) \frac{Tl^2}{EI} =$$

$$= \frac{1}{24} \frac{Tl^2}{EI}$$

--	--	--	--	--	--	--

Oppervlakte-eigenschappen voor gebruik bij de momentenvlakstelling

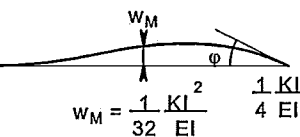
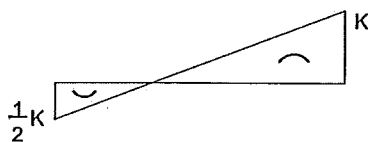
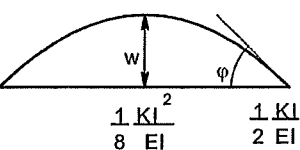
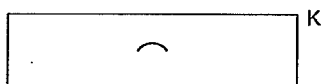
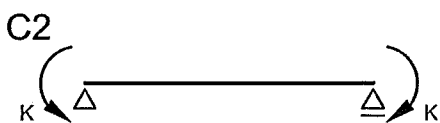
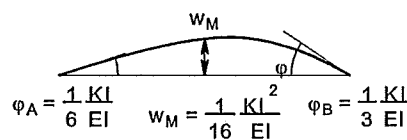
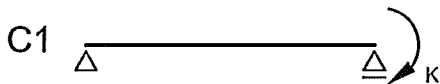
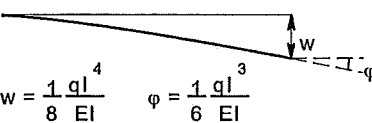
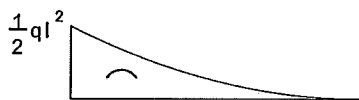
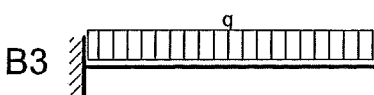
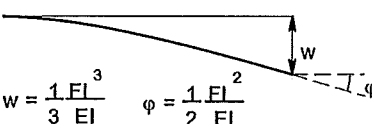
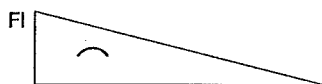
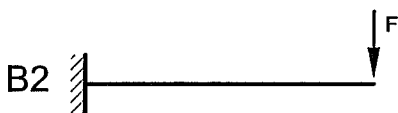
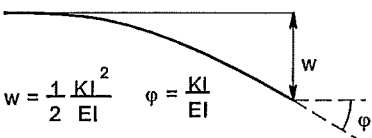
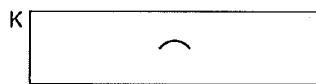
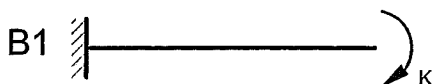
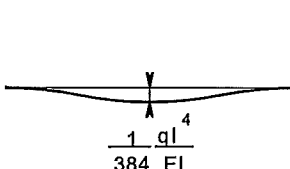
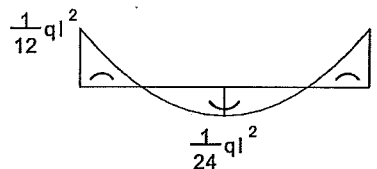
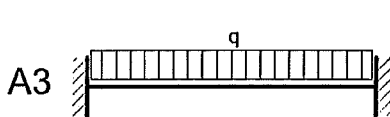
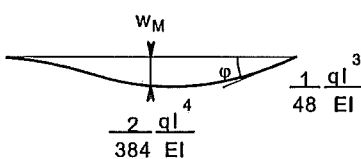
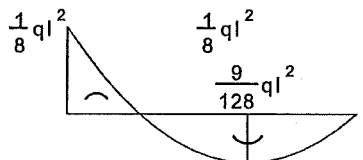
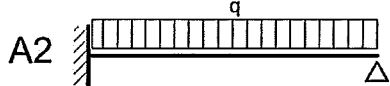
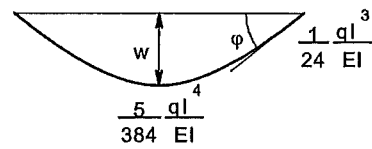
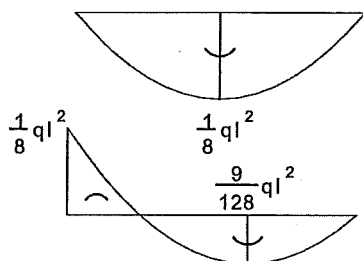
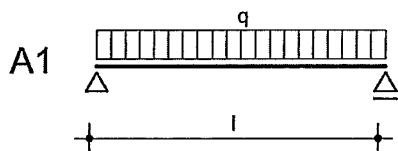
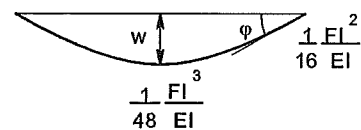
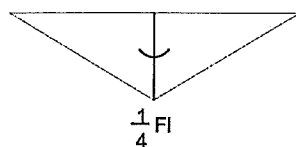
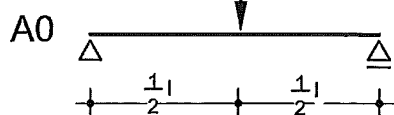
Oppervlakte-eigenschappen die veelvuldig worden gebruikt bij de momentenvlakstellingen

 rechthoek: $A = bh$ $x_C = \frac{1}{2}b$	 trapezium: $A = \frac{1}{2}b(b_1 + b_2)$ $x_C = \frac{1}{3}b \frac{b_1 + 2b_2}{b_1 + b_2}$
 driehoek: $A = \frac{1}{2}bh$ $x_C = \frac{1}{3}b$	 driehoek: $A = \frac{1}{2}(a + b)h$ $x_C = \frac{1}{3}(2a + b)$
 parabool: $A = \frac{1}{3}bh$ $x_C = \frac{1}{4}b$	
 parabool: $A = \frac{2}{3}bh$ $x_C = \frac{3}{8}b$	 parabool: $A = \frac{2}{3}bh$ $x_C = \frac{1}{2}b$

Schema

Momentenlijn

Doorbuiging en hoekverdraaiing



--	--	--	--	--	--	--	--

Antwoordformulier

CT1041 Constructiemechanica 2

5 ECTS

Zet op alle bladen uw naam en studienummer.

Bladen zonder naam en studienummer worden niet geaccepteerd.

Relevante berekeningen vermelden.

Antwoorden zonder berekening/motivering worden niet gehonoreerd.

Gebruik zo nodig de onbedrukte zijden van het antwoordformulier.

Tenzij anders vermeld wordt het **eigen gewicht van een constructie buiten beschouwing** gelaten.

Een blad met relevante **vergeet-me-nietjes** voor buigvervorming is toegevoegd aan dit antwoordformulier.

Een blad met relevante **oppervlakte-eigenschappen** voor gebruik bij de momentenvlakstellingen is toegevoegd aan dit antwoordformulier.

Benut controlemogelijkheden om rekenfouten te vermijden.

Maak de opgaven in een volgorde naar eigen keuze.

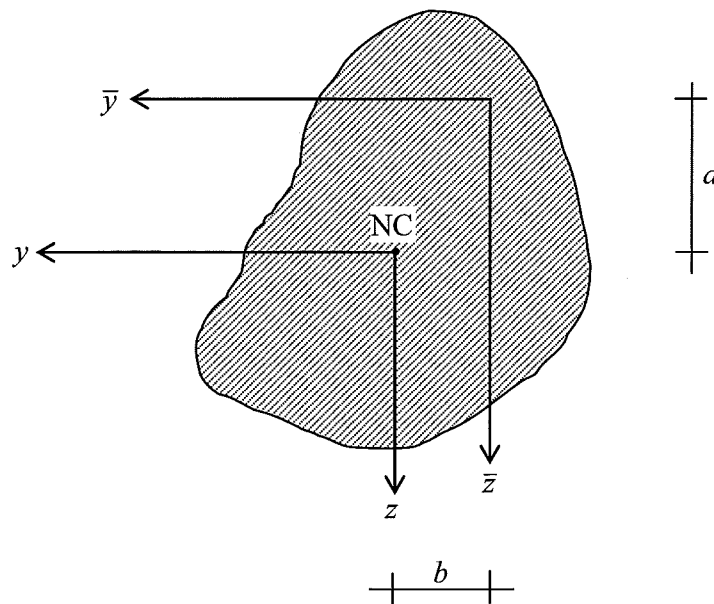
Let op: er zijn **5 opgaven**.

vraag	score
1	
2	
3	
4	
5	
totaal	

--	--	--	--	--	--	--

OPGAVE 1 (gewicht 1,0 - ongeveer 20 minuten)

Gegeven: onderstaande willekeurige doorsnede met oppervlakte A . Twee assenstelsels en de afstanden a en b tussen de assen zijn aangegeven. NC is het normaalkrachten centrum/zwaartepunt van de doorsnede. Werk onderstaande vragen uit voor buiging om de horizontale assen y en $\bar{y}$.



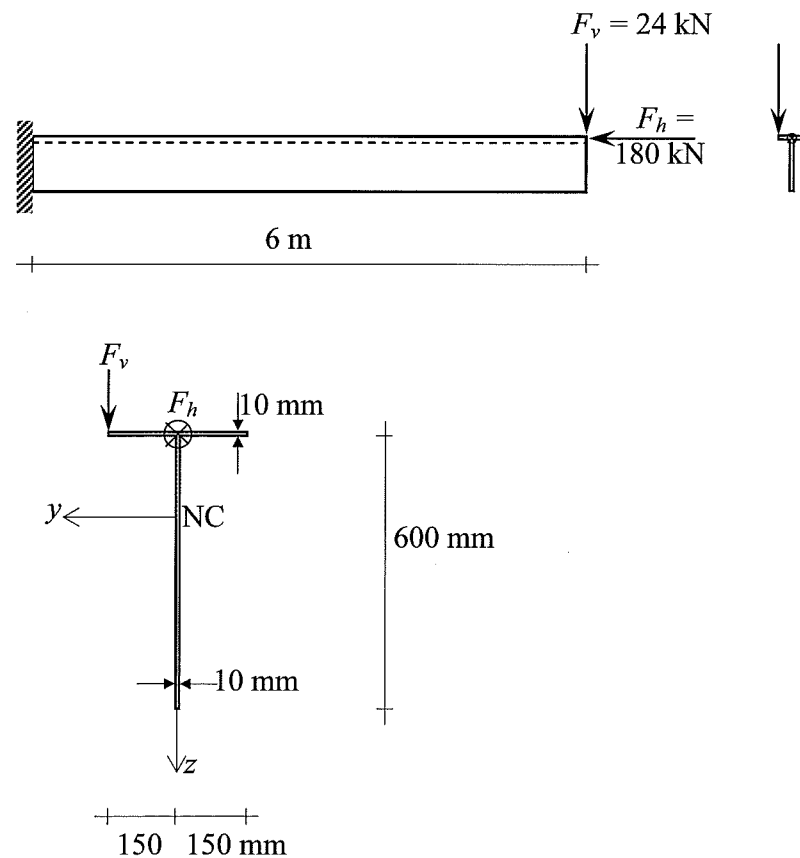
Gevraagd:

- Hoe luidt de verschuivingsregel van Steiner, in formulevorm? (voor buiging om de horizontale assen y en $\bar{y}$).
- Geef de afleiding van deze verschuivingsregel van Steiner (voor buiging om de horizontale assen y en $\bar{y}$). Begin met de integraal voor het traagheidsmoment bij buiging om de $\bar{y}$ -as.

--	--	--	--	--	--	--

OPGAVE 2 (gewicht 3,0 - ongeveer 55 minuten)

Gegeven: onderstaande ligger met *dunwandige* doorsnede is aan de linkerzijde ingeklemd en aan het vrije einde belast door een verticale kracht F_v en een horizontale kracht F_h als aangegeven. De afmetingen van de doorsnede en de posities en richtingen van de beide krachten zijn aangegeven. Let op: u dient de doorsnede daadwerkelijk te behandelen als een dunwandige doorsnede.



Gevraagd:

- Bepaal de ligging van het normaalkrachten centrum NC van de doorsnede.

--	--	--	--	--	--	--	--

b. Toon aan dat het relevante traagheidsmoment van de doorsnede gelijk is aan $3,6 \times 10^8 \text{ mm}^4$.

c. Bereken de maximale (normaal-)trekspanning in de ligger. Waar treedt deze op? Geef de positie aan in langs- en dwarsrichting.

--	--	--	--	--	--	--

- d. Bereken de maximale (normaal-)drukspanning in de ligger. Waar treedt deze op? Geef de positie aan in langs- en dwarsrichting.
- e. Bereken voor de inklemmingsdoorsnede: de maximale schuifspanning ten gevolge van de dwarskracht.

--	--	--	--	--	--	--	--

- f. Schets het verloop van de schuifspanningen ten gevolge van de dwarskracht, voor de inklemmingsdoorsnede, als diagram en met pijltjes.

- g. Bereken voor de inklemmingsdoorsnede: de maximale schuifspanning ten gevolge van wringing. Aanwijzing: enkele formules voor wringing zijn: $\tau = M_t r / I_t$, $\tau = M_t e / (\frac{1}{2} I_t)$ met $I_t = \sum \frac{1}{3} h t^3$ en $\tau = M_t / (2 A_m t)$.

- h. Schets het verloop van de schuifspanningen ten gevolge van wringing, voor de inklemmingsdoorsnede, als diagram en met pijltjes.

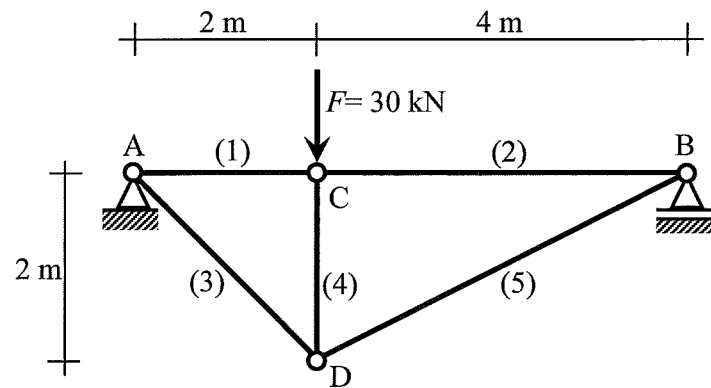
--	--	--	--	--	--	--	--

- i. Bepaal voor de inklemmingsdoorsnede: de maximale schuifspanning ten gevolge van de combinatie van dwarskracht en wringing. Geef met een schets de positie aan waar deze optreedt.

OPGAVE 3 (gewicht 2,0 – ongeveer 35 minuten)

Gegeven: onderstaand vakwerk. Afmetingen, belasting en opleggingen zijn aangegeven. De rekstijfheid EA van de staven 1, 2 en 4 is 20 MN, van staaf 3 $20\sqrt{2}$ MN en van staaf 5 $10\sqrt{5}$ MN.

--	--	--	--	--	--	--	--



Gevraagd:

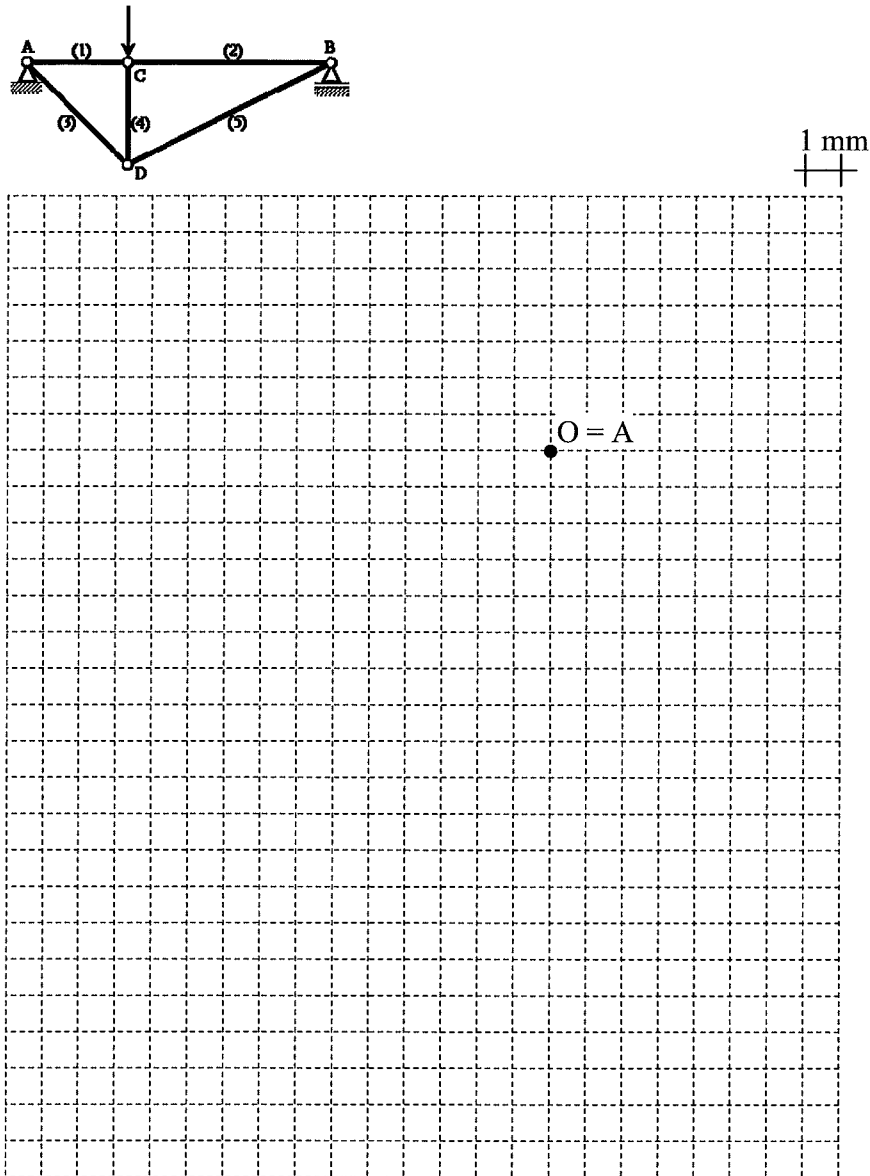
- a. Bepaal de staafkrachten. Let op het teken (trek of druk). Verzamel de gegevens in de tabel.

Staafr. i	N_i (kN)	l_i (mm)	EA_i (MN)	Δl_i (mm)
1			20	
2			20	
3			$20\sqrt{2}$	
4			20	
5			$10\sqrt{5}$	

- b. Bepaal voor alle staven de lengteverandering, in mm en met het goede teken voor verlenging of verkorting. Verzamel de gegevens in de tabel.

--	--	--	--	--	--	--

- c. Bepaal de verplaatsing van de knopen D en C met behulp van een Williot-diagram.



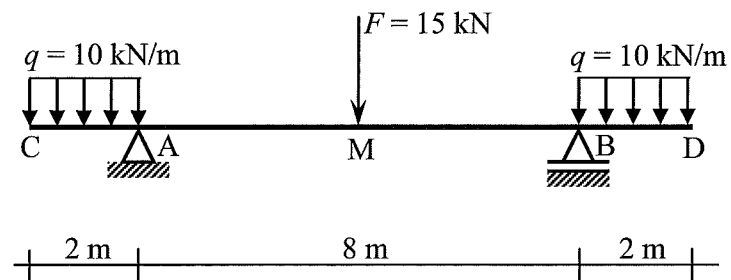
- d. Verzamel de gevonden horizontale verplaatsing (u_h) en verticale verplaatsing (u_v) van knoop D en C in onderstaande tabel. Geef met een pijltje de richting aan.

Knooppunt	u_h (mm)	u_v (mm)
D		
C		

--	--	--	--	--	--	--

OPGAVE 4 (gewicht 2,0 - ongeveer 35 minuten)

Gegeven: een vrij opgelegde ligger met overstekken. De ligger wordt belast door een puntlast in het midden en een gelijkmatig verdeelde belasting op de overstekken. Maten, belastingen en buigstijfheid EI zijn aangegeven in de figuur. Een blad met vergeet-me-nietjes voor buigvervorming is toegevoegd aan dit antwoordformulier.



$$EI = 20\,000 \text{ kNm}^2$$

Gevraagd:

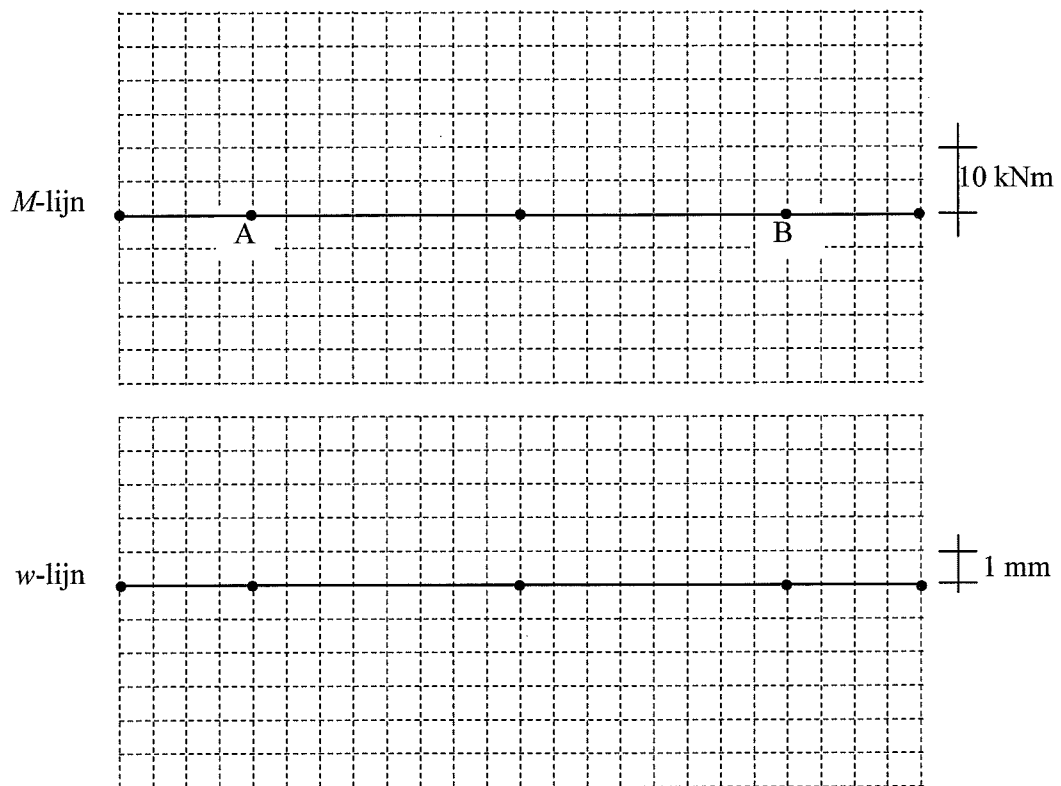
- a. De verticale verplaatsing w_M van M. Geef met een pijltje aan of het omhoog of omlaag is.

--	--	--	--	--	--	--	--

-
- b. De hoekverdraaiing φ_A van A. Geef met een pijltje aan of het linksom of rechtsom is.
- c. De hoekverdraaiing φ_B van B. Geef met een pijltje aan of het linksom of rechtsom is.
- d. De hoekverdraaiing φ_C van C. Geef met een pijltje aan of het linksom of rechtsom is.
- e. De verticale verplaatsing w_C van C. Geef met een pijltje aan of het omhoog of omlaag is.

--	--	--	--	--	--	--

- f. Schets onderstaand de momentenlijn en de doorbuigingslijn. Geef markante punten aan. Zet waarden erbij. Teken ook hellingen/raaklijnen aan de doorbuigingslijn erin.

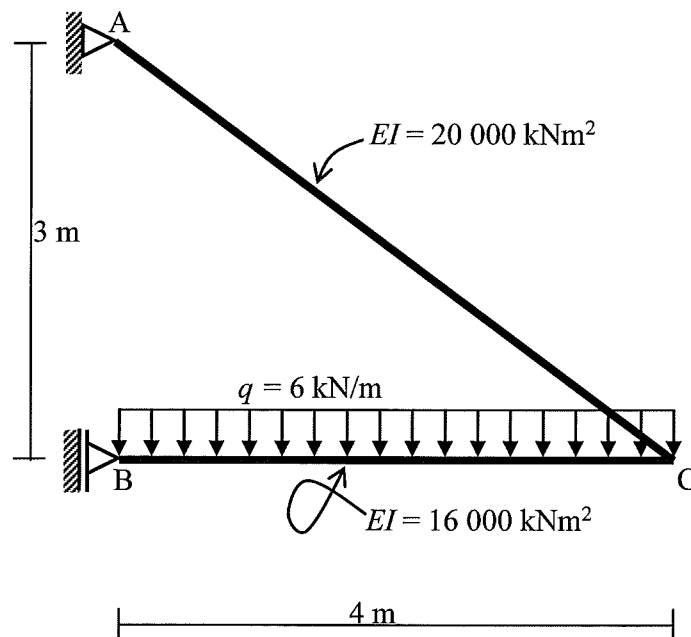


--	--	--	--	--	--	--

OPGAVE 5 (gewicht 2,0 - ongeveer 35 minuten)

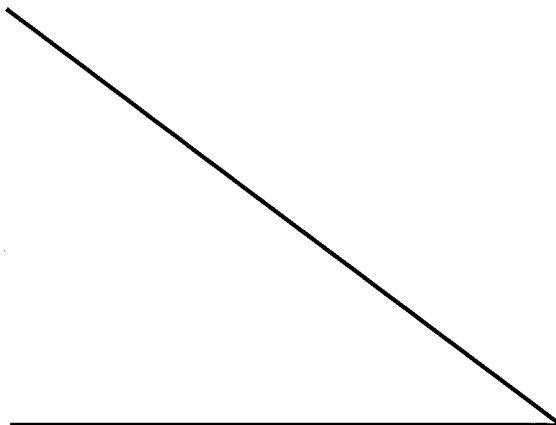
Gegeven: onderstaande constructie ACB. Maten, opleggingen, belasting en de (verschillende) buigstijfheden van AC en BC zijn aangegeven in de figuur. Normalkrachtvervorming wordt verwaarloosd ten opzichte van buigvervorming.

Deze opgave dient te worden uitgewerkt met momentenvlakstellingen. Een blad met relevante oppervlakte-eigenschappen is toegevoegd aan dit antwoordformulier.



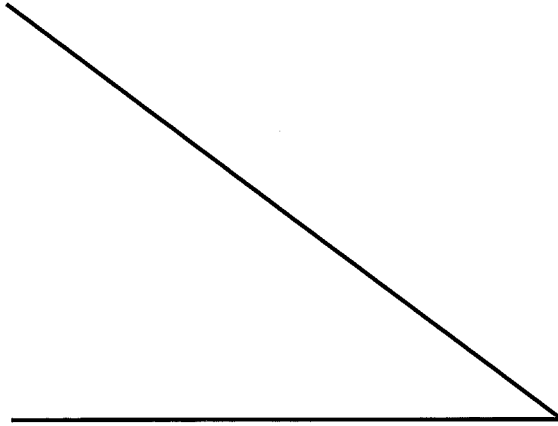
Gevraagd:

- a. Teken de momentenlijn in onderstaande figuur, met buigtekens en waarden erbij.



--	--	--	--	--	--	--	--

- b. Bereken de rotatie van punt A. Geef met een pijltje aan of het linksom of rechtsom is.



Technische Universiteit Delft

Faculteit CiTG

Tentamen CT1041 Constructiemechanica 2

10 april 2012 van 09.00-12.00 uur

STUDIENUMMER

NAAM

--	--	--	--	--	--	--	--

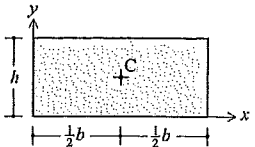
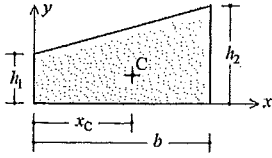
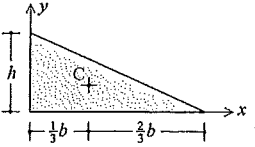
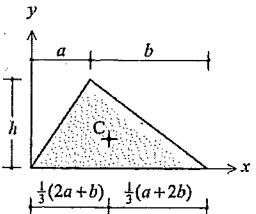
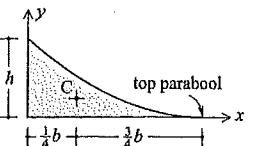
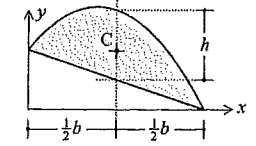
- c. Bereken de verticale verplaatsing van de rol in punt B, in mm. Geef met een pijltje aan of het omhoog of omlaag is.

- d. Bereken de rotatie van punt C. Geef met een pijltje aan of het linksom of rechtsom is.

--	--	--	--	--	--	--

Oppervlakte-eigenschappen voor gebruik bij de momentenvlakstelling

Oppervlakte-eigenschappen die veelvuldig worden gebruikt bij de momentenvlakstellingen

 rechthoek: $A = bh$ $x_C = \frac{1}{2}b$	 trapezium: $A = \frac{1}{2}b(h_1 + h_2)$ $x_C = \frac{1}{3}b \frac{h_1 + 2h_2}{h_1 + h_2}$
 driehoek: $A = \frac{1}{2}bh$ $x_C = \frac{1}{3}b$	 driehoek: $A = \frac{1}{2}(a+b)h$ $x_C = \frac{1}{3}(2a+b)$
 parabool: $A = \frac{1}{3}bh$ $x_C = \frac{1}{4}b$	 parabool: $A = \frac{2}{3}bh$ $x_C = \frac{3}{8}b$

Technische Universiteit Delft

Faculteit CiTG

Tentamen CT1041 Constructiemechanica 2

10 april 2012 van 09.00-12.00 uur

STUDIENUMMER

NAAM

--	--	--	--	--	--	--	--

Vergeet-me-nietjes met Bk-formuleblad, op volledig papier, handgedaan erbij gevoegd op groot bladformaat, want anders werd hete te klein

--	--	--	--	--	--	--	--

Jan Rots

Antwoordformulier

CT1041 Constructiemechanica 2

5 ECTS

UITWERKINGEN

Zet op alle bladen uw naam en studienummer.

Bladen zonder naam en studienummer worden niet geaccepteerd.

Relevante berekeningen vermelden.

Antwoorden zonder berekening/motivering worden niet gehonoreerd.

Gebruik zo nodig de onbedrukte zijden van het antwoordformulier.

Tenzij anders vermeld wordt het **eigen gewicht van een constructie** buiten beschouwing gelaten.

Een blad met relevante **vergeet-me-nietjes** voor buigvervorming is toegevoegd aan dit antwoordformulier.

Een blad met relevante **oppervlakte-eigenschappen** voor gebruik bij de momentenvlakstellingen is toegevoegd aan dit antwoordformulier.

Benut controlemogelijkheden om rekenfouten te vermijden.

Maak de opgaven in een volgorde naar eigen keuze.

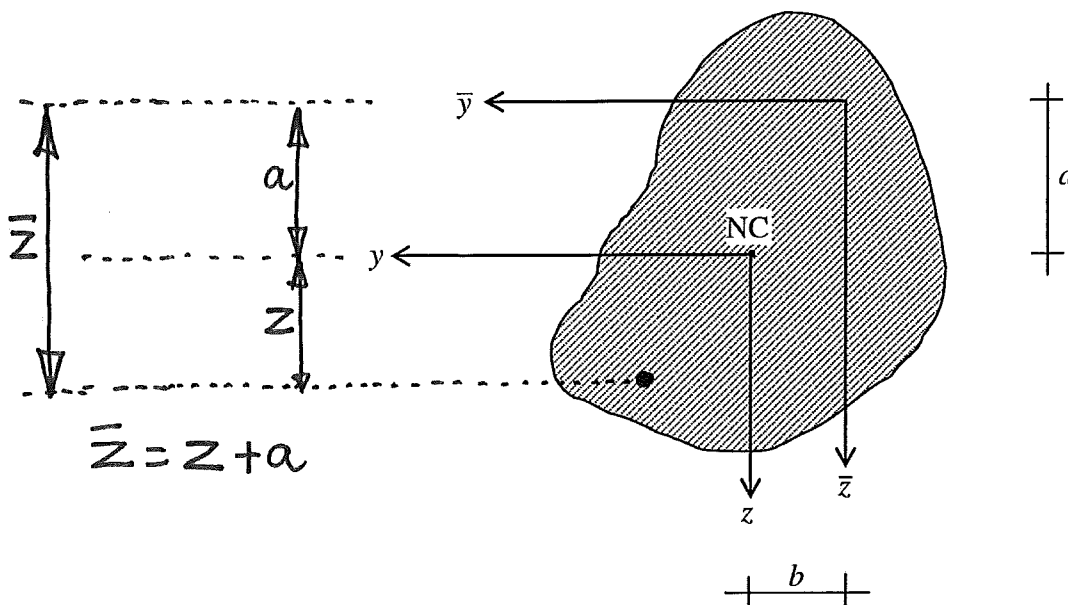
Let op: er zijn **5 opgaven**.

vraag	score
1	
2	
3	
4	
5	
totaal	

--	--	--	--	--	--	--

OPGAVE 1 (gewicht 1,0 - ongeveer 20 minuten)

Gegeven: onderstaande willekeurige doorsnede met oppervlakte A . Twee assenstelsels en de afstanden a en b tussen de assen zijn aangegeven. NC is het normaalkrachtencentrum/zwaartepunt van de doorsnede. Werk onderstaande vragen uit voor buiging om de horizontale assen y en $\bar{y}$.



Gevraagd:

- a. Hoe luidt de verschuivingsregel van Steiner, in formulevorm? (voor buiging om de horizontale assen y en $\bar{y}$). $\rightarrow$ gaat om positie van het materiaal t.o.v. y en $\bar{y}$ -as, d.w.z. om de z en $\bar{z}$ coördinaten, dus om I_{zz} en $I_{\bar{z}\bar{z}}$ Steiner: $I_{\bar{z}\bar{z}} = I_{zz} + a^2 A$

- b. Geef de afleiding van deze verschuivingsregel van Steiner (voor buiging om de horizontale assen y en $\bar{y}$). Begin met de integraal voor het traagheidsmoment bij buiging om de $\bar{y}$ -as.

$$I_{\bar{z}\bar{z}} = \int \bar{z}^2 dA = \int (z+a)^2 dA = \int (z^2 + 2az + a^2) dA = \int z^2 dA + 2a \int z dA + \int a^2 dA$$

Gegeven: y, z -assen door NC
d.w.z. zwaartelijnen $\rightarrow \int z dA = 0$ $\Rightarrow$

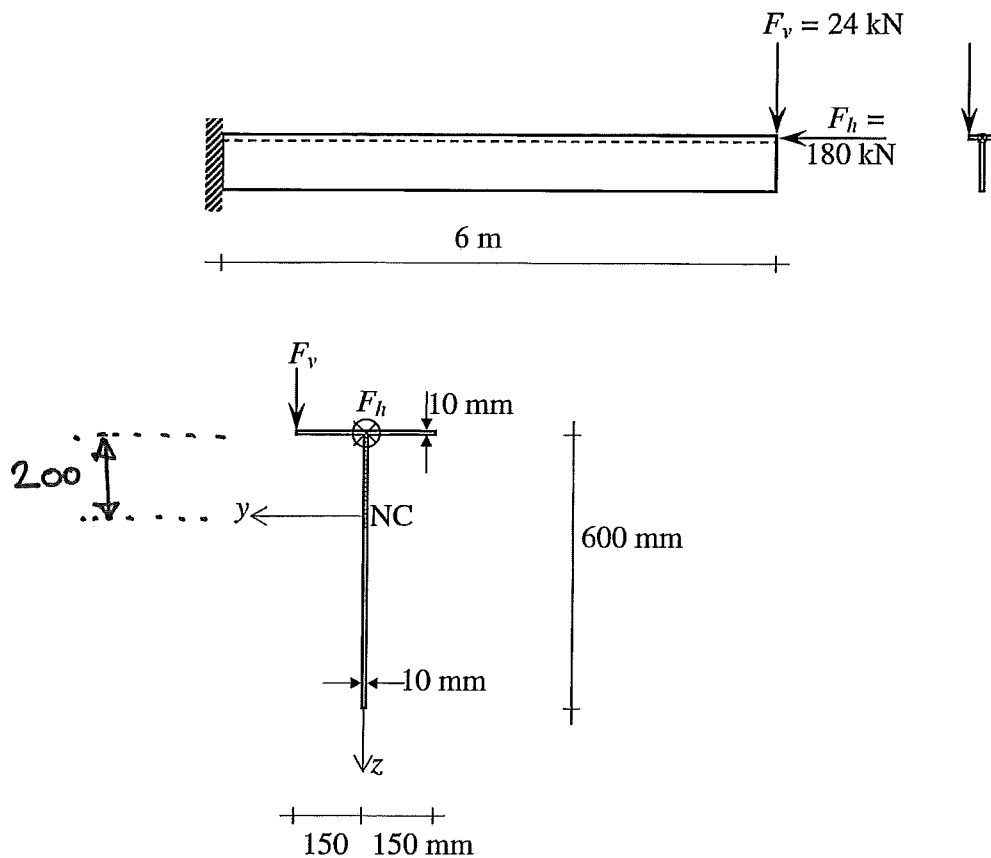
$$\Rightarrow I_{\bar{z}\bar{z}} = I_{zz} + 0 + a^2 \int dA$$

$$\Rightarrow I_{\bar{z}\bar{z}} = I_{zz} + a^2 A$$

--	--	--	--	--	--	--

OPGAVE 2 (gewicht 3,0 - ongeveer 55 minuten)

Gegeven: onderstaande ligger met *dunwandige* doorsnede is aan de linkerzijde ingeklemd en aan het vrije einde belast door een verticale kracht F_v en een horizontale kracht F_h als aangegeven. De afmetingen van de doorsnede en de posities en richtingen van de beide krachten zijn aangegeven. Let op: u dient de doorsnede daadwerkelijk te behandelen als een dunwandige doorsnede.



Gevraagd:

- a. Bepaal de ligging van het normaalkrachten centrum NC van de doorsnede.

t.o.v. bovenas:

$$\frac{10 \cdot 600 \cdot \frac{1}{2} \cdot 600}{(10 \cdot 300 + 10 \cdot 600)} = \frac{1800000}{9000} = 200 \text{ mm}$$

$\uparrow$
 A_{totaal}

--	--	--	--	--	--	--

- b. Toon aan dat het relevante traagheidsmoment van de doorsnede gelijk is aan $3,6 \times 10^8 \text{ mm}^4$.

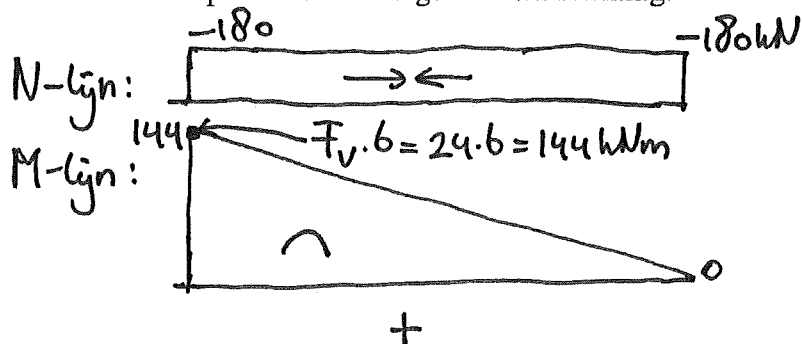
buiging om y-as

$$I_{zz} = \underbrace{\left(\frac{1}{12} \cdot 10 \cdot 600^3 + 100^2 \cdot 600 \cdot 10 \right)}_{\text{lijf}} + \underbrace{\left(\frac{1}{12} \cdot 300 \cdot 10^3 + 200^2 \cdot 300 \cdot 10 \right)}_{\substack{\text{verwaarsloosbaar} \\ \text{flens}}}$$

$$= 1,8 \cdot 10^8 + 0,6 \cdot 10^8 + 1,2 \cdot 10^8$$

$$= 3,6 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

- c. Bereken de maximale (normaal-)trekspanning in de ligger. Waar treedt deze op? Geef de positie aan in langs- en dwarsrichting.

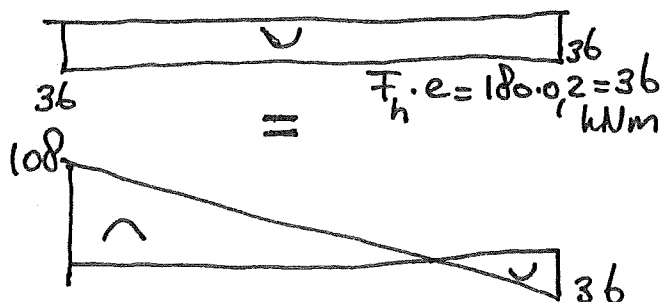


$$\sigma_{\perp v N} = \frac{N}{A} = \frac{-180 \cdot 10^3}{9000} = -20 \text{ N/mm}^2$$

trek

druk

$$\sigma_{\perp v M} = \frac{M \cdot z}{I}$$



bovenvezel:

trek

$z = 200 \text{ mm}$

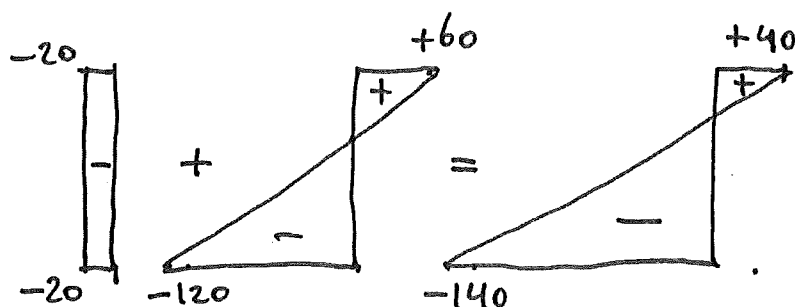
$$\sigma_{\perp v M} = \frac{108 \cdot 10^6 \cdot 200}{3,6 \cdot 10^8} = +60 \text{ N/mm}^2$$

ondervezel:

druk

$z = 400 \text{ mm}$

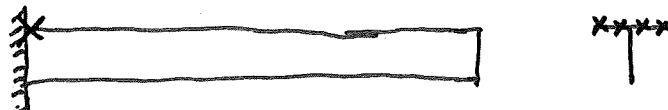
$$\sigma_{\perp v M} = -\frac{108 \cdot 10^6 \cdot 400}{3,6 \cdot 10^8} = -120 \text{ N/mm}^2$$



--	--	--	--	--	--	--	--

$$\text{max. trekspanning} = +40 \text{ N/mm}^2$$

bij inklemningsdoorsnede, bovenin, hele bovenflens



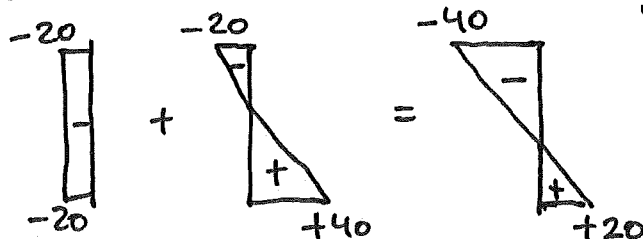
- d. Bereken de maximale (normaal-)drukspanning in de ligger. Waar treedt deze op? Geef de positie aan in langs- en dwarsrichting.

ziec.

$$\text{max. drukspanning} = -140 \text{ N/mm}^2$$

bij inklemningsdoorsnede, onderin lijf

(controle: einddoorsnede M tegengesteld, maar slechts 36 kNm



niet maatgevend,
noch voor trek,
noch voor druk)

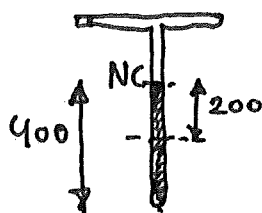


- e. Bereken voor de inklemningsdoorsnede: de maximale schuifspanning ten gevolge van de dwarskracht.

$$\tau = \frac{V \cdot S_a}{b I}$$

$$V = 24 \cdot 10^3 \text{ N}$$

$$S_a \text{ max. tpu NC} = 400 \cdot 10 \cdot 200 = 800000 \text{ mm}^3$$



$$b = 10 \text{ mm}$$

$$I = 3,6 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

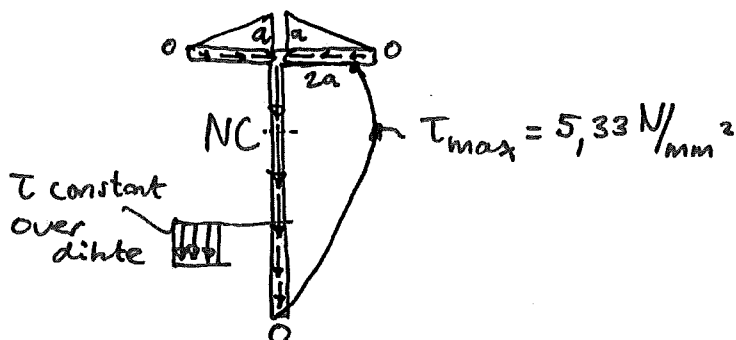
max. τ tpu NC

$$\tau_{\text{max}} = \frac{24 \cdot 10^3 \cdot 800000}{10 \cdot 3,6 \cdot 10^8}$$

$$= 5,33 \text{ N/mm}^2$$

--	--	--	--	--	--	--

- f. Schets het verloop van de schuifspanningen ten gevolge van de dwarskracht, voor de inklemingsdoorsnede, als diagram en met pijltjes.



- g. Bereken voor de inklemingsdoorsnede: de maximale schuifspanning ten gevolge van wringing. Aanwijzing: enkele formules voor wringing zijn: $\tau = M_t r / I_t$, $\tau = M_t e / (\frac{1}{2} I_t)$ met $I_t = \sum \frac{1}{3} h t^3$ en $\tau = M_t / (2 A_m t)$.

$F_v \downarrow$

 $t = 150$
 $M_t = F_v \cdot 150 = 24 \cdot 10^3 \cdot 150 = 3,6 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$

duswandig open, strip:

$$\tau = \frac{M_t \cdot e}{\frac{1}{2} I_t}$$

$$I_t = \sum \frac{1}{3} h t^3 = \frac{1}{3} \cdot 600 \cdot 10^3 + \frac{1}{3} \cdot 300 \cdot 10^3$$

$$= 200 \cdot 10^3 + 100 \cdot 10^3 = 300 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$$

$$M_t = 3,6 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

e : max. aan de buitenzijde

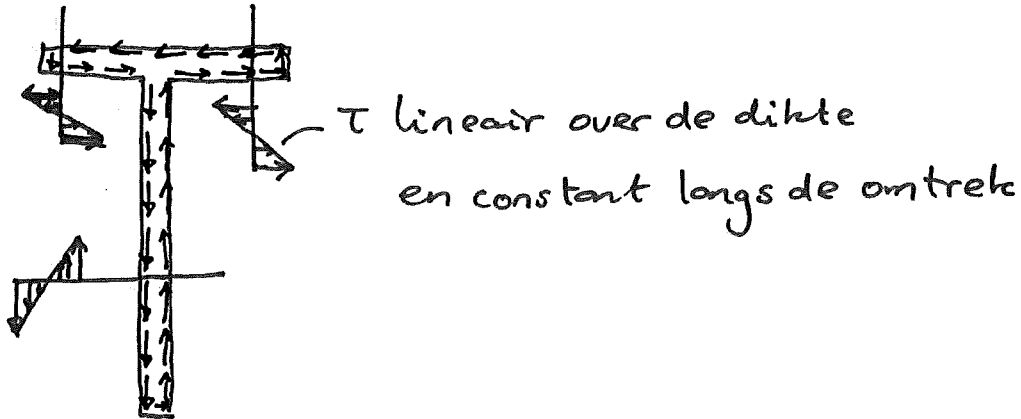
$$e = \frac{1}{2} t = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5 \text{ mm}$$

$$\tau = \frac{3,6 \cdot 10^6 \cdot 5}{\frac{1}{2} \cdot 300 \cdot 10^3}$$

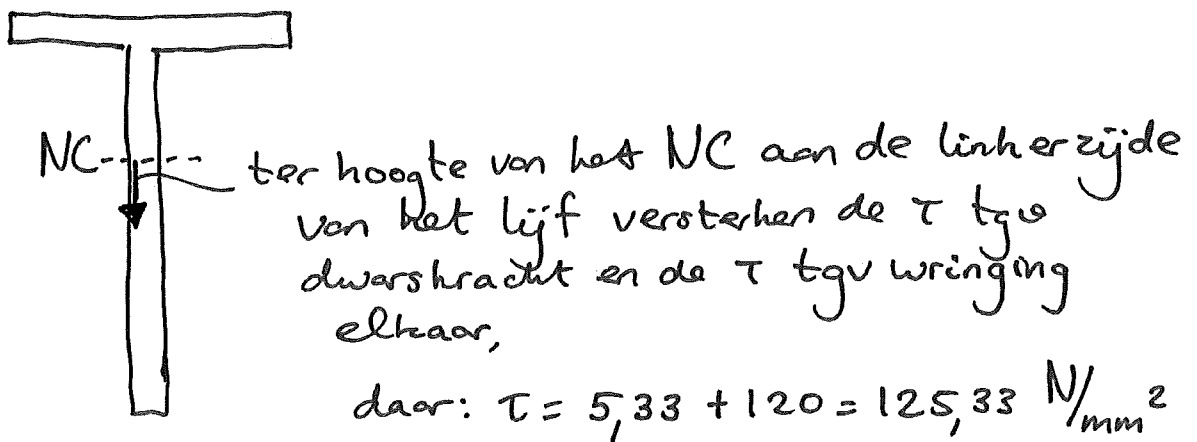
$$= 120 \text{ N/mm}^2$$

--	--	--	--	--	--	--	--

- h. Schets het verloop van de schuifspanningen ten gevolge van wringing, voor de inklemingsdoorsnede, als diagram en met pijltjes.



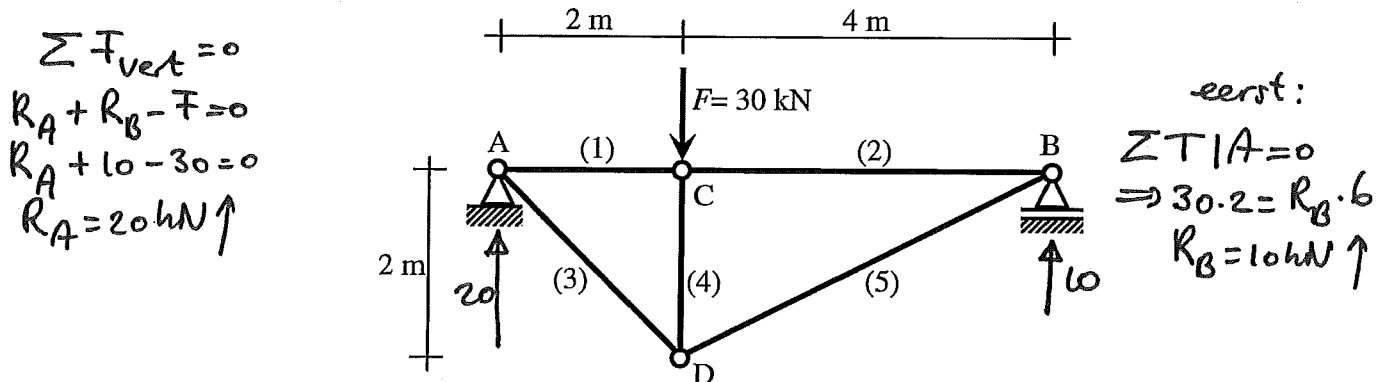
- i. Bepaal voor de inklemingsdoorsnede: de maximale schuifspanning ten gevolge van de combinatie van dwarskracht en wringing. Geef met een schets de positie aan waar deze optreedt.



--	--	--	--	--	--	--

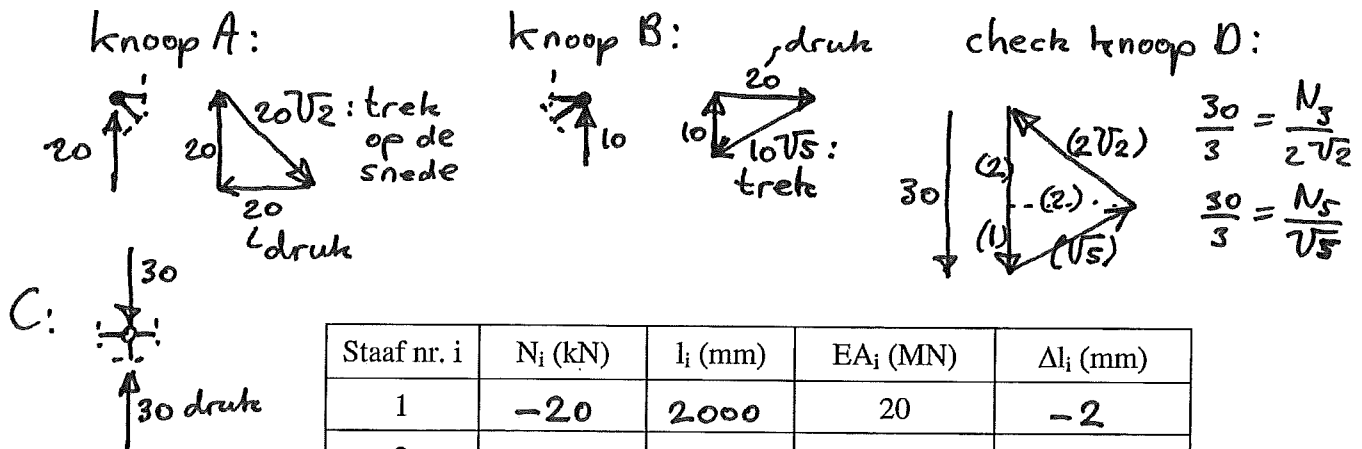
OPGAVE 3 (gewicht 2,0 – ongeveer 35 minuten)

Gegeven: onderstaand vakwerk. Afmetingen, belasting en opleggingen zijn aangegeven. De rekstijfheid EA van de staven 1, 2 en 4 is 20 MN, van staaf 3 $20\sqrt{2}$ MN en van staaf 5 $10\sqrt{5}$ MN.



Gevraagd:

- a. Bepaal de staafkrachten. Let op het teken (trek of druk). Verzamel de gegevens in de tabel.

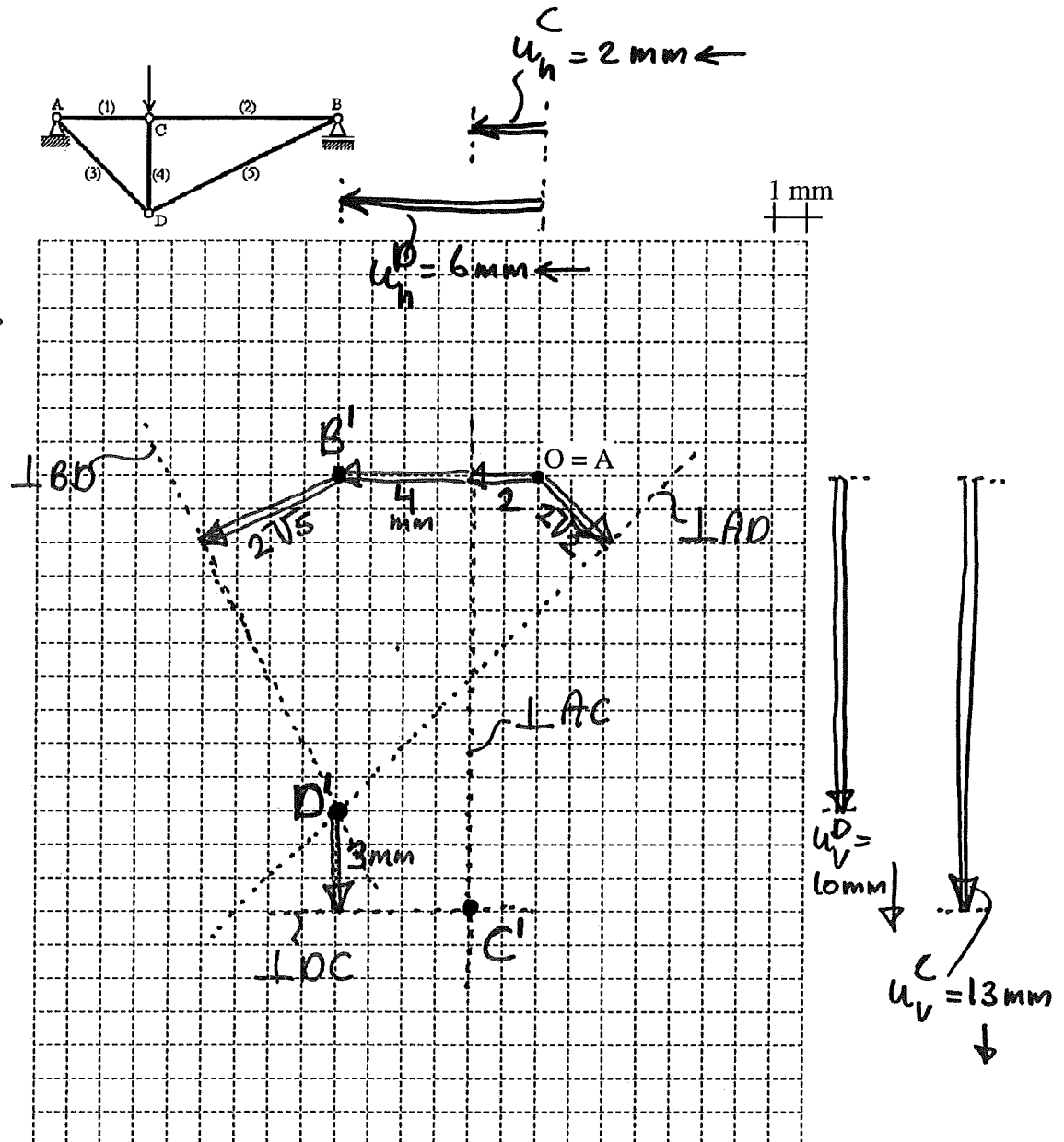


- b. Bepaal voor alle staven de lengteverandering, in mm en met het goede teken voor verlenging of verkorting. Verzamel de gegevens in de tabel.

--	--	--	--	--	--	--

c. Bepaal de verplaatsing van de knopen D en C met behulp van een Williot-diagram.

- verkortingen van staaf 1 en 2 mag je "optellen", in elkaars verlengde
- punt B op rolbaan $\Rightarrow$ vertic. verpl = 0
- dan vanuit A en B' $\rightarrow$ D'
- dan vanuit A en D' $\rightarrow$ C'



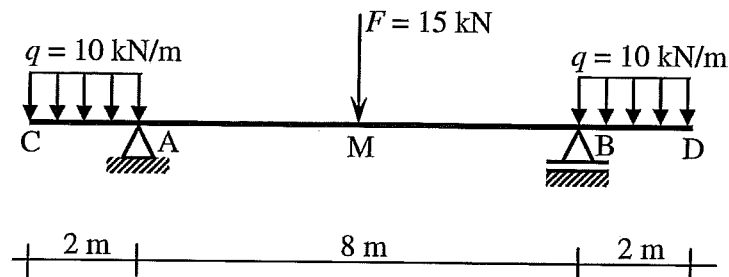
d. Verzamel de gevonden horizontale verplaatsing (u_h) en verticale verplaatsing (u_v) van knoop D en C in onderstaande tabel. Geef met een pijltje de richting aan.

Knooppunt	u_h (mm)	u_v (mm)
D	6 ←	10 ↓
C	2 ←	13 ↓

--	--	--	--	--	--	--

OPGAVE 4 (gewicht 2,0 - ongeveer 35 minuten)

Gegeven: een vrij opgelegde ligger met overstekken. De ligger wordt belast door een puntlast in het midden en een gelijkmatig verdeelde belasting op de overstekken. Maten, belastingen en buigstijfheid EI zijn aangegeven in de figuur. Een blad met vergeet-me-nietjes voor buigvervorming is toegevoegd aan dit antwoordformulier.



$$EI = 20\,000 \text{ kNm}^2$$

Gevraagd:

- a. De verticale verplaatsing w_M van M. Geef met een pijltje aan of het omhoog of omlaag is.

I.

$$\varphi_B = -\varphi_A = 0,003 \text{ rad} \quad (\text{symm.})$$

$$\varphi_A = \frac{1}{16} \frac{F l^2}{EI}$$

$$= \frac{1}{16} \frac{15 \cdot 8^2}{20000} = 0,003 \text{ rad} \downarrow$$

$$w_M = \frac{1}{48} \frac{F l^3}{EI} = \frac{1}{48} \frac{15 \cdot 8^3}{20000} = 0,008 \text{ m} = 8 \text{ mm} \downarrow$$

II.

$$20 \text{ kNm} = \frac{1}{2} q \cdot a^2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2^2$$

$$= 20 \text{ kNm}$$

$$w_M = \frac{1}{8} \frac{k l^2}{EI} = \frac{1}{8} \frac{20 \cdot 8^2}{20000}$$

$$= 0,008 \text{ m} = 8 \text{ mm} \uparrow$$

$$\varphi_A = \frac{1}{2} \frac{k l}{EI} = \frac{1}{2} \frac{20 \cdot 8}{20000} = 0,004 \text{ rad} \uparrow$$

$$\varphi_B = -\varphi_A = 0,004 \text{ rad} \downarrow$$

Samen:

I + II:

$$w_m = 8 \downarrow + 8 \uparrow$$

$$= 0 \text{ mm}$$

--	--	--	--	--	--	--	--

- b. De hoekverdraaiing φ_A van A. Geef met een pijltje aan of het linksom of rechtsom is.

schetsjes: zie vraag a)

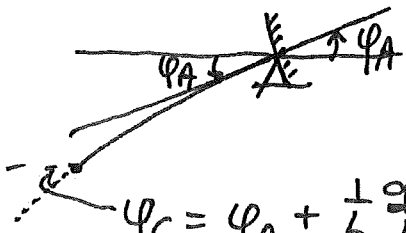
$$\varphi_A = 0,003 \curvearrowright + 0,004 \curvearrowright = 0,001 \curvearrowright \text{ rad.}$$

- c. De hoekverdraaiing φ_B van B. Geef met een pijltje aan of het linksom of rechtsom is.

schetsjes: zie vraag a)

$$\varphi_B = 0,003 \curvearrowright + 0,004 \curvearrowleft = 0,001 \text{ rad } \curvearrowleft \quad (= -\varphi_A) \text{ symm.}$$

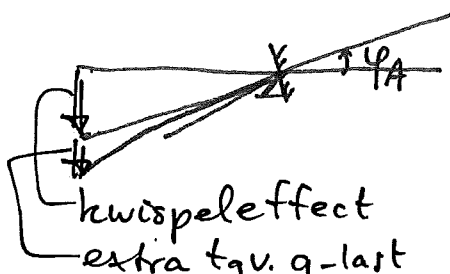
- d. De hoekverdraaiing φ_C van C. Geef met een pijltje aan of het linksom of rechtsom is.



$$\varphi_C = \varphi_A + \frac{1}{6} \frac{q l^3}{EI} = 0,001 \curvearrowright + \frac{1}{6} \cdot \frac{10 \cdot 2^3}{20000} = 0,001 + 0,000667 = 0,001667 \text{ rad } \curvearrowright$$

$$\varphi = \frac{1}{6} \frac{q l^3}{EI}$$

- e. De verticale verplaatsing w_C van C. Geef met een pijltje aan of het omhoog of omlaag is.



kwispeleffect
extra tgv. q-last
op "scheef ingeklemde"
uitkraging

$$w_C = +\varphi_A \cdot 2 + \frac{1}{8} \frac{q l^4}{EI}$$

$$= 0,001 \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot \frac{10 \cdot 2^4}{20000}$$

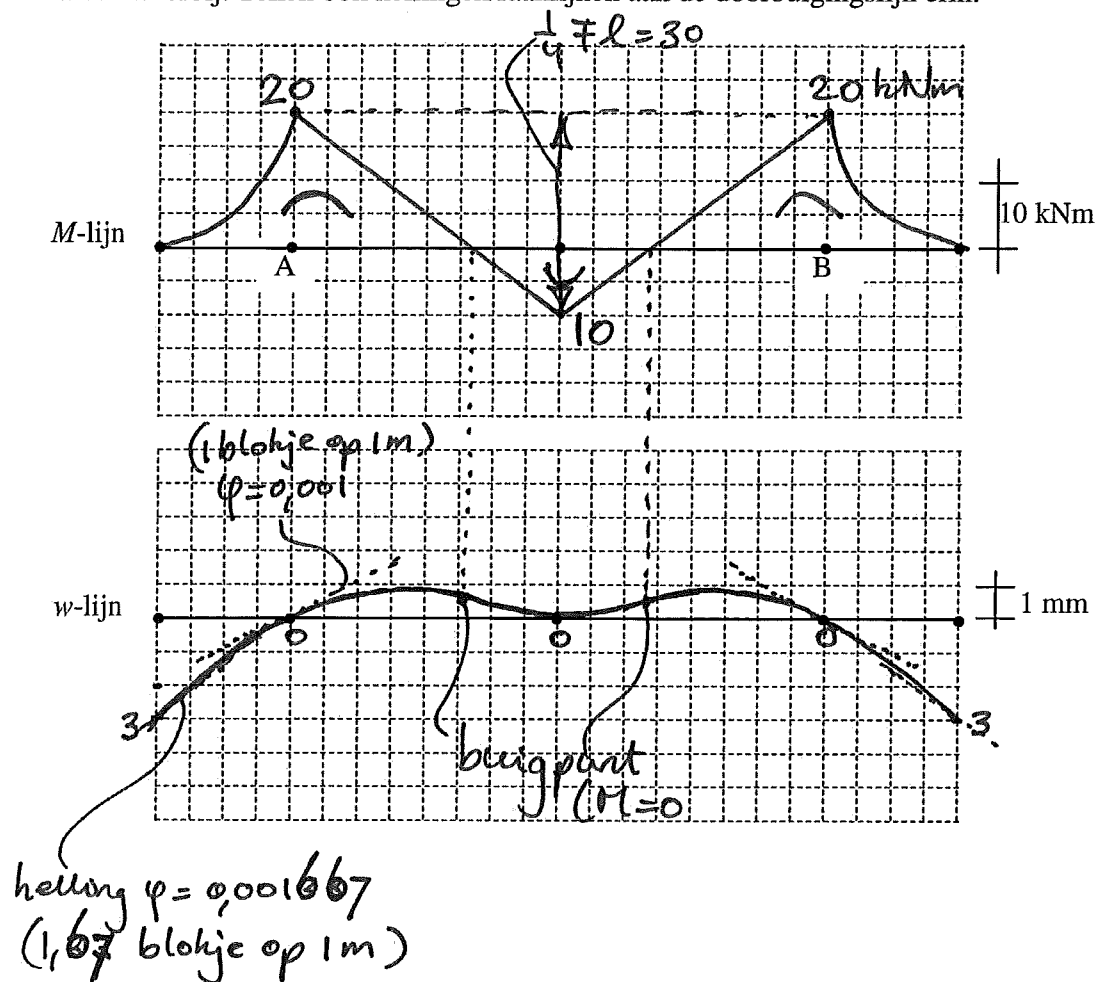
$$= 0,002 + 0,001 = 0,003 \text{ m}$$

$$= 3 \text{ mm } \downarrow$$

$$w = \frac{1}{8} \frac{q l^4}{EI}$$

--	--	--	--	--	--	--

- f. Schets onderstaand de momentenlijn en de doorbuigingslijn. Geef markante punten aan. Zet waarden erbij. Teken ook hellingen/raaklijnen aan de doorbuigingslijn erin.

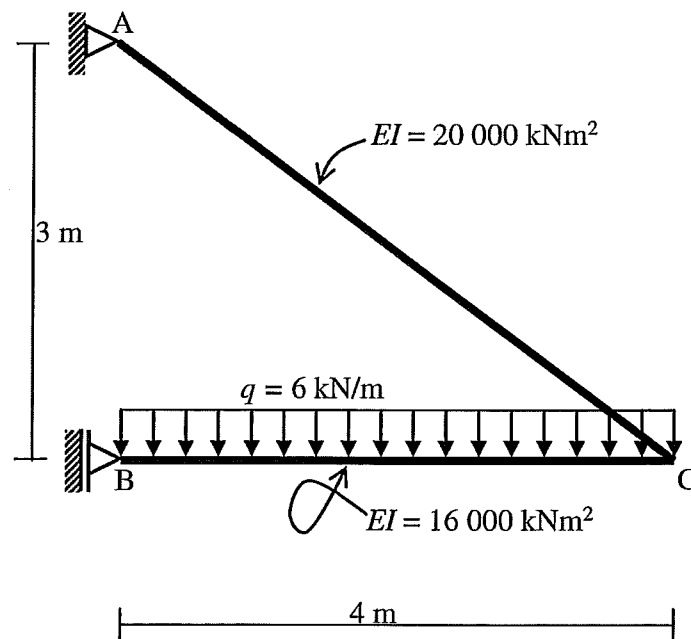


--	--	--	--	--	--	--	--

OPGAVE 5 (gewicht 2,0 - ongeveer 35 minuten)

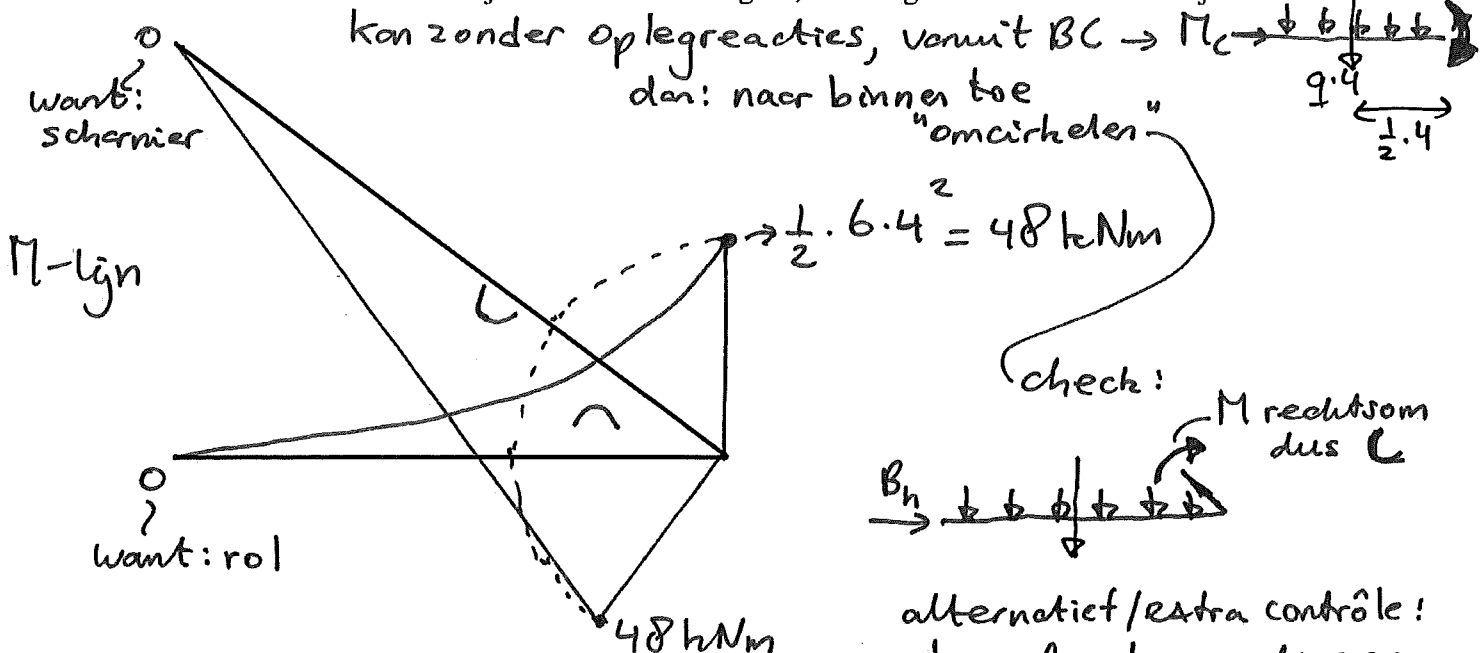
Gegeven: onderstaande constructie ACB. Maten, opleggingen, belasting en de (verschillende) buigstijfheden van AC en BC zijn aangegeven in de figuur. Normalkrachtvervorming wordt verwaarloosd ten opzichte van buigvervorming.

Deze opgave dient te worden uitgewerkt met momentenvlakstellingen. Een blad met relevante oppervlakte-eigenschappen is toegevoegd aan dit antwoordformulier.



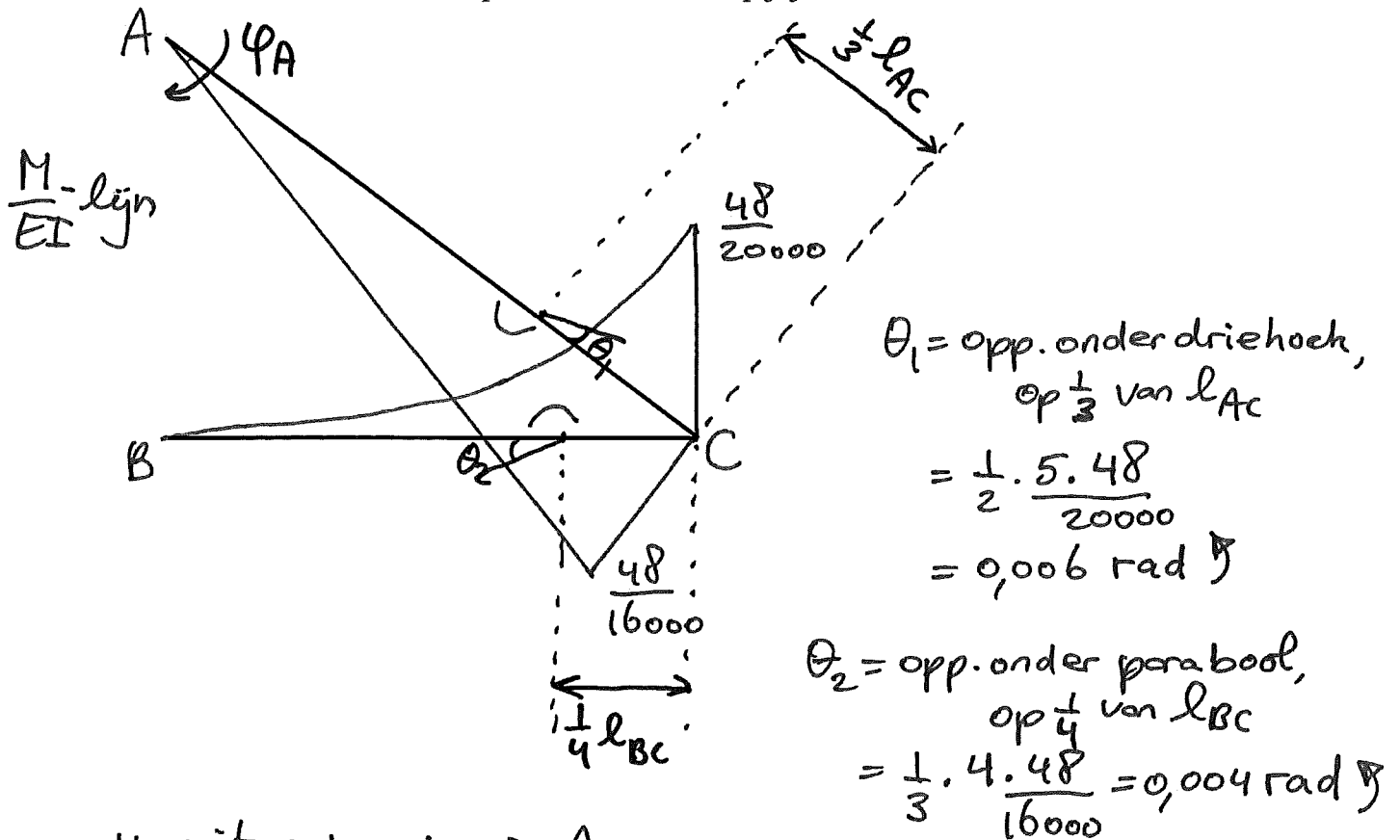
Gevraagd:

- a. Teken de momentenlijn in onderstaande figuur, met buigtekens en waarden erbij.



--	--	--	--	--	--	--

b. Bereken de rotatie van punt A. Geef met een pijltje aan of het linksom of rechtsom is.



Vanuit scharnier in A

naar rol in B werken, eis B op rolbaan, dwz $u_B = 0$
dan de-nog onbekende- φ_A oplossen

$u(+)$
→

$$u_B = -\varphi_A \cdot 3 + \theta_1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 + 0 = 0$$

↑ eis

$$\Rightarrow \varphi_A = +\frac{1}{3} \theta_1 = \frac{1}{3} \cdot 0,006 = 0,002 \text{ rad}$$

(er komt + uit, dwz werkt als bovenstaand aangenomen)

--	--	--	--	--	--	--

- c. Bereken de verticale verplaatsing van de rol in punt B, in mm. Geef met een pijltje aan of het omhoog of omlaag is.

$\uparrow w^{(+)}$

$$\begin{aligned}
 w_B &= \varphi_A \cdot 0 - \theta_1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 - \theta_2 \cdot \frac{3}{4} \cdot 4 = \\
 &= -0,006 \cdot \frac{8}{3} - 0,004 \cdot 3 \\
 &= -0,016 - 0,012 \\
 &= -0,028 \text{ m} \\
 &= -28 \text{ mm d.w.z. } \downarrow
 \end{aligned}$$

(neem voor jezelf een richting aan die je positief noemt, komt er - uit, dan werkt 't in de omgekeerde richting)

- d. Bereken de rotatie van punt C. Geef met een pijltje aan of het linksom of rechtsom is.

$\curvearrowright \varphi^{(+)}$

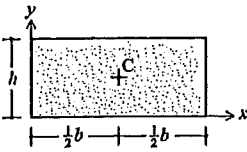
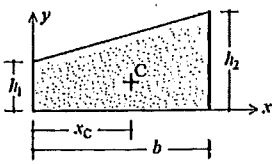
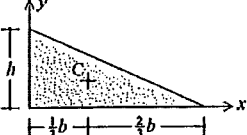
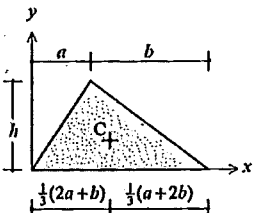
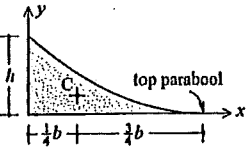
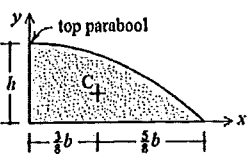
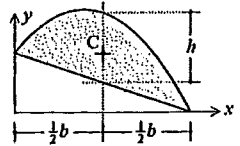
$$\begin{aligned}
 \varphi_C &= \varphi_A + \int_A^C \frac{M}{EI} dl = \varphi_A + \theta_1 = \\
 &= -0,002 + 0,006 = +0,004 \text{ rad d.w.z. } \curvearrowright
 \end{aligned}$$

(neem voor jezelf een richting aan die je positief noemt, komt er + uit, dan werkt 't in die richting)

--	--	--	--	--	--	--

Oppervlakte-eigenschappen voor gebruik bij de momentenvlakstelling

Oppervlakte-eigenschappen die veelvuldig worden gebruikt bij de momentenvlakstellingen

 rechthoek: $A = bh$ $x_C = \frac{1}{2}b$	 trapezium: $A = \frac{1}{2}b(h_1 + h_2)$ $x_C = \frac{1}{3}b \frac{h_1 + 2h_2}{h_1 + h_2}$
 driehoek: $A = \frac{1}{2}bh$ $x_C = \frac{1}{3}b$	 driehoek: $A = \frac{1}{2}(a + b)h$ $x_C = \frac{1}{3}(2a + b)$
 parabool: $A = \frac{1}{3}bh$ $x_C = \frac{1}{4}b$	
 parabool: $A = \frac{2}{3}bh$ $x_C = \frac{3}{8}b$	 parabool: $A = \frac{2}{3}bh$ $x_C = \frac{1}{2}b$

Schema	Momentenlijn	Doorbuiging en hoekverdraaiing
A0	$\frac{1}{4} Fl$	$\frac{1}{48} \frac{Fl^3}{EI}$ $\frac{1}{16} \frac{Fl^2}{EI}$
A1	$\frac{1}{8} ql^2$	$\frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI}$ $\frac{1}{24} \frac{ql^3}{EI}$
A2	$\frac{9}{128} ql^2$	$\frac{2}{384} \frac{ql^4}{EI}$ $\frac{1}{48} \frac{ql^3}{EI}$
A3	$\frac{1}{12} ql^2$ $\frac{1}{24} ql^2$	$\frac{1}{384} \frac{ql^4}{EI}$
B1	K	$w = \frac{1}{2} \frac{Kl^2}{EI}$ $\phi = \frac{Kl}{EI}$
B2	Fl	$w = \frac{1}{3} \frac{Fl^3}{EI}$ $\phi = \frac{1}{2} \frac{Fl^2}{EI}$
B3	$\frac{1}{2} ql^2$	$w = \frac{1}{8} \frac{ql^4}{EI}$ $\phi = \frac{1}{6} \frac{ql^3}{EI}$
C1	K	$\phi_A = \frac{1}{6} \frac{Kl}{EI}$ $w_M = \frac{1}{16} \frac{Kl^2}{EI}$ $\phi_B = \frac{1}{3} \frac{Kl}{EI}$
C2	K	$\frac{1}{8} \frac{Kl^2}{EI}$ $\frac{1}{2} \frac{Kl}{EI}$
C3	$\frac{1}{2} K$	$w_M = \frac{1}{32} \frac{Kl^2}{EI}$ $\frac{1}{4} \frac{Kl}{EI}$

--	--	--	--	--	--	--	--

Max Hendriks.

Antwoordformulier

CT1041 Constructiemechanica 2

5 ECTS

Zet op alle bladen uw naam en studienummer.

Bladen zonder naam en studienummer worden niet geaccepteerd.

Relevante berekeningen vermelden.

Antwoorden zonder berekening/motivering worden niet gehonoreerd.

Gebruik zo nodig de onbedrukte zijden van het antwoordformulier.

Tenzij anders vermeld wordt het **eigen gewicht van een constructie buiten beschouwing** gelaten.

Een blad met relevante **vergeet-me-nietjes** voor buigvervorming is toegevoegd aan dit antwoordformulier.

Benut controlemogelijkheden om rekenfouten te vermijden.

Maak de opgaven in een volgorde naar eigen keuze.

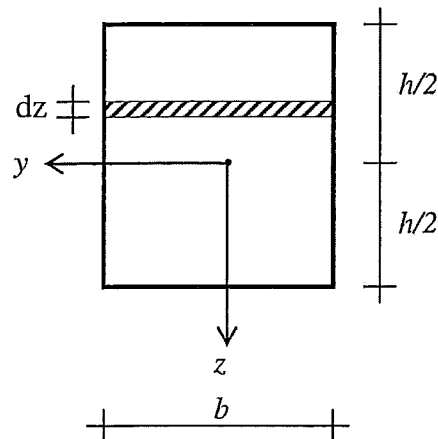
Let op: er zijn **6 opgaven**.

vraag	score
1	
2	
3	
4	
5	
6	
totaal	

--	--	--	--	--	--	--

OPGAVE 1 (gewicht 0,5 - ongeveer 10 minuten)

Gegeven de onderstaande rechthoekige doorsnede met breedte b en hoogte h . Het y - z -assenstelsel loopt door het zwaartepunt van de rechthoek.



Gevraagd: Leidt met behulp van een integraal het traagheidsmoment I_{zz} af (uitgedrukt in b en h).

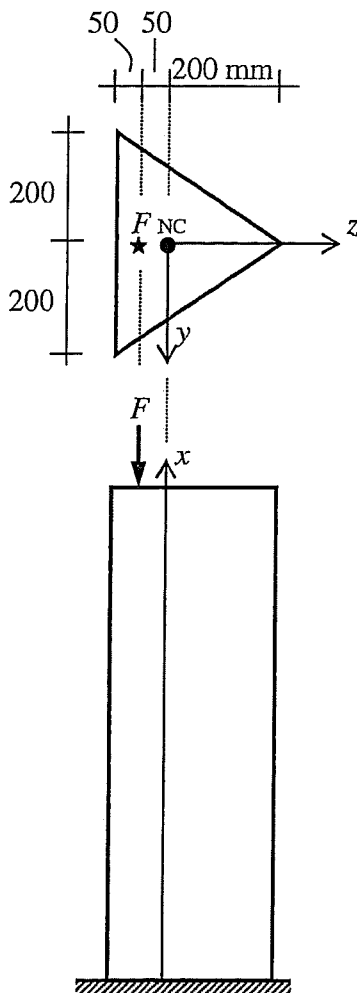
$$I_{zz} = \int_{z = -\frac{1}{2}h}^{z = +\frac{1}{2}h} z^2 \underbrace{b dz}_{dA} = \frac{1}{3} b z^3 \bigg|_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} b h^3 - - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} b h^3 = \frac{1}{12} b h^3$$

--	--	--	--	--	--	--

OPGAVE 2 (gewicht 2,0 - ongeveer 35 minuten)

Gegeven: onderstaande prismatische kolom met driehoekige doorsnede wordt belast door een excentrische drukkracht F van 600 kN. De doorsnede-afmetingen van de kolom en de excentriciteit van de drukkracht zijn in de figuur aangegeven.

Het eigen traagheidsmoment van een driehoekige doorsnede bij buiging om een as evenwijdig aan de basis is $(1/36)bh^3$ met b de basis en h de hoogte vanaf de basis.



Gevraagd:

- Bereken de extreme spanningen in een doorsnede.
- Teken voor een doorsnede het normaalspanningsdiagram met waarden en tekens.
(gebruik hiervoor het diagram aan de onderzijde van deze bladzijde of het diagram op de volgende bladzijde)

$$I_{22} = \frac{1}{36}bh^3 = \frac{1}{36} \cdot 400 \cdot 300^3 = 300 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$A = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2} \cdot 400 \cdot 300 = 60 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$$

- Spanning door (centrische) drukkracht:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{-600 \cdot 10^3}{60 \cdot 10^3} = -10 \text{ N/mm}^2$$

- Spanning door buigend moment:

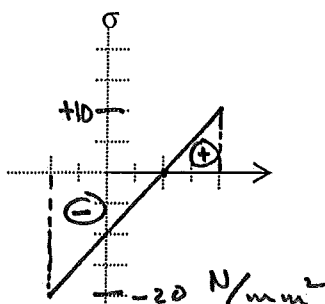
$$\sigma_{links} = \frac{M_z \cdot z}{I_{22}} = \frac{50 \cdot 600 \cdot 10^3 \cdot (-100)}{300 \cdot 10^6} = -10 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{rechts} = \dots = \frac{\dots (+200)}{\dots} = +20 \text{ N/mm}^2$$

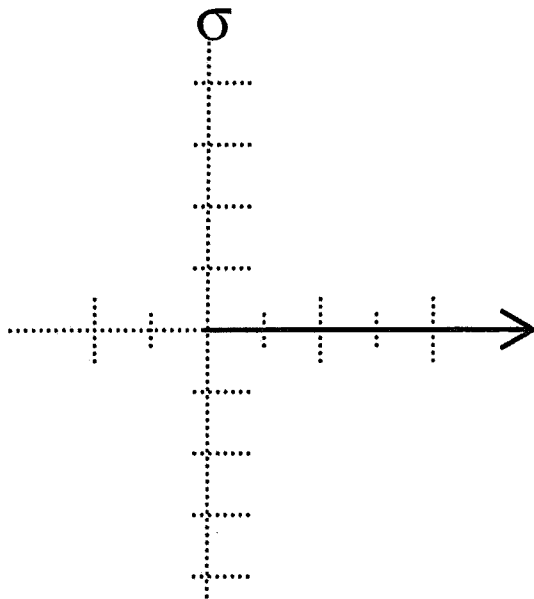
- Totaal

$$\sigma_{links} = -10 - 10 = -20 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{rechts} = -10 + 20 = +10 \text{ N/mm}^2$$



--	--	--	--	--	--	--	--



- c. Ligt het aangrijpingspunt van de kracht binnen de kern van de doorsnede? Motiveer uw antwoord.

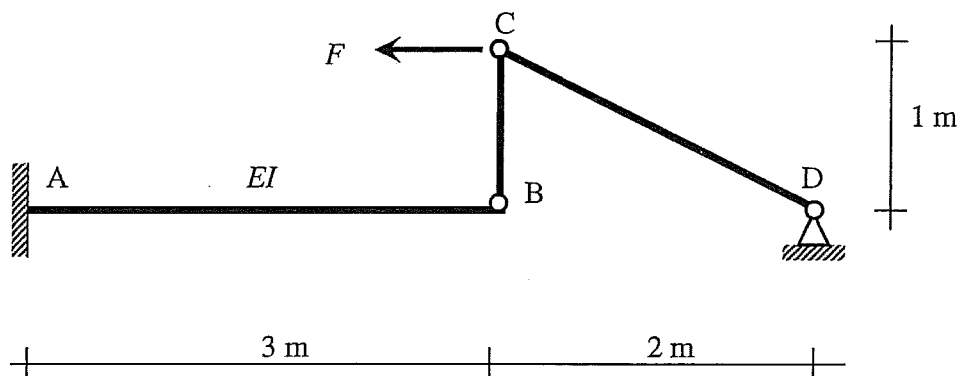
Nee, er ontstaat trekspanningen.

--	--	--	--	--	--	--	--

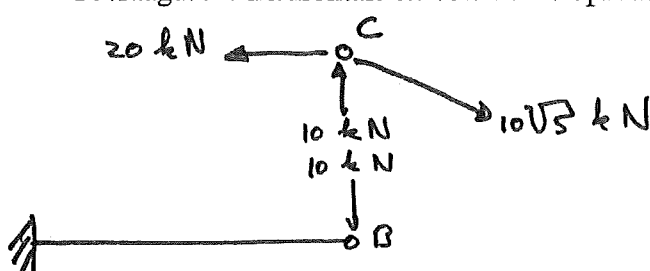
OPGAVE 3 (gewicht 1,5 - ongeveer 30 minuten)

Gegeven: Onderstaande constructie bestaat uit drie constructiedelen, waarvan de afmetingen in de figuur kunnen worden afgelezen. De puntlast $F = 20$ kN. De relevante buigstijfheid $EI = 10$ MNm².

Normaalkrachtvervorming wordt verwaarloosd.



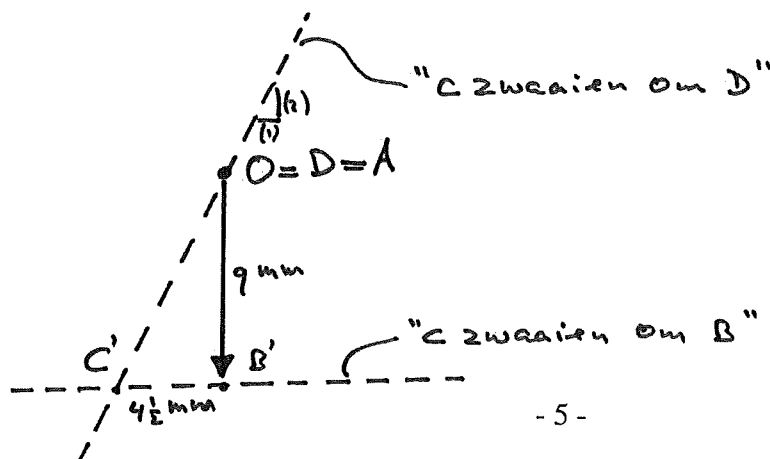
Gevraagd: De horizontale en verticale verplaatsing van punt C. Geef de richtingen aan.



$$\text{vert. verpl. B: } \frac{Fl^3}{3EI} = \frac{10000 \cdot 3^3}{3 \cdot 10 \cdot 10^6} = 0.009 \text{ m} = 9 \text{ mm} \downarrow$$

$$\text{hor. verpl. B: } 0 \text{ mm}$$

Williot met nulstaven BC en CD (geen moment en geen normaalkracht verv.):



$$C': 4\frac{1}{2} \text{ mm} \leftarrow$$

$$9 \text{ mm} \downarrow$$

Technische Universiteit Delft

Faculteit CiTG

Tentamen CT1041 Constructiemechanica 2

27 juni 2011 van 09.00-12.00 uur

STUDIENUMMER

NAAM

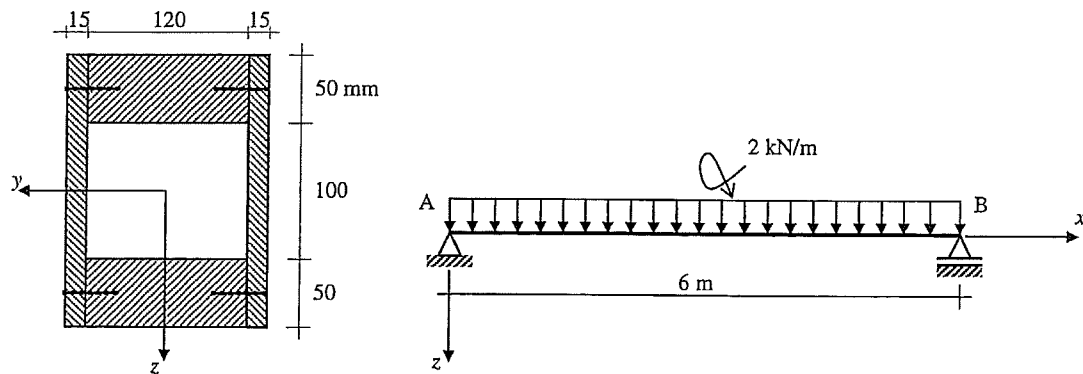
--	--	--	--	--	--	--	--

--	--	--	--	--	--	--

OPGAVE 4 (gewicht 2,0 - ongeveer 35 minuten)

Gegeven: een vrij opgelegde kokervormige ligger wordt belast door een gelijkmatig verdeelde belasting. De ligger is opgebouwd uit vier houten delen die met draadnagels tot één geheel zijn verbonden.

Per draadnagel kan een schuifkracht 200 N worden overgedragen. Voor overige gegevens zie onderstaande figuur.

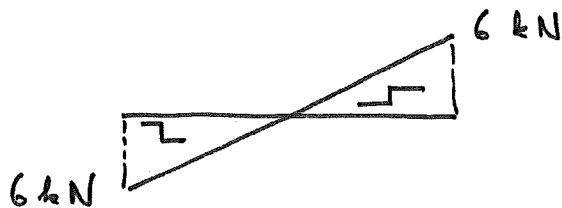


Gevraagd:

- a. Bepaal het relevante traagheidsmoment van de samengestelde doorsnede.

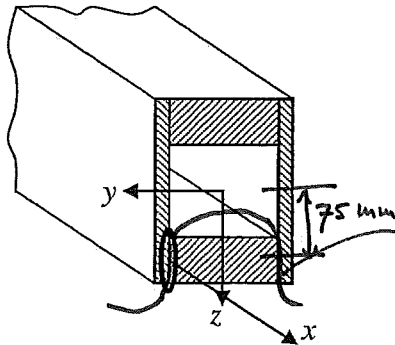
$$I_{zz} = \frac{1}{12} 150 \cdot 200^3 - \frac{1}{12} 120 \cdot 100^3 = 100 \cdot 10^6 - 10 \cdot 10^6 = 90 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

- b. Schets de dwarskrachtenlijn. Hoe groot is de maximale dwarskracht?



--	--	--	--	--	--	--	--

- c. Schets het verloop in x-richting van de horizontale schuifstroom s_h (schuifkracht per lengte) aan één zijde van het onderste deel, aangegeven in de onderstaande figuur. Hoe groot is de maximale schuifkracht per lengte langs deze zijde?

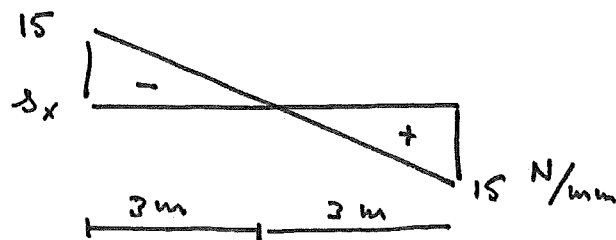


$$s_x = \frac{VS^a}{I}$$

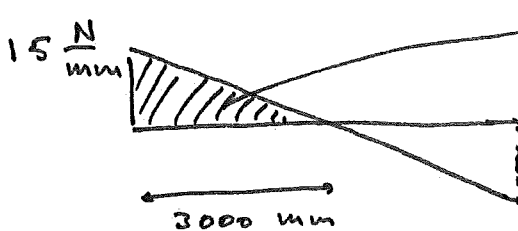
$$S^a = 50 \cdot 120 \cdot 75 = 450 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

$$s_{x, \max} = \frac{6 \cdot 10^3 \cdot 450 \cdot 10^3}{90 \cdot 10^6} = 30 \text{ N/mm}$$

Dit is een dubbelsnede; per zijde: 15 N/mm



- d. Hoeveel draadnagels zijn in totaal benodigd (in de gehele ligger)?



$$R = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 3000 = 22500 \text{ N}$$

$$n_{\text{nagels}} > \frac{R}{F_{\text{nagel}}} = \frac{22500}{200} = 112,5$$

dus 113 nagels voor dit deel.

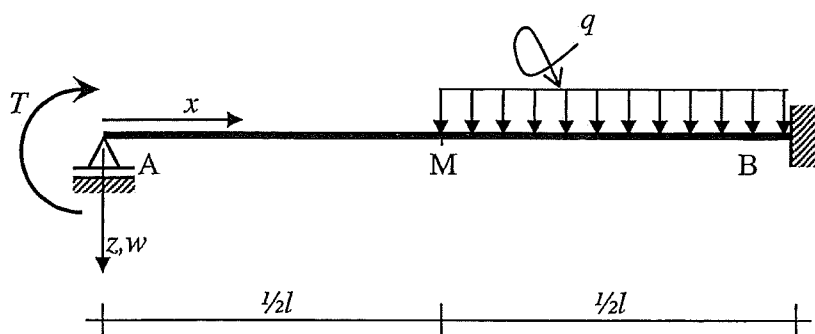
x2 voor "links" en "rechts" (de andere driehoek)
 x2 voor de andere kant van de dubbelsnede
 x2 voor boven en onder

$$\text{Totaal } 113 \times 8 = 904 \text{ nagels}$$

--	--	--	--	--	--	--

OPGAVE 5 (gewicht 2,0 - ongeveer 35 minuten)

Gegeven: een ligger met lengte l , opgelegd op een rol in A en ingeklemd in B. De ligger wordt belast met verdeelde belasting q , van het midden M tot B, en met een koppel T ter plaatse van A. De buigstijfheid is EI .



Gevraagd:

De verticale oplegreactie in A. Druk deze uit in q , T , l en EI .

Enkelvoudig statisch onbepaald:

Beschouw en eis $w_A \equiv 0$

$$\bullet \text{ tgv } T: w_A = -\frac{Tl^2}{2EI}$$

$$\bullet \text{ tgv } F: w_A = -\frac{Fl^3}{3EI}$$

$$\bullet \text{ tgv } q: w_A = w_M + \varphi_M \cdot \frac{1}{2}l = \frac{q(\frac{l}{2})^4}{8EI} + \frac{q(\frac{l}{2})^3}{6EI} \cdot \frac{1}{2}l = \frac{ql^4}{128EI} + \frac{ql^4}{96EI}$$

$$\bullet \text{ totaal: } w_A = -\frac{Tl^2}{2EI} - \frac{Fl^3}{3EI} + \frac{ql^4}{128EI} + \frac{ql^4}{96EI} = 0$$

(vermenigvuldigen met $384EI$ geeft:)

$$-192Tl^2 - 128Fl^3 + 3ql^4 + 4ql^4 = 0$$

$$-128Fl^3 = -7ql^4 + 192Tl^2$$

$$F = \frac{7}{128}ql - \frac{192}{128}\frac{T}{l} = \frac{7}{128}ql - \frac{3}{2}\frac{T}{l}$$

Technische Universiteit Delft

Faculteit CiTG

Tentamen CT1041 Constructiemechanica 2

27 juni 2011 van 09.00-12.00 uur

STUDIENUMMER

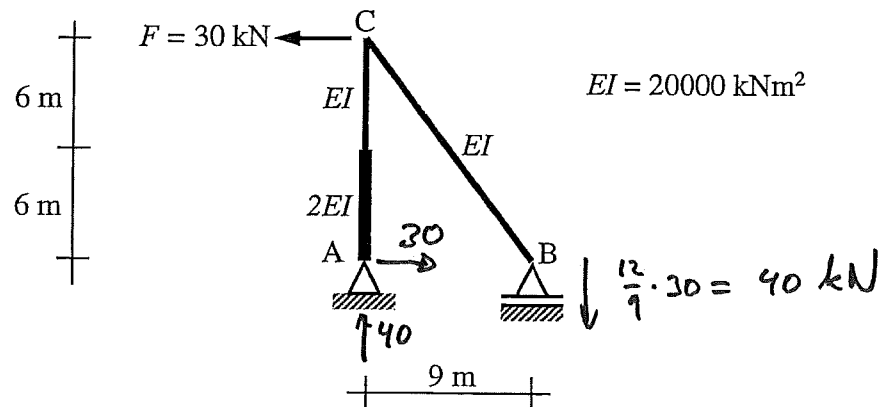
NAAM

--	--	--	--	--	--	--	--

--	--	--	--	--	--	--	--

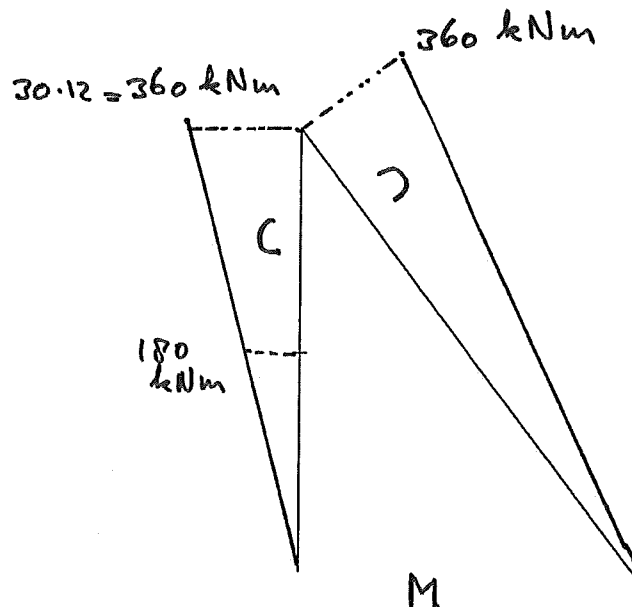
OPGAVE 6 (gewicht 2,0 - ongeveer 35 minuten)

Gegeven: onderstaande constructie ACB is belast met een kracht F . De buigstijfheid van de onderste helft van AC is 2 maal zo groot als de overige buigstijfheden. Er is alleen vervorming door buiging.



Gevraagd:

- a. De rotatie van punt A. Geef de richting aan.



--	--	--	--	--	--	--

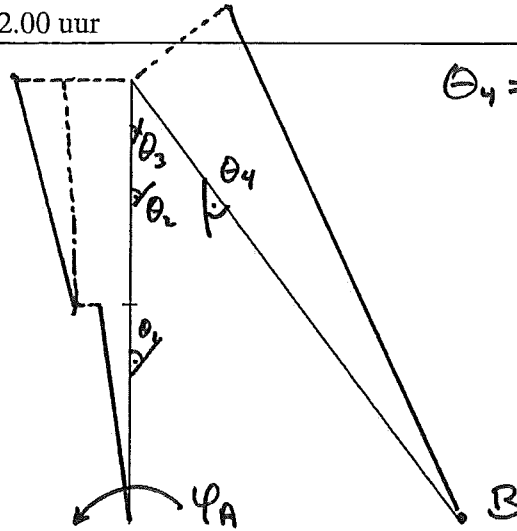
$$\theta_1 = \frac{\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 180}{40000} = 0.0135$$

$$\theta_2 = \frac{6 \cdot 180}{20000} = 0.0540$$

$$\theta_3 = \frac{\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 180}{20000} = 0.0270$$

$$\theta_4 = \frac{\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 360}{20000} = 0.1350$$

($l_{CB} = 15 \text{ m}$)



omhoog is pos.

M gereduceerd.

$$u_{vert.,B} = +9\phi_A - 9\theta_1 - 9\theta_2 - 9\theta_3 - 6\theta_4 = 0$$

$$\phi_A = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \frac{2}{3}\theta_4 = 0.1845$$

b. De horizontale verplaatsing van de rol in punt B. Geef de richting aan.

rechts is pos.

$$u_{horiz.,B} = -4\theta_1 - 9\theta_2 - 10\theta_3 - 8\theta_4 = -1.89 \text{ m} = -1890 \text{ mm}$$

($0 \cdot \phi_A$)



Technische Universiteit Delft

Faculteit CiTG

Tentamen CT1041 Constructiemechanica 2

27 juni 2011 van 09.00-12.00 uur

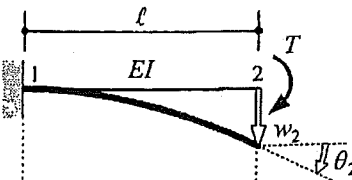
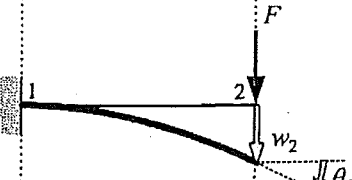
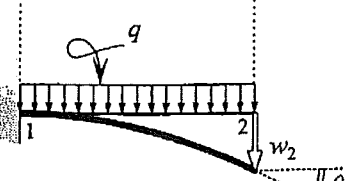
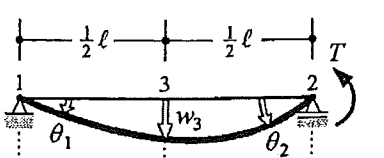
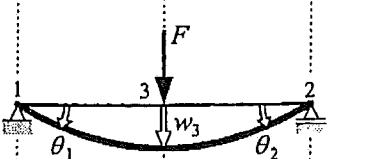
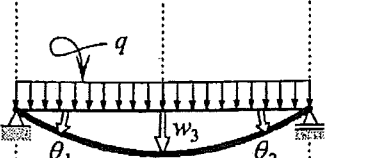
STUDIENUMMER

NAAM

--	--	--	--	--	--	--	--

--	--	--	--	--	--	--	--

Vergeet-me-nietjes

(1)		$\theta_2 = \frac{Tl}{EI}; \quad w_2 = \frac{Tl^2}{2EI}$
(2)		$\theta_2 = \frac{Fl^2}{2EI}; \quad w_2 = \frac{Fl^3}{3EI}$
(3)		$\theta_2 = \frac{ql^3}{6EI}; \quad w_2 = \frac{ql^4}{8EI}$
(4)		$\theta_1 = \frac{1}{6} \frac{Tl}{EI}; \quad \theta_2 = \frac{1}{3} \frac{Tl}{EI}; \quad w_3 = \frac{1}{16} \frac{Tl^2}{EI}$
(5)		$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{16} \frac{Fl^2}{EI}; \quad w_3 = \frac{1}{48} \frac{Fl^3}{EI}$
(6)		$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24} \frac{ql^3}{EI}; \quad w_3 = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI}$

vergeet-mij-nietjes

vrij opgelegde ligger (statisch bepaald)

--	--	--	--	--	--	--	--

Jan Rots

Antwoordformulier

CT1041 Constructiemechanica 2

5 ECTS

UITWERKINGEN

Zet op alle bladen uw naam en studienummer.

Bladen zonder naam en studienummer worden niet geaccepteerd.

Relevante berekeningen vermelden.

Antwoorden zonder berekening/motivering worden niet gehonoreerd.

Gebruik zo nodig de onbedrukte zijden van het antwoordformulier.

Tenzij anders vermeld wordt het **eigen gewicht van een constructie buiten beschouwing** gelaten.

Een blad met relevante **vergeet-me-nietjes** voor buigvervorming is toegevoegd aan dit antwoordformulier.

Een blad met relevante **oppervlakte-eigenschappen** voor gebruik bij de momentenvlakstellingen is toegevoegd aan dit antwoordformulier.

Benut controlemogelijkheden om rekenfouten te vermijden.

Maak de opgaven in een volgorde naar eigen keuze.

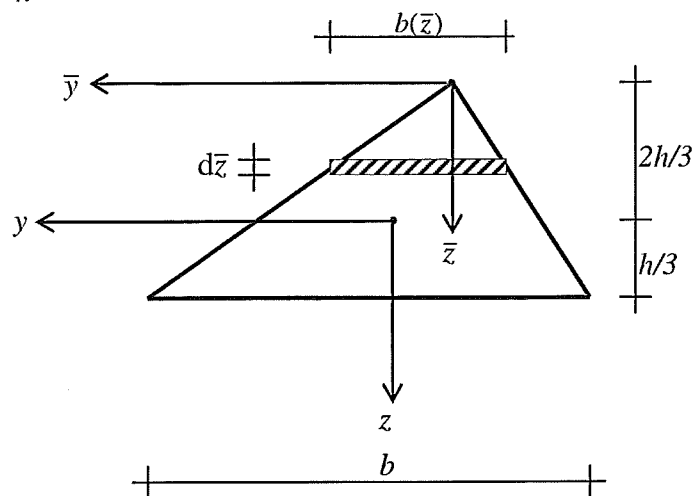
Let op: er zijn **6 opgaven**.

vraag	score
1	
2	
3	
4	
5	
6	
totaal	

--	--	--	--	--	--	--

OPGAVE 1 (gewicht 1,0 - ongeveer 15 minuten)

Gegeven de onderstaande driehoekige doorsnede met basis b en hoogte h . Twee assenstelsels zijn aangegeven. Het $\bar{y}$ - $\bar{z}$ -assenstelsel loopt door de top van de driehoek. Het y - z -assenstelsel loopt door het zwaartepunt van de driehoek. Schematisch is een gearceerd mootje aangegeven met dikte $d\bar{z}$ en breedte $b(\bar{z}) = \frac{\bar{z}}{h}b$.



Gevraagd:

- a. Leidt met behulp van een integraal het traagheidsmoment $I_{\bar{z}\bar{z}}$ af (uitgedrukt in b en h).

$$\begin{aligned}
 I_{\bar{z}\bar{z}} &= \int \bar{z}^2 dA \\
 dA &= b(\bar{z}) \cdot d\bar{z} = \frac{\bar{z} \cdot b}{h} d\bar{z}
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\int \bar{z}^2 dA} \right\} I_{\bar{z}\bar{z}} = \int \bar{z}^2 \cdot \frac{\bar{z} \cdot b}{h} d\bar{z} =$$

$$= \frac{b}{h} \int_{\bar{z}=0}^{\bar{z}=h} \bar{z}^3 d\bar{z} = \frac{b}{h} \cdot \left[\frac{1}{4} \bar{z}^4 \right]_0^h =$$

$$= \frac{b}{h} \cdot \frac{1}{4} h^4 = \frac{1}{4} b h^3$$

--	--	--	--	--	--	--

- b. Bepaal het eigen traagheidsmoment I_{zz} , uitgaande van het antwoord bij a. en met behulp van de regel van Steiner.

$$I_{\bar{z}\bar{z}} = I_{zz}^{\text{eigen}} + "a^2 A"$$

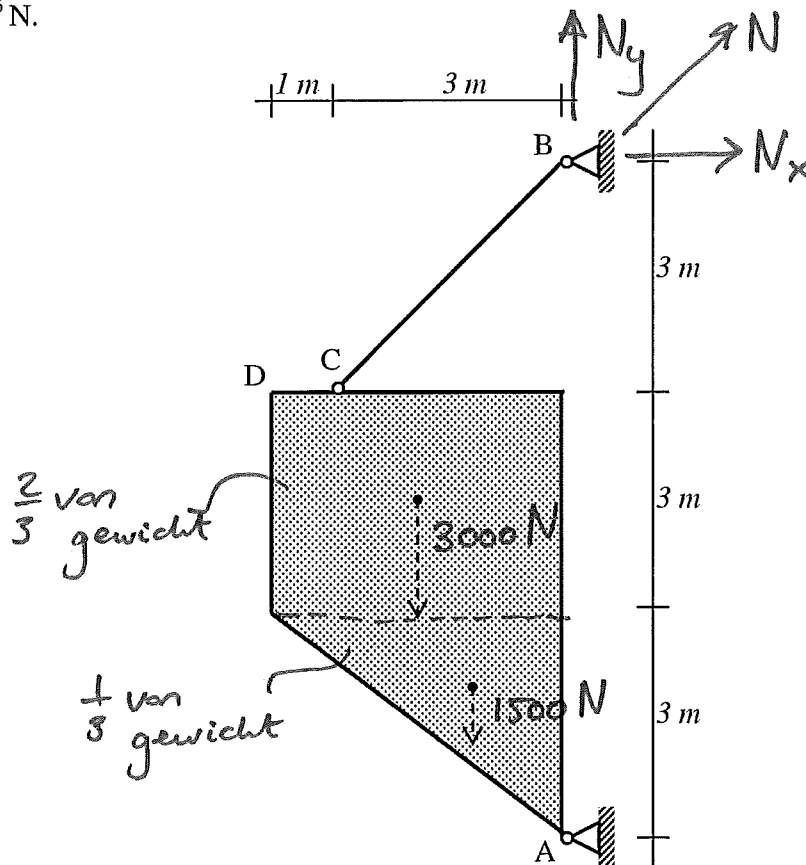
$$\begin{aligned}
 I_{zz}^{\text{eigen}} &= I_{\bar{z}\bar{z}} - "a^2 A" \\
 &= \frac{1}{4}bh^3 - \left(\frac{2}{3}h\right)^2 \cdot \frac{1}{2}bh \\
 &= \frac{1}{4}bh^3 - \frac{2}{9}bh^3 \\
 &= \left(\frac{9}{36} - \frac{8}{36}\right)bh^3 \\
 &= \frac{1}{36}bh^3
 \end{aligned}$$

--	--	--	--	--	--	--	--

OPGAVE 2 (gewicht 1,5 - ongeveer 30 minuten)

Gegeven: Een trapeziumvormig blok met een totaalgewicht van 4500 N. Het blok is homogeen, onvervormbaar en heeft een gelijkmatige dikte. Het blok is opgelegd met een scharnier bij A en met een pendelstaaf BC. Maten zijn aangegeven in meters. De rekstijfheid van staaf BC is

$$\frac{4}{9}\sqrt{2} \times 10^6 \text{ N.}$$



Gevraagd:

- a. De kracht in staaf BC.

Splits blok in rechthoek en driehoek.
Driehoek halve opp. van rechthoek, 4500 N te verdelen
over 3000 N in zwaartepunt rechthoek en 1500 N in
zwaartepunt driehoek.

$$\sum T|A = 0 \Rightarrow -3000 \cdot 2 - 1500 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 + N_x \cdot g = 0$$

$$\Rightarrow N_x = \frac{8000}{g} \text{ Newton}$$

$$N = N_x \cdot \sqrt{2} = \frac{8000}{g} \sqrt{2} \text{ Newton trek}$$

--	--	--	--	--	--	--	--

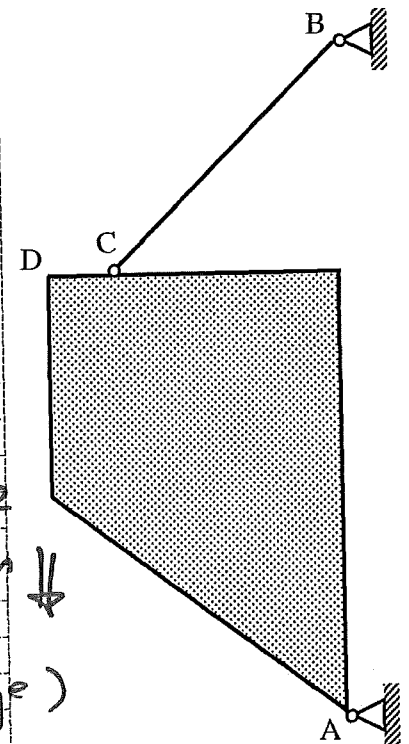
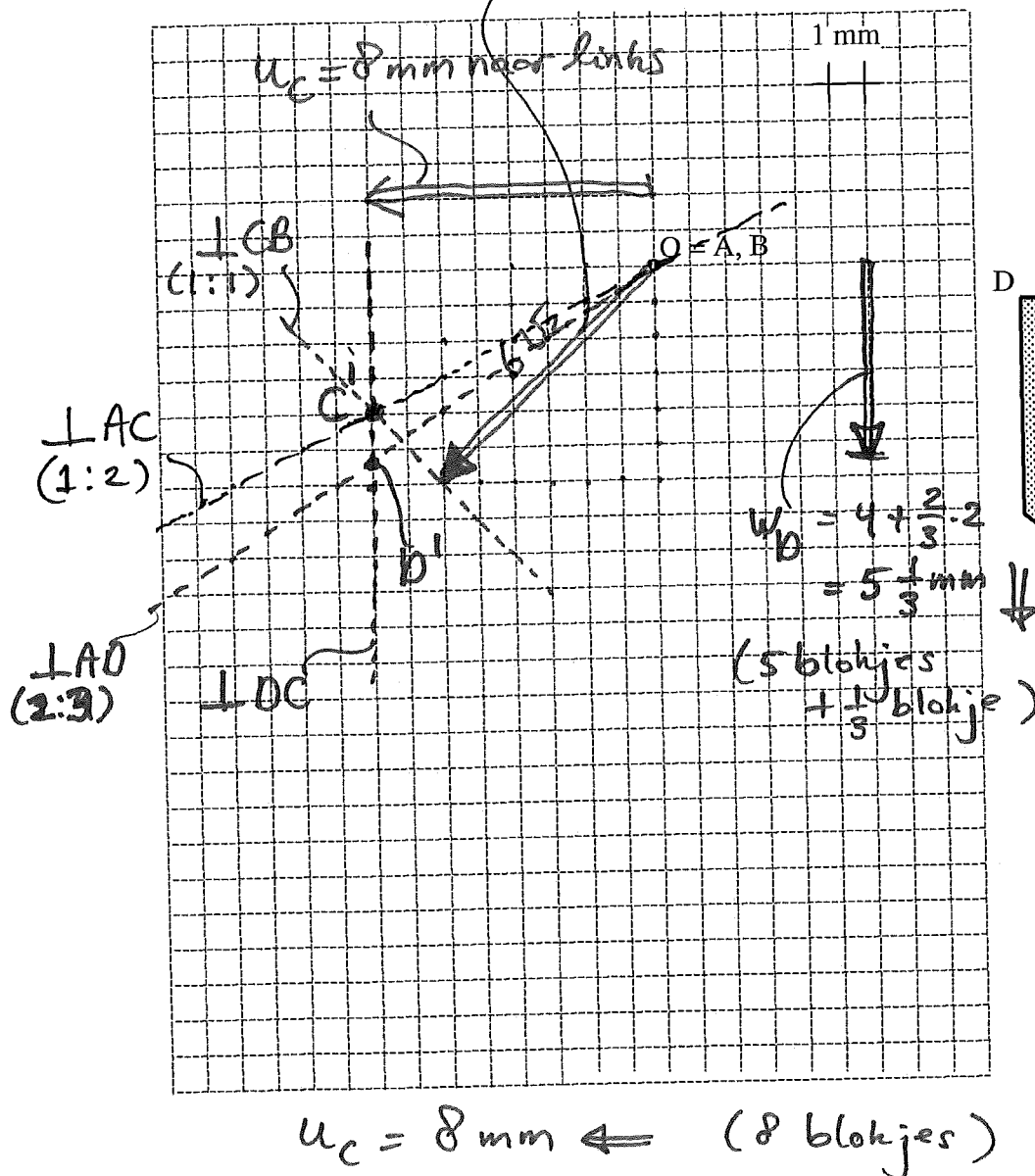
b. De verlenging van staaf BC.

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{EA} = \frac{8000 \sqrt{2} \cdot 3 \sqrt{2} \cdot 10^3}{9 \cdot 4 \sqrt{2} \cdot 10^6} = 6 \sqrt{2} \text{ mm}$$

verlenging

c. De horizontale verplaatsing van punt C.

punt C wil t.o.v. B $6\sqrt{2}$ mm naar links onder



--	--	--	--	--	--	--	--

d. De verticale verplaatsing van punt D.

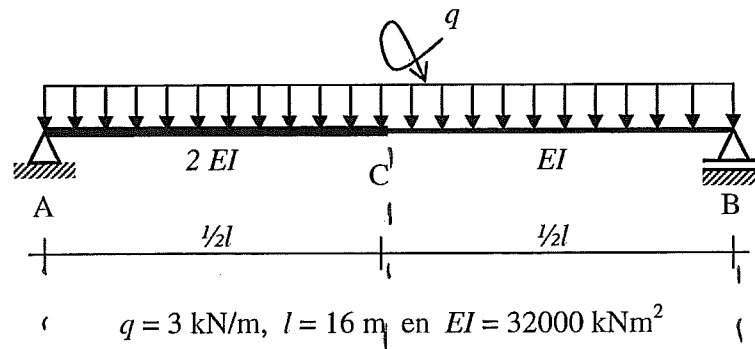
$$w_D = 5 \frac{1}{3} \text{ mm} \downarrow$$

naar beneden

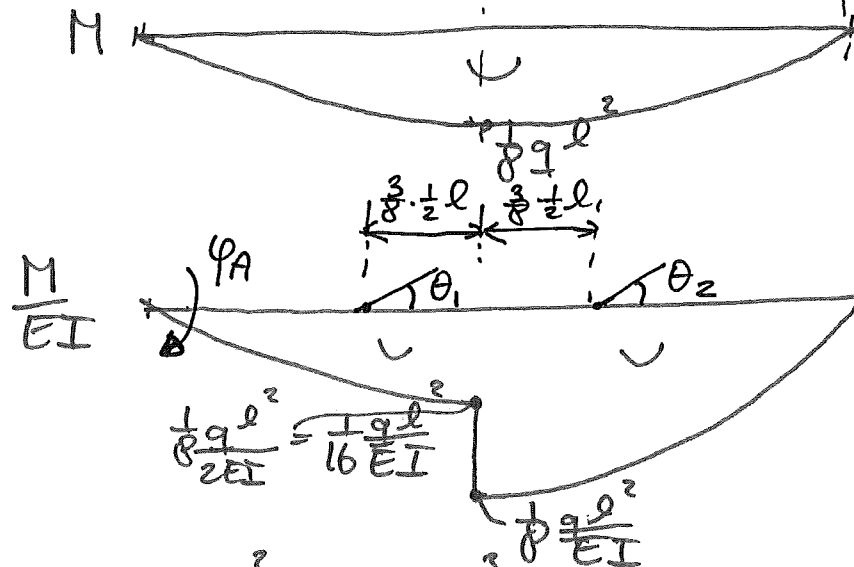
--	--	--	--	--	--	--

OPGAVE 3 (gewicht 1,5 - ongeveer 30 minuten)

Gegeven: Van de vrij opgelegde ligger ACB is de buigstijfheid van AC 2 maal zo groot als de buigstijfheid EI van CB. Een blad met oppervlakte-eigenschappen van parabolen is toegevoegd aan dit antwoordformulier.



Gevraagd: De zakking van punt C.



$$\theta_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} l \cdot \frac{1}{16} \frac{q l^2}{EI} = \frac{1}{48} \frac{q l^3}{EI}$$

$$\theta_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} l \cdot \frac{1}{8} \frac{q l^2}{EI} = \frac{1}{24} \frac{q l^3}{EI}$$

} zie opp. eigenschap
links onder op blz. 17
grijpen aan op $\frac{3}{8}$ van $\frac{1}{2} l$

(je mag ook driehoek + parabool nemen met opp. eigenschap rechtsonder op blz. 17, is hier bewerkelijker)

--	--	--	--	--	--	--

rotatie φ_A bepalen uit eis $w_B = 0$

$$\varphi_A \cdot l - \theta_1 \cdot \left(\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} l + \frac{1}{2} l \right) - \theta_2 \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{2} l = 0$$

$$\varphi_A \cdot l = \theta_1 \cdot \left(\frac{3}{16} l + \frac{8}{16} l \right) + \theta_2 \cdot \frac{5}{16} l$$

$$= \frac{1}{48} \frac{q l^3}{EI} \cdot \frac{11}{16} l + \frac{1}{24} \frac{q l^3}{EI} \cdot \frac{5}{16} l$$

$$= \left(\frac{11}{48 \cdot 16} + \frac{5}{24 \cdot 16} \right) \frac{q l^4}{EI}$$

$$\Rightarrow \varphi_A = \left(\frac{11}{768} + \frac{10}{768} \right) \frac{q l^3}{EI} = \frac{21}{768} \frac{q l^3}{EI} = \frac{7}{256} \frac{q l^3}{EI}$$

$$w_C = \varphi_A \cdot \frac{1}{2} l - \theta_1 \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} l = \frac{7}{256} \cdot \frac{1}{2} \frac{q l^4}{EI} - \frac{1}{48} \frac{q l^3}{EI} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} l =$$

$$= \left(\frac{7}{512} - \frac{2}{512} \right) \frac{q l^4}{EI}$$

invullen q, l en $EI \Rightarrow w_C = \frac{5 \cdot 3 \cdot 16^4}{512 \cdot 32000}$

$$= 0,06 \text{ m}$$

$$(\varphi_A = \frac{7 \cdot 3 \cdot 16^3}{256 \cdot 32000} = 0,0105 \text{ rad})$$

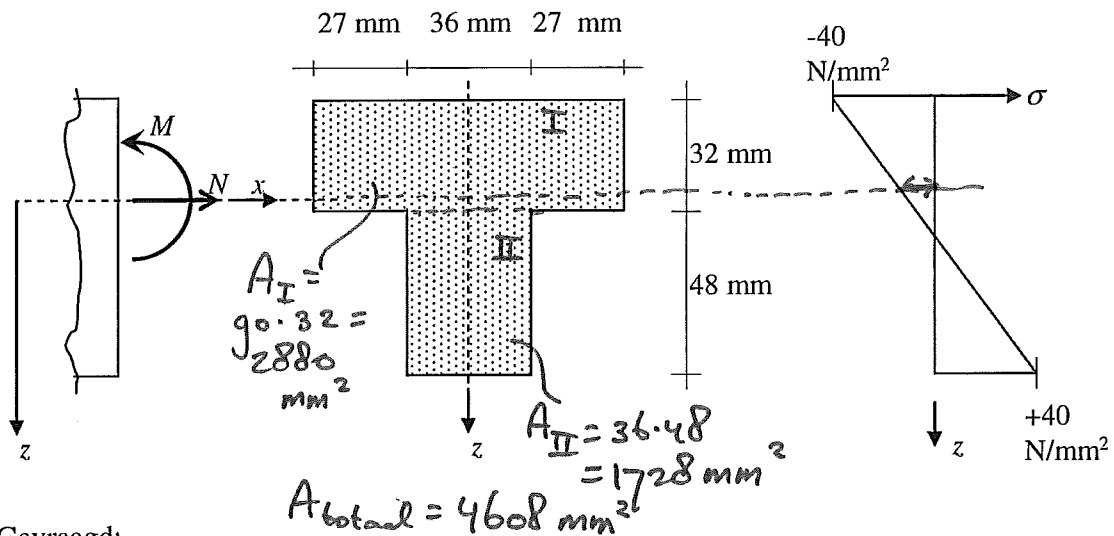
Hier is de uitwerking symbolisch gedaan, in q, l, EI .
Je mag ook direct uitgaan van getalswaarden,
dan zit je niet met de breuken, wellicht sneller.

--	--	--	--	--	--	--

OPGAVE 4 (gewicht 2,0 - ongeveer 35 minuten)

Gegeven: onderstaand normaalspanningsdiagram in de doorsnede van een T-balk. Aan de bovenzijde heerst een drukspanning van -40 N/mm^2 en aan de onderzijde heerst een trekspanning van $+40 \text{ N/mm}^2$.

In de doorsnede van de T-balk werkt een normaalkracht N en een buigend moment M .



Gevraagd:

a. De normaalkracht N (met het juiste teken).

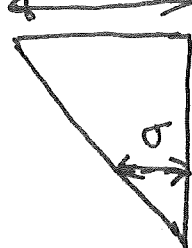
Normaalkrachten centrum NC: afstand a van bovenrand:

$$A_I \cdot \frac{1}{2} \cdot 32 + A_{II} \cdot \left(32 + \frac{1}{2} \cdot 48\right) = A_{\text{totaal}} \cdot a$$

$$a = 31 \text{ mm}$$

$$\begin{aligned}
 I_{zz} &= \frac{1}{12} \cdot 90 \cdot 32^3 + (31 - 16)^2 \cdot 2880 + \frac{1}{12} \cdot 36 \cdot 48^3 + (24 + 1)^2 \cdot 1728 \\
 &= 245760 + 648000 + 331776 + 1080000 \\
 &= 2305536 \text{ mm}^4
 \end{aligned}$$

t.p.v. ~~normaalkrachten~~: $\sigma = \frac{N}{A_{\text{totaal}}}$



$$\begin{aligned}
 \frac{\sigma}{(40 - 31)} &= \frac{-40}{40} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \sigma &= -9 \text{ N/mm}^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N &= \sigma \cdot A_{\text{totaal}} \\
 &= -9 \cdot 4608 \\
 &= -41472 \text{ N} \\
 &\text{(druk)}
 \end{aligned}$$

--	--	--	--	--	--	--

b. Het buigend moment M (met het juiste teken).

ondervezel:

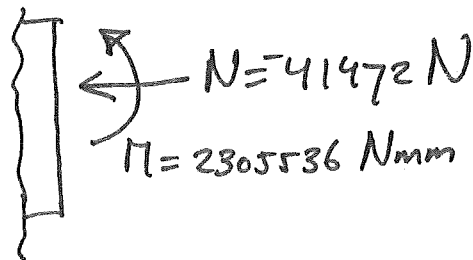
$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M \cdot z}{I_{zz}}$$

$$+40 = -9 + \frac{M \cdot 49}{2305536} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{+49 \cdot 2305536}{49} = +2305536 \text{ Nmm}$$

(controle bovenvezel:

$$-40 = -9 - \frac{M \cdot 31}{2305536} \quad \text{8})$$

dus:

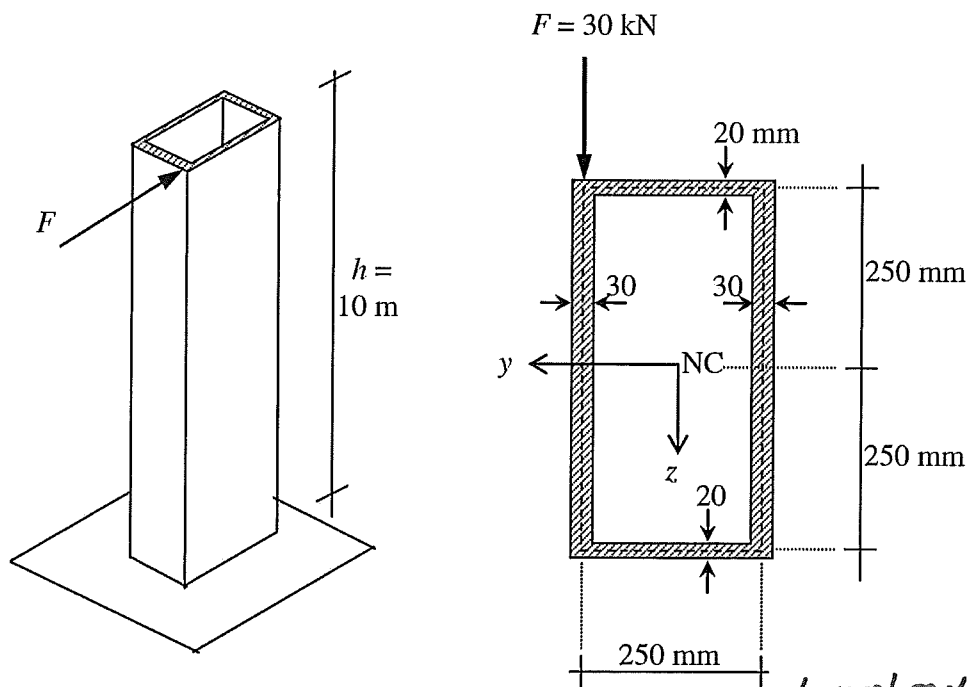


(alternatief: 2 vgl 2 onbekenden)
 /
 boven-en N en M
 ondervezel

--	--	--	--	--	--	--

OPGAVE 5 (gewicht 2,0 - ongeveer 35 minuten)

Gegeven: onderstaande *dunwandige* kolom met een hoogte van 10 m is aan de voet ingeklemd en wordt in het vrije einde belast door een excentrische horizontale kracht van 30 kN. De afmetingen van de dwarsdoorsnede, in mm, kunnen aan de figuur worden ontleend.



Gevraagd voor de doorsnede op de helft van de hoogte:

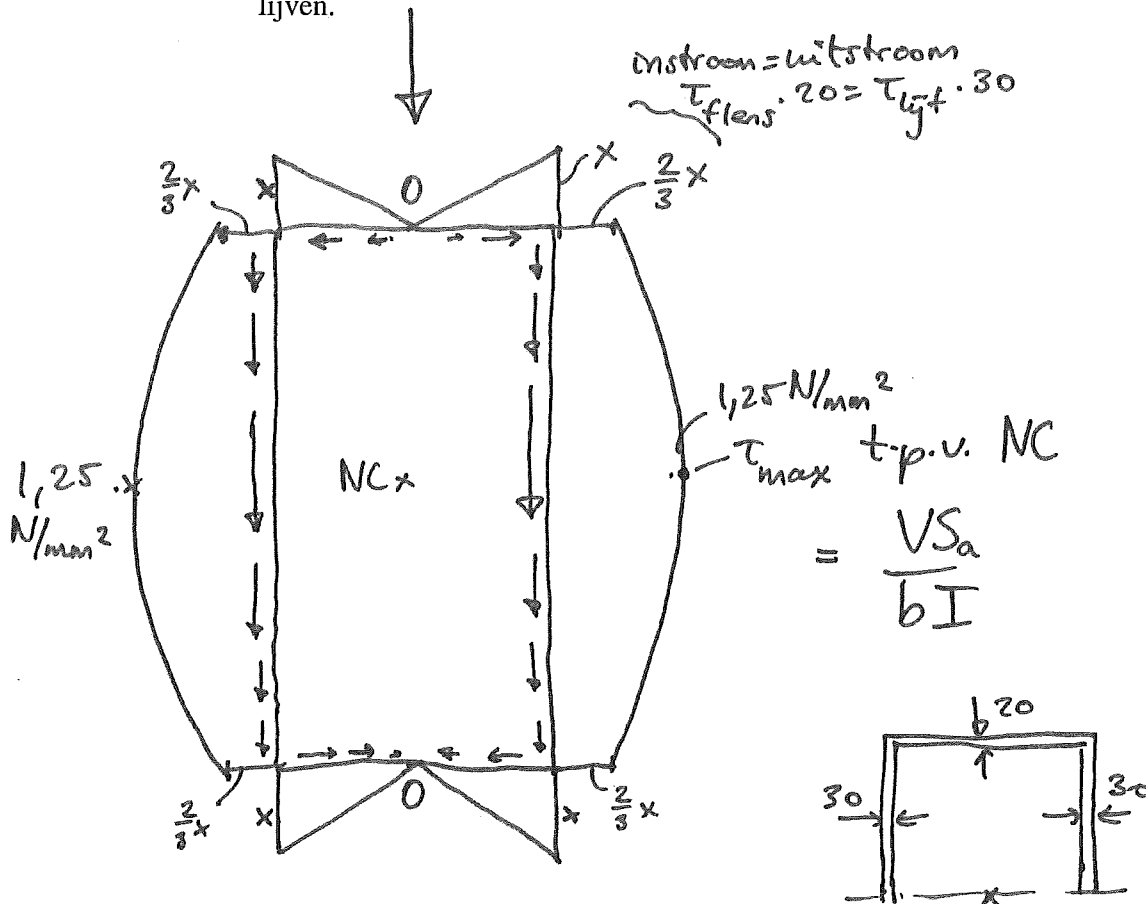
a. Het relevante traagheidsmoment van de dunwandige doorsnede.

voor dwarskracht en wrijving: hoogte positie niet relevant, overal zelfde Ven I_t

$$\begin{aligned}
 I &= 2 \cdot \frac{1}{12} \cdot 30 \cdot 500^3 + 2 \cdot \left(\frac{1}{12} \cdot 250 \cdot 20^3 + 250^2 \cdot 250 \cdot 20 \right) \\
 &= 6,25 \cdot 10^8 + 2 \cdot \left(\underbrace{0,001667 \cdot 10^8}_{\text{verwaarloosbaar}} + 3,125 \cdot 10^8 \right) \\
 &\approx 6,25 \cdot 10^8 + 2 \cdot 3,125 \cdot 10^8 \\
 &= 12,5 \cdot 10^8 \text{ mm}^4
 \end{aligned}$$

--	--	--	--	--	--	--	--

- b. Het schuifspanningsverloop in de doorsnede ten gevolge van dwarskracht. Schets het verloop als diagram en met pijltjes. Bereken de karakteristieke waarden in de middens van flenzen en lijven.



$$S_a = 20 \cdot 250 \cdot 250 + 2 \cdot 30 \cdot 250 \cdot 125$$

$$= 3125000 \text{ mm}^3$$

$$V = 30 \cdot 10^3 \text{ N}$$

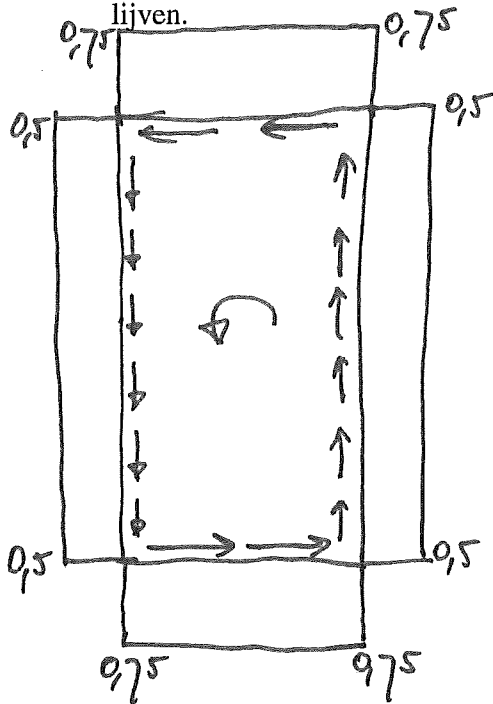
$$b = 2 \cdot 30 \text{ mm (dubbel snede)}$$

$$I = 12,5 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

$$\Rightarrow \tau_{max} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 3125000}{2 \cdot 30 \cdot 12,5 \cdot 10^8} = 1,25 \text{ N/mm}^2$$

--	--	--	--	--	--	--

- c. Het schuifspanningsverloop in de doorsnede ten gevolge van wringing. Schets het verloop als diagram en met pijltjes. Bereken de karakteristieke waarden in de middens van flenzen en lijven.



$$M_t = 30 \cdot 10^3 \cdot 125 = 3,75 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

$$\tau = \frac{M_t}{2 A_m \cdot t} \quad (\text{dunwandig, gesloten})$$

$$A_m = 500 \cdot 250 = 125000 \text{ mm}^2$$

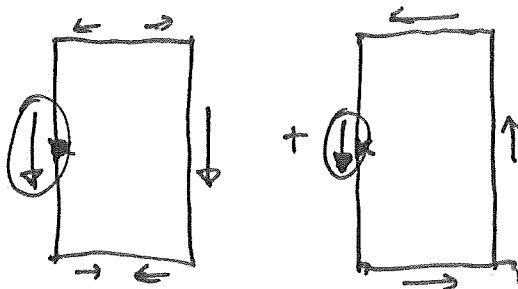
$$\text{flenzen: } t = 20 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{3,75 \cdot 10^6}{2 \cdot 125000 \cdot 20} = 0,75 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{lijven: } t = 30 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{3,75 \cdot 10^6}{2 \cdot 125000 \cdot 30} = 0,5 \text{ N/mm}^2$$

- d. De maximale schuifspanning in de kokerdoorsnede. Waar treedt deze op?



In midden van linkertijds.
Daar versterken ze elkaar.

$$\tau_{\max} = 1,25 + 0,5 = 1,75 \text{ N/mm}^2$$

over volle dikte van het lijf



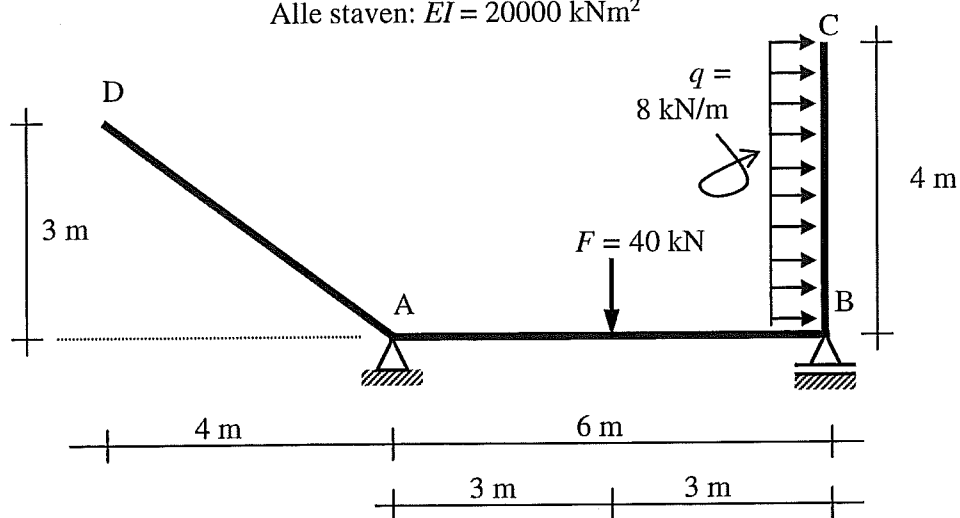
--	--	--	--	--	--	--

OPGAVE 6 (gewicht 2,0 - ongeveer 35 minuten)

Gegeven: onderstaande constructie DABC bestaande uit drie buigvast verbonden delen. Deel BC wordt belast door een horizontale gelijkmatig verdeelde belasting. Deel AB wordt belast door een puntlast in het midden. Maten, belastingen en buigstijfheid EI zijn aangegeven.

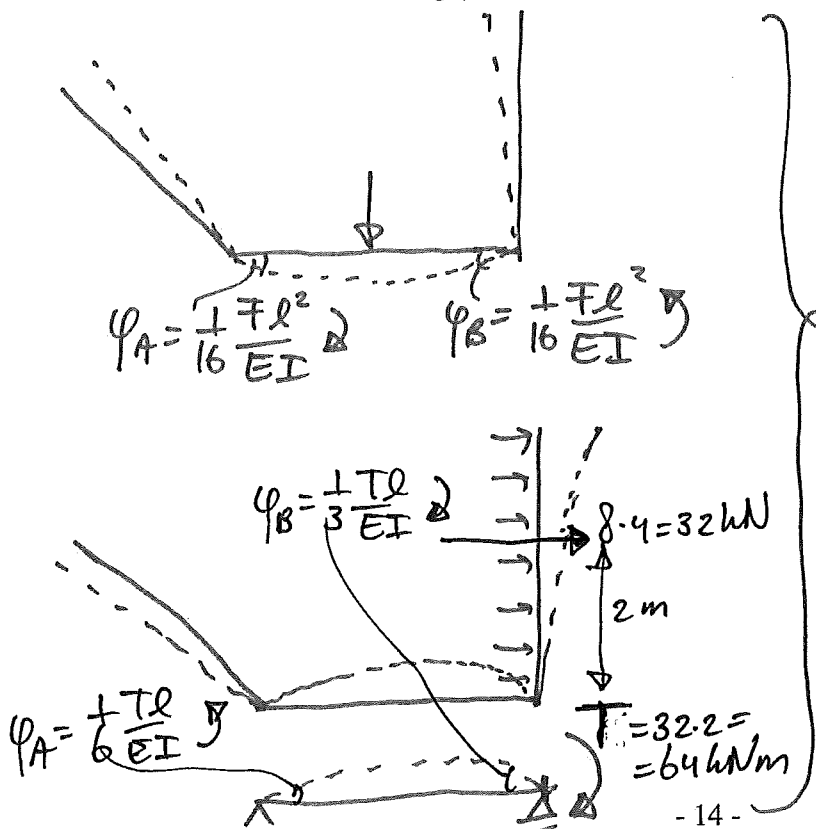
Normaalkrachtvervorming mag worden verwaarloosd ten opzichte van buigvervorming.

Alle staven: $EI = 20000 \text{ kNm}^2$



Gevraagd:

- a. De hoekverdraaiing φ_B van B. Geef met een pijltje aan of het linksom of rechtsom is.



Totaal:

$$\begin{aligned} \varphi_B &= \frac{1}{16} \frac{Fl^2}{EI} \curvearrowright + \frac{1}{3} \frac{Tl}{EI} \curvearrowright \\ &= \frac{1}{16} \frac{40 \cdot 6^2}{20000} \curvearrowright + \frac{1}{3} \frac{64 \cdot 2}{20000} \curvearrowright \\ &= 0,0045 \curvearrowright + 0,0064 \curvearrowright \\ &= 0,0109 \curvearrowright \text{ rad} \end{aligned}$$

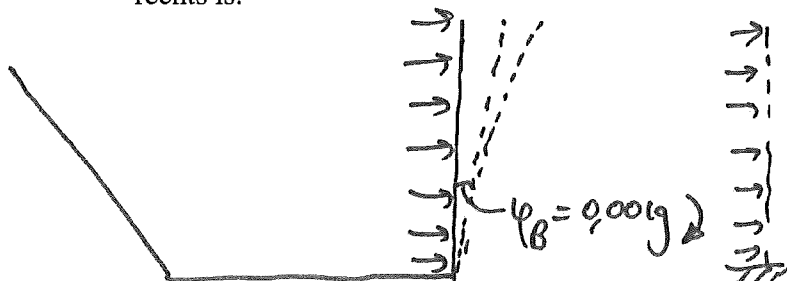
$$\begin{aligned} \varphi_A &= \frac{1}{16} \frac{Fl^2}{EI} \curvearrowright + \frac{1}{6} \frac{Tl}{EI} \curvearrowright \\ &= 0,0045 \curvearrowright + 0,0032 \curvearrowright \\ &= 0,0077 \curvearrowright \text{ rad} \end{aligned}$$

--	--	--	--	--	--	--

- b. De hoekverdraaiing φ_A van A. Geef met een pijltje aan of het linksom of rechtsom is.

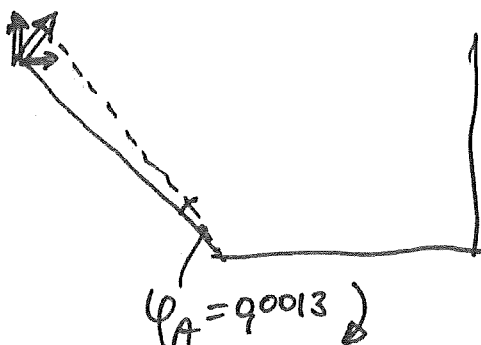
Zie vorige blad

- c. De horizontale verplaatsing van C in mm. Geef met een pijltje aan of het naar links of naar rechts is.



$$\begin{aligned}
 u_C &= \varphi_B \cdot 4 + \frac{1}{8} \frac{q \cdot 4^4}{EI} \\
 &= 0.0019 \cdot 4 + \frac{1}{8} \cdot \frac{19 \cdot 4^4}{20000} \\
 &= 0.0076 + 0.00128 \\
 &= 0.00888 \text{ m} \\
 &= 8.88 \text{ mm} \Rightarrow
 \end{aligned}$$

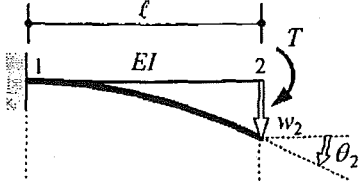
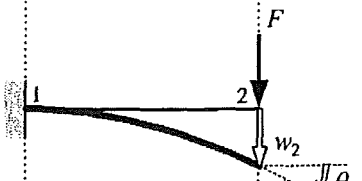
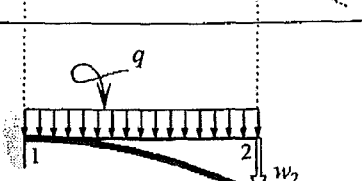
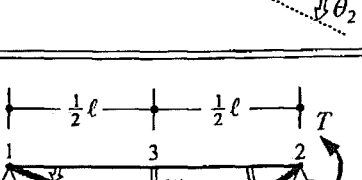
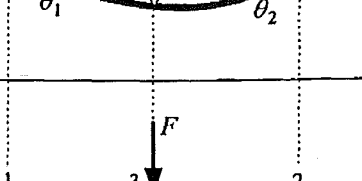
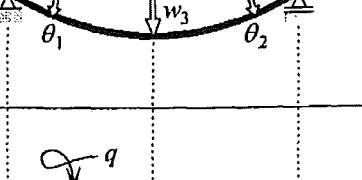
- d. De verticale verplaatsing van D in mm. Geef met een pijltje aan of het omhoog of omlaag is.



$$\begin{aligned}
 w_D &= \varphi_A \cdot \text{horizontale afstand DA} \\
 &= 0.0013 \cdot 4 = 0.0052 \text{ m} = 5.2 \text{ mm} \uparrow
 \end{aligned}$$

--	--	--	--	--	--	--

Vergeet-me-nietjes

(1)		$\theta_2 = \frac{T\ell}{EI}; \quad w_2 = \frac{T\ell^2}{2EI}$
(2)		$\theta_2 = \frac{F\ell^2}{2EI}; \quad w_2 = \frac{F\ell^3}{3EI}$
(3)		$\theta_2 = \frac{q\ell^3}{6EI}; \quad w_2 = \frac{q\ell^4}{8EI}$
(4)		$\theta_1 = \frac{1}{6} \frac{T\ell}{EI}; \quad \theta_2 = \frac{1}{3} \frac{T\ell}{EI}; \quad w_3 = \frac{1}{16} \frac{T\ell^2}{EI}$
(5)		$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{16} \frac{F\ell^2}{EI}; \quad w_3 = \frac{1}{48} \frac{F\ell^3}{EI}$
(6)		$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24} \frac{q\ell^3}{EI}; \quad w_3 = \frac{5}{384} \frac{q\ell^4}{EI}$

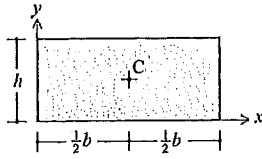
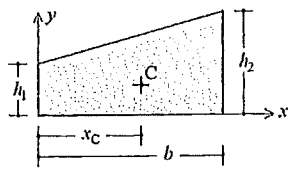
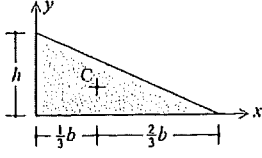
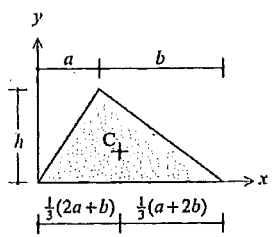
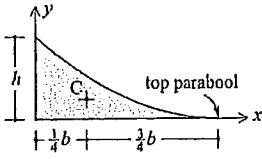
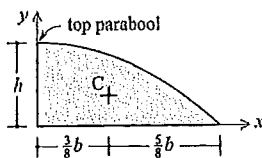
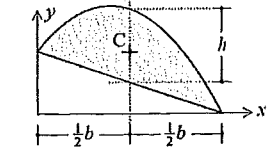
vergeet-mij-nietjes

vrij opgelegde ligger (statisch bepaald)

--	--	--	--	--	--	--

Oppervlakte-eigenschappen voor gebruik bij de momentenvlakstelling

Oppervlakte-eigenschappen die veelvuldig worden gebruikt bij de momentenvlakstellingen

 rechthoek: $A = bh$ $x_C = \frac{1}{2}b$	 trapezium: $A = \frac{1}{2}b(h_1 + h_2)$ $x_C = \frac{1}{3}b \frac{h_1 + 2h_2}{h_1 + h_2}$
 driehoek: $A = \frac{1}{2}bh$ $x_C = \frac{1}{3}b$	 driehoek: $A = \frac{1}{2}(a+b)h$ $x_C = \frac{1}{3}(2a+b)$
 parabool: $A = \frac{1}{3}bh$ $x_C = \frac{1}{4}b$	
 parabool: $A = \frac{2}{3}bh$ $x_C = \frac{3}{8}b$	 parabool: $A = \frac{2}{3}bh$ $x_C = \frac{1}{2}b$

--	--	--	--	--	--	--	--

Max Hendriks.

Antwoordformulier

CT1041 Constructiemechanica 2

5 ECTS

28 juni 2010

Zet op alle bladen uw naam en studienummer.

Bladen zonder naam en studienummer worden niet geaccepteerd.

Relevante berekeningen vermelden.

Antwoorden zonder berekening/motivering worden niet gehonoreerd.

Gebruik zo nodig de onbedrukte zijden van het antwoordformulier.

Tenzij anders vermeld wordt het **eigen gewicht van een constructie buiten beschouwing** gelaten.

Een blad met relevante **vergeet-me-nietjes** voor buigvervorming is toegevoegd aan dit antwoordformulier.

Benut controlemogelijkheden om rekenfouten te vermijden.

Maak de opgaven in een volgorde naar eigen keuze.

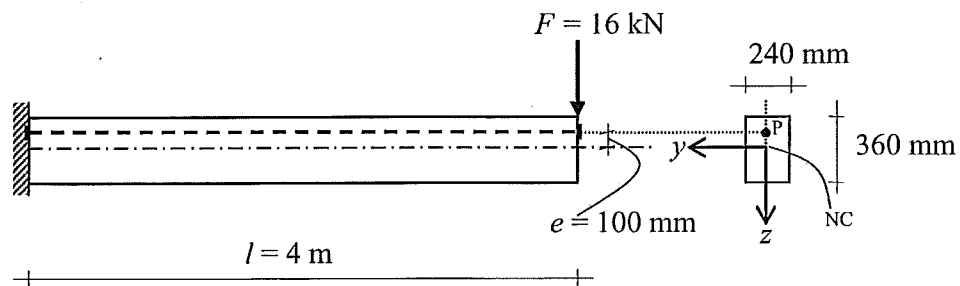
Let op: er zijn **5 opgaven**.

vraag	score
1	
2	
3	
4	
5	
totaal	

--	--	--	--	--	--	--

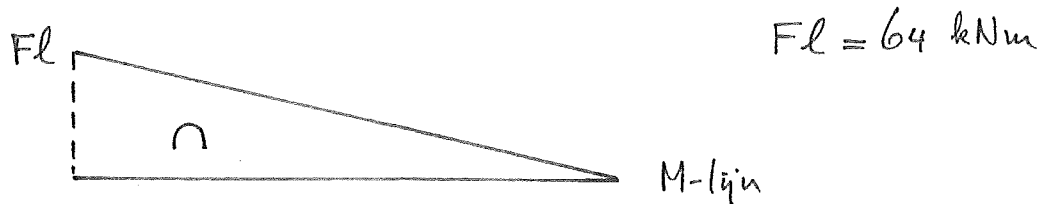
OPGAVE 1 (gewicht 2,2 - ongeveer 40 minuten)

Onderstaande, eenzijdig ingeklemde, balk met rechthoekige doorsnede is voorgespannen door middel van een rechte voorspanstaaf. De voorspanstaaf heeft een excentriciteit $e = 100$ mm.

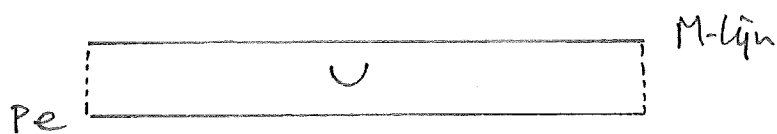


Vragen:

- a. Teken voor de tot lijnelement geschematiseerde balk de M -lijn ten gevolge van alleen $F = 16$ kN.



- b. Schets ook de M - en N -lijn ten gevolge van alleen de (nog onbekende) voorspankracht P .



--	--	--	--	--	--	--

- c. Bereken de minimaal benodigde voorspankracht P opdat nergens in de inklemmingsdoorsnede trek optreedt.

Inklemmings dsn.: $M_z = Pe - Fl = 100P - 64000000 \text{ Nmm}$

$$N = -P \quad N$$

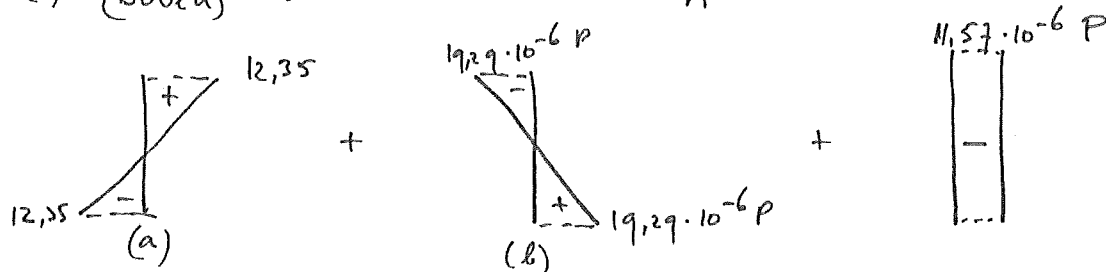
$$I_{zz} = \frac{1}{12} bh^3 = \frac{1}{12} 240 \cdot 360^3 = 933,12 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$A = 240 \cdot 360 = 86,4 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$$

(a) σ_{boven} t.g.v. $M_z = -Fl$: $\sigma = \frac{-Fl \cdot (-180)}{I_{zz}} = +12,35 \text{ N/mm}^2 \text{ (trek)}$

(b) σ_{boven} t.g.v. $M_z = Pe$: $\sigma = \frac{Pe \cdot (-180)}{I_{zz}} = -19,29 \cdot 10^{-6} P \text{ N/mm}^2 \text{ (druk)}$

(c) σ_{boven} t.g.v. $N = -P$: $\sigma = \frac{-P}{A} = -11,57 \cdot 10^{-6} P \text{ N/mm}^2 \text{ (druk)}$



$\sigma_{\text{boven, totaal}}$ moet 0 zijn:

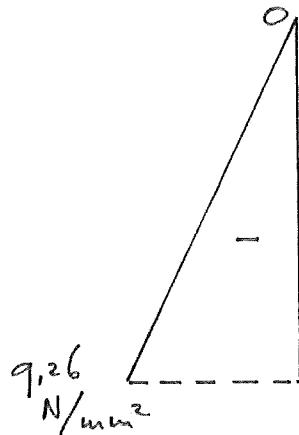
$$12,35 - 19,29 \cdot 10^{-6} P - 11,57 \cdot 10^{-6} P = 0 \rightarrow P = 400 \cdot 10^3 \text{ N}$$

$\sigma_{\text{onder, totaal}}$ is dan:

$$-12,35 + 19,29 \cdot 10^{-6} \cdot 400 \cdot 10^3 - 11,57 \cdot 10^{-6} \cdot 400 \cdot 10^3 = -9,26 \text{ N/mm}^2$$

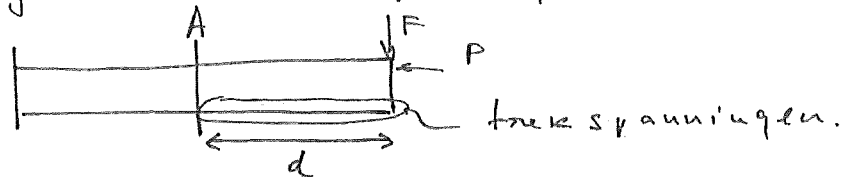
--	--	--	--	--	--	--

- d. Teken het normaalspanningsdiagram voor de inklemmingsdoorsnede, met de goede tekens voor trek en druk, en schrijf de waarden er bij.



- e. Beschouw nu niet alleen de inklemmingsdoorsnede, maar de hele balk in langsrichting. Over welk deel van de balk treden trekspanningen op, bij de bij c) bepaalde voorspankracht P?

P ligt buiten de kern van de dsu. Dus, t.q.v. P trekspanningen aan de onderzijde. Over een deel "d" aan de rechterkant van de balk zal deze trekspanning niet gecompenseerd worden door de drukspanning aan de onderzijde t.q.v. $M_z = -Fd$:



Bij dsu. A:

$$\sigma_{\text{onder t.q.v. } M_z = -Fd}: \sigma = \frac{-Fd(+180)}{I_{zz}} = -3,09 \cdot 10^{-3} d \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (\text{druk})$$

$$\sigma_{\text{onder t.q.v. } P}: \sigma = +19,29 \cdot 10^{-6} \cdot 400 \cdot 10^3 - 11,57 \cdot 10^{-6} \cdot 400 \cdot 10^3 = +3,09 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

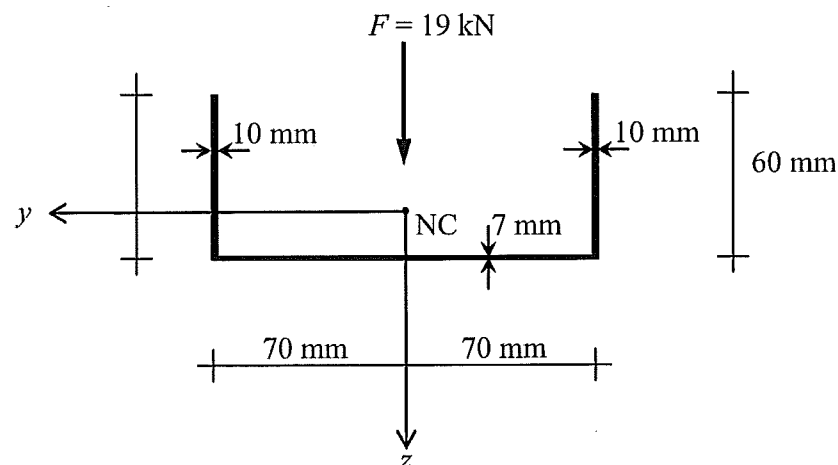
$\sigma_{\text{onder, totaal}} \text{ gelijk aan } 0$:

$$-3,09 \cdot 10^{-3} \cdot d + 3,09 = 0 \rightarrow d = 1000 \text{ mm.}$$

--	--	--	--	--	--	--

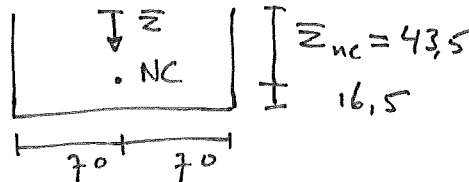
OPGAVE 2 (gewicht 2,0 - ongeveer 35 minuten)

Onderstaand *dunwandig* U-profiel moet in het symmetrievlak een dwarskracht van $F = 19 \text{ kN}$ overbrengen.



Gevraagd:

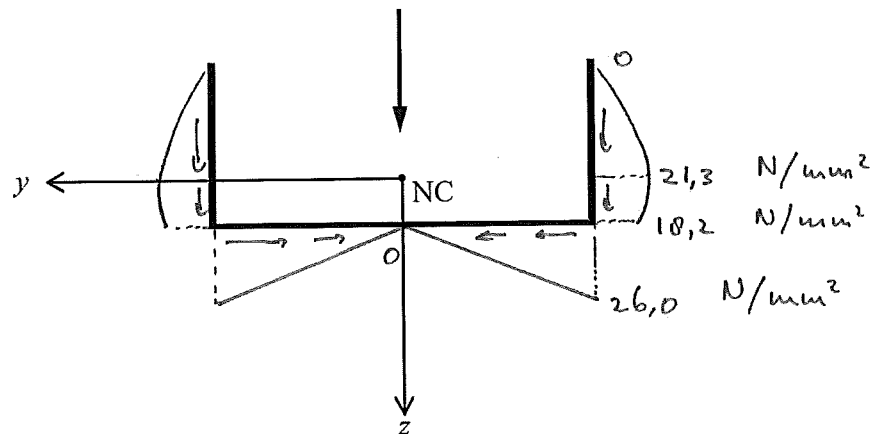
- a. Bepaal de plaats van het normaalkrachtencentrum NC van de doorsnede. Rond af op 1 decimaal nauwkeurig.



$$\bar{z}_{nc} = \frac{S_{\bar{z}}}{A} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 60 \cdot 30 + 140 \cdot 7 \cdot 60}{7 \cdot 140 + 2 \cdot 10 \cdot 60} = 43,5 \text{ mm}$$

--	--	--	--	--	--	--	--

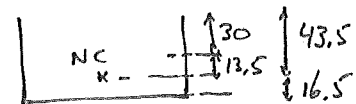
- b. Het schuifspanningsverloop. Teken het diagram. Geef met pijlen de richting aan.



- c. De waarden van de schuifspanning bij de overgang van lijven en flens, bij de uiteinden en ter plaatse van NC.

$$V = 19000 \text{ N}$$

$$I_{zz} = I_{\text{lijven}} + 2 \left\{ I_{\text{flens}} + I_{\text{skerven}} \right\}$$



$$= 7 \cdot 140 \cdot (16,5)^2 + 2 \cdot \left\{ \frac{1}{12} \cdot 10 \cdot 60^3 + 10 \cdot 60 \cdot (13,5)^2 \right\} = 845,5 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$$

• Ten plaatse van NC:

$$\tau = \frac{VS}{bI_{zz}} \quad \text{met} \quad b = 2 \cdot 10 = 20 \text{ mm}$$

$$S = 2 \cdot 43,5 \cdot 10 \cdot \frac{43,5}{2} = 18922,5 \text{ mm}^3$$

$$\tau = 21,3 \text{ N/mm}^2$$

--	--	--	--	--	--	--

- De plaatselijke overgang tussen de ligger en de flens

$$\tau = \frac{VS}{b I_{zz}}$$

$$\text{met } b = 2 \cdot 10 = 20 \text{ mm (ligger)}$$

$$b = 2 \cdot 7 = 14 \text{ mm (flens)}$$

$$S = 2 \cdot 60 \cdot 10 \cdot 13,5 = 16200 \text{ mm}^3$$

$$\tau_{\text{ligger}} = 18,2 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{\text{flens}} = 26,0 \text{ N/mm}^2$$

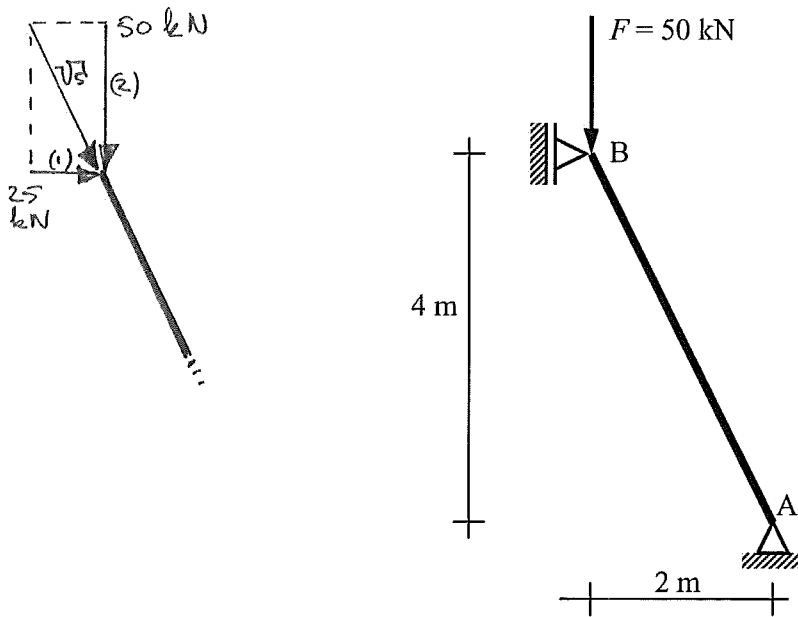
- d. De maximale schuifspanning in de doorsnede en de plaats waar deze optreedt.

26,0 N/mm² links en rechts in de flens bij de overgang naar de ligger.

--	--	--	--	--	--	--

OPGAVE 3 (gewicht 1,6 - ongeveer 30 minuten)

Onderstaande staaf AB is opgelegd op een scharnier in A en een verticale rol in B. De staaf wordt in B belast door een verticale kracht $F = 50 \text{ kN}$. De rekstijfheid van de staaf is $EA = 43 \text{ MN}$.

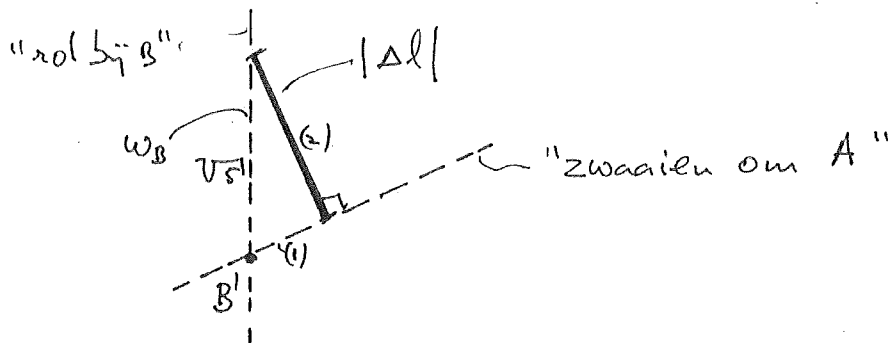


Gevraagd: de zakking van B.

$$N = -\sqrt{25^2 + 50^2} = -25\sqrt{5} \text{ kN}$$

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} = \frac{-25\sqrt{5} \cdot \sqrt{2^2 + 4^2}}{43 \cdot 10^3} = \frac{-250}{43 \cdot 10^3} \approx -5,81 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

(in kN en m)



$$\omega_B = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot |\Delta l| = 6,5 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 6,5 \text{ mm}$$

Technische Universiteit Delft

Faculteit CiTG

Tentamen CT1041 Constructiemechanica 2

28 juni 2010 van 18.30-21.30 uur

STUDIENUMMER

NAAM

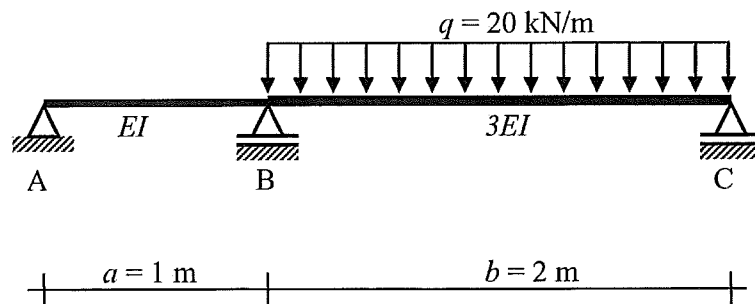
--	--	--	--	--	--	--	--

//

--	--	--	--	--	--	--

OPGAVE 4 (gewicht 2,0 - ongeveer 35 minuten)

Onderstaande doorgaande ligger ABC heeft tussen AB een buigstijfheid EI , en tussen BC een buigstijfheid $3EI$. De grootte van EI is niet gegeven.

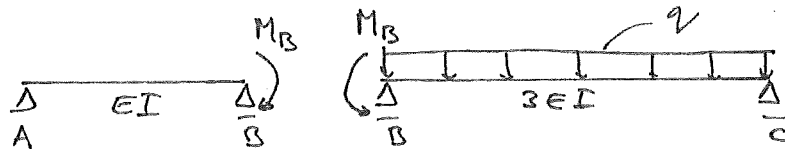


Gevraagd:

- a. Het buigend moment in B.

Aanwijzing: Kies als statisch onbepaalde het buigend moment ter plaatse van B (het zogenaamde steunpuntsmoment).

Lossingen in B:



Aan sluit voorwaarde $\varphi_{B, \text{links}} = \varphi_{B, \text{rechts}}$

$$\varphi_{B, \text{links}} = \frac{1}{3} \frac{M_B l}{EI} = \frac{1}{3} \frac{M_B}{EI}$$

$$\varphi_{B, \text{rechts}} = \frac{1}{3} \frac{M_B l}{EI} + \frac{1}{24} \frac{q l^3}{EI} = -\frac{1}{3} \frac{M_B \cdot 2}{3EI} + \frac{1}{24} \frac{20 \cdot 8}{3EI}$$

$$\text{dus: } \frac{1}{3} M_B = -\frac{2}{9} M_B + \frac{160}{72}$$

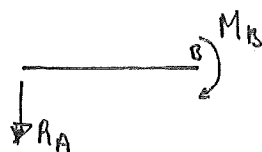
$$\frac{5}{9} M_B = \frac{20}{9}$$

$$M_B = 4 \text{ kNm}$$

--	--	--	--	--	--	--

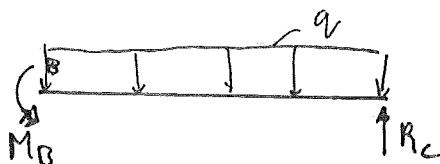
b. De oplegreactie bij B.

Linker deel:



$$\sum T_B = 0 \rightarrow R_A \cdot a - M_B = 0 \rightarrow R_A = M_B = 4 \text{ kN}$$

rechter deel:

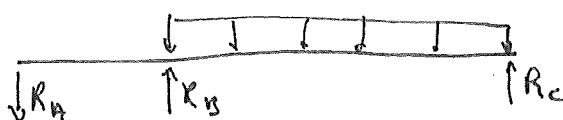


$$\sum T_B = 0 \rightarrow -M_B - R_C b + q \cdot b \cdot \frac{1}{2} b = 0$$

$$\rightarrow -4 - 2R_C + 40 = 0$$

$$\rightarrow R_C = 18 \text{ kN}$$

geheel:



$$\sum F_V = 0 \rightarrow -R_A - qb + R_B + R_C = 0$$

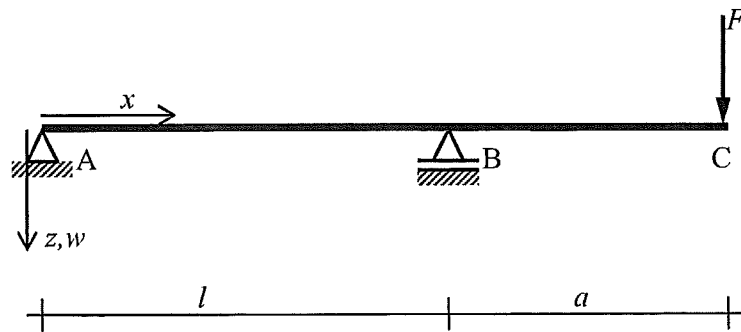
$$\rightarrow R_B = R_A + qb - R_C$$

$$= 4 + 40 - 18 = 26 \text{ kN}$$

--	--	--	--	--	--	--

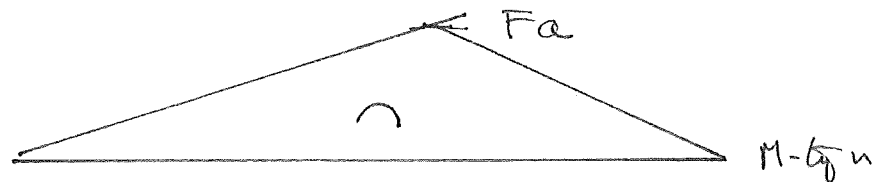
OPGAVE 5 (gewicht 2,2 - ongeveer 40 minuten)

Onderstaande vrij opgelegde ligger ABC is belast door een kracht F bij C. De buigstijfheid is EI . Maten en assenstelsel zijn aangegeven.



Gevraagd:

- a. Schets de M -lijn.



- b. Beschouw deel AB ($0 \leq x \leq l$). Schrijf het moment M voor deel AB als een functie van x (een functie $M(x)$ uitgedrukt in F , a , l en x).

$$M(x) = \frac{x}{l} (-Fa) = -\frac{Fa}{l} x$$

- c. Gegeven de differentiaalvergelijking voor buiging: $\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$. Beschouw alleen deel AB.

Los met behulp van de differentiaalvergelijking het verloop van de doorbuiging w als functie van x op, voor deel AB (een functie $w(x)$ uitgedrukt in F , a , l , EI en x).

--	--	--	--	--	--	--

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{-M(x)}{EI} = \frac{+Fa}{EIl} x$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{1}{2} \frac{Fa}{EIl} x^2 + C_1$$

$$w = \frac{1}{6} \frac{Fa}{EIl} x^3 + C_1 x + C_2$$

Randvoorwaarden

$$x=0 \text{ dan } w=0 \rightarrow C_2=0$$

$$x=l \text{ dan } w=0 \rightarrow 0 = \frac{1}{6} \frac{Fa}{EIl} l^3 + C_1 l \rightarrow C_1 = -\frac{1}{6} \frac{Fal}{EI}$$

Dus

$$w = \frac{1}{6} \frac{Fa}{EIl} x^3 - \frac{1}{6} \frac{Fal}{EI} x$$

d. Bepaal, uitgaande van het antwoord bij c), de rotatie bij A.

$$\varphi_A = -\left(\frac{dw}{dx}\right)_{x=0} = -C_1 = \frac{1}{6} \frac{Fal}{EI}$$

--	--	--	--	--	--	--

- e. Bepaal de maximale doorbuiging (in absolute zin) voor deel AB, dat wil zeggen de extreme waarde van $w(x)$ voor deel AB. Voor welke x treedt deze op?

Extreem voor x als $\frac{dw}{dx} = 0$ dus

$$\frac{1}{2} \frac{Fa}{EI} x^2 - \frac{1}{6} \frac{Fal}{EI} = 0$$

$$3 \frac{Fa}{EI} x^2 = \frac{Fal}{EI}$$

$$x^2 = \frac{1}{3} l^2$$

$$x = \frac{1}{3} \sqrt{3} l \approx 0,577 l \quad \text{"iets rechts van het midden"}$$

(zie schets (4) op blz. 17.)

Extreme waarde voor w

$$w(x = \frac{1}{3} \sqrt{3} l) =$$

$$\frac{1}{6} \frac{Fa}{EI} \left(\frac{1}{3} \sqrt{3} l \right)^3 - \frac{1}{6} \frac{Fal}{EI} \left(\frac{1}{3} \sqrt{3} l \right) =$$

$$\frac{1}{6} \frac{Fal^2}{EI} \cdot \frac{1}{9} \sqrt{3} - \frac{1}{6} \frac{Fal^2}{EI} \cdot \frac{1}{3} \sqrt{3} =$$

$$\left(\frac{1}{54} - \frac{1}{18} \right) \sqrt{3} \cdot \frac{Fal^2}{EI} =$$

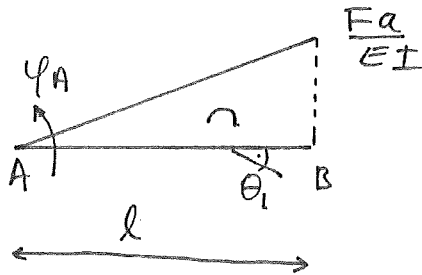
$$-\frac{1}{27} \sqrt{3} \frac{Fal^2}{EI}$$

$$\left(\approx \frac{1,026}{16} \frac{Fal^2}{EI} \right)$$

vergeleek met vergeet-me-nietje (4)
op blz. 17 voor doorbuiging
in het midden, $x = \frac{1}{2} l$.

--	--	--	--	--	--	--

- f. Maak nu gebruik van de methode van momentenvlakstellingen. Bepaal wederom de rotatie bij A en de maximale doorbuiging in AB, en de x waarbij deze optreedt. Controleer uw antwoorden met de antwoorden bij d) en e) volgens de differentiaalvergelijking.



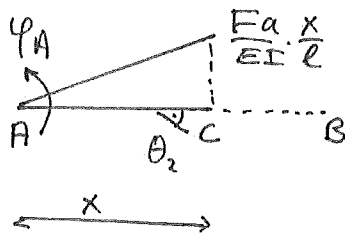
$$\theta_1 = \frac{1}{2} \frac{Fa}{EI} l$$

verticale verplaatsing van B moet nul zijn:

$$-\varphi_A \cdot l + \theta_1 \cdot \frac{1}{3} l = -\varphi_A \cdot l + \frac{1}{2} \frac{Fa}{EI} \cdot \frac{1}{3} l^2 = 0 \quad \rightarrow$$

$$\varphi_A = \frac{1}{6} \frac{Fa}{EI} l \quad (\text{kloft met d}).$$

beschouw nu een deel met lengte " x ":
 $\wedge$
 AC



$$\theta_2 = \frac{1}{2} \frac{Fa}{EI} \cdot \frac{x}{l} \cdot x = \frac{1}{2} \frac{Fa}{EI l} x^2$$

verticale verplaatsing van C:

$$w_C = -\varphi_A \cdot x + \frac{1}{2} \frac{Fa}{EI l} x^2 \cdot \frac{1}{3} x = -\frac{1}{6} \frac{Fa}{EI} l x + \frac{1}{6} \frac{Fa}{EI l} x^3$$

Dit is hetzelfde als het resultaat van onderdeel g).
 Het bepalen van de extreme waarde, en de x waar deze optreedt gaat vervolgens hetzelfde als bij e).

Technische Universiteit Delft

Faculteit CiTG

Tentamen CT1041 Constructiemechanica 2

28 juni 2010 van 18.30-21.30 uur

STUDIENUMMER

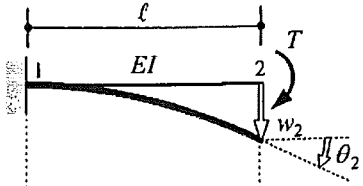
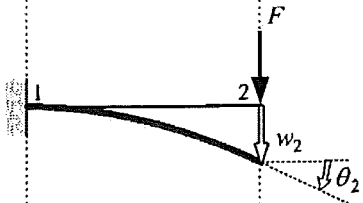
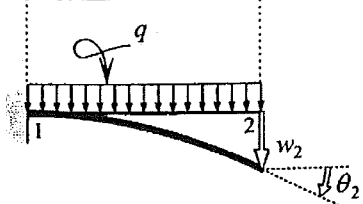
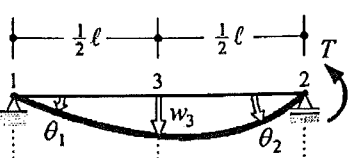
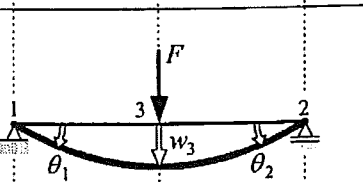
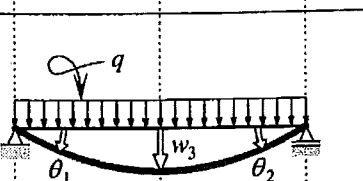
NAAM

--	--	--	--	--	--	--	--



--	--	--	--	--	--	--

Vergeet-me-nietjes

(1)		$\theta_2 = \frac{Tl}{EI}; \quad w_2 = \frac{Tl^2}{2EI}$
(2)		$\theta_2 = \frac{Fl^2}{2EI}; \quad w_2 = \frac{Fl^3}{3EI}$
(3)		$\theta_2 = \frac{ql^3}{6EI}; \quad w_2 = \frac{ql^4}{8EI}$
(4)		$\theta_1 = \frac{1}{6} \frac{Tl}{EI}; \quad \theta_2 = \frac{1}{3} \frac{Tl}{EI}; \quad w_3 = \frac{1}{16} \frac{Tl^2}{EI}$
(5)		$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{16} \frac{Fl^2}{EI}; \quad w_3 = \frac{1}{48} \frac{Fl^3}{EI}$
(6)		$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24} \frac{ql^3}{EI}; \quad w_3 = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI}$

vergeet-mij-nietjes

vrij opgelegde ligger (statisch bepaald)

--	--	--	--	--	--	--	--

Antwoordformulier

CT1041 Constructiemechanica 2

5 ECTS

6 april 2010

Zet op alle bladen uw naam en studienummer.

Bladen zonder naam en studienummer worden niet geaccepteerd.

Relevante berekeningen vermelden.

Antwoorden zonder berekening/motivering worden niet gehonoreerd.

Gebruik zo nodig de onbedrukte zijden van het antwoordformulier.

Tenzij anders vermeld wordt het **eigen gewicht van een constructie buiten beschouwing** gelaten.

Een blad met relevante **vergeet-me-nietjes** voor buigvervorming is toegevoegd aan dit antwoordformulier.

Benut controle mogelijkheden om rekenfouten te vermijden.

Maak de opgaven in een volgorde naar eigen keuze.

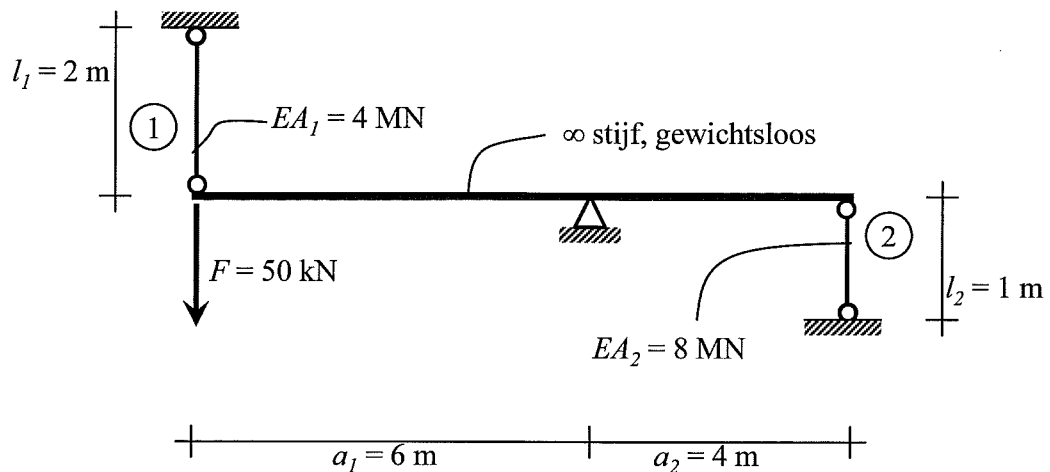
Let op: er zijn **6 opgaven**.

vraag	score
1	
2	
3	
4	
5	
6	
totaal	

--	--	--	--	--	--	--	--

OPGAVE 1 (gewicht 1,3 - ongeveer 25 minuten)

Gegeven: Een volkomen stijve en gewichtsloze ligger is scharnierend opgelegd en aan de uiteinden verbonden met twee verticale staven "1" en "2". In onbelaste toestand is de ligger horizontaal. Overige gegevens zijn in onderstaande figuur aangegeven.



Bereken ten gevolge van kracht F

- De verlenging Δl_1 van staaf "1"
- De kracht N_2 in staaf "2"
- De rek ε_2 in staaf "2"

Technische Universiteit Delft

Faculteit CiTG

Tentamen CT1041 Constructiemechanica 2

6 april 2010 van 09.00-12.00 uur

STUDIENUMMER

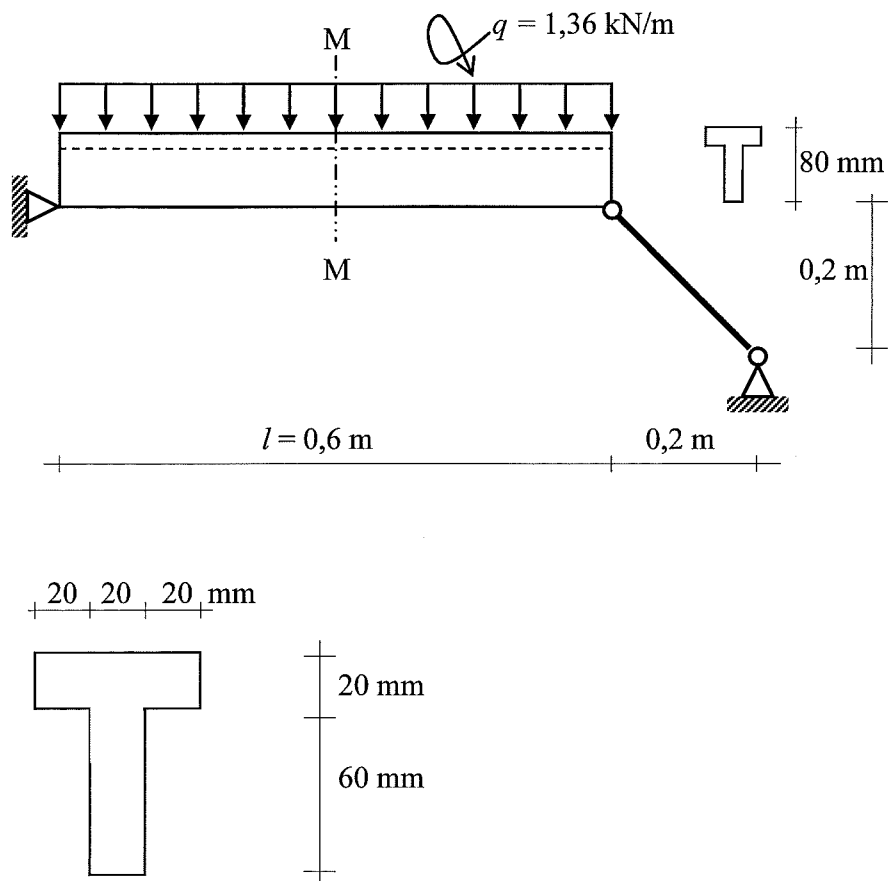
NAAM

--	--	--	--	--	--	--	--

--	--	--	--	--	--	--	--

OPGAVE 2 (gewicht 2,2 - ongeveer 40 minuten)

Gegeven: Een T-vormige ligger met een gelijkmatig verdeelde belasting is excentrisch ondersteund door een scharnier linksonder en een pendelstaaf rechtsonder. Belasting, maten en doorsnede-afmetingen zijn in onderstaande figuur aangegeven.



Gevraagd:

- a. Bepaal de plaats van het normaalkrachtencentrum NC van de doorsnede.

Technische Universiteit Delft

Faculteit CiTG

Tentamen CT1041 Constructiemechanica 2

6 april 2010 van 09.00-12.00 uur

STUDIENUMMER

NAAM

--	--	--	--	--	--	--

b. Bepaal het relevante traagheidsmoment van de doorsnede.

c. Schets de normaalkrachtenlijn en de momentenlijn voor de ligger.

--	--	--	--	--	--	--	--

- d. Bereken de normaalspanning in de bovenvezel en de ondervezel ter plaatse van de middendoorsnede M-M, met het juiste teken voor trek en druk. Teken het normaalspanningsdiagram voor de middendoorsnede (het verloop over de hoogte, niet het ruimtelijk patroon). Schrijf de waarden en tekens erbij.

- e. Bereken de maximale schuifspanning in de ligger. Waar treedt deze op?

Technische Universiteit Delft

Faculteit CiTG

Tentamen CT1041 Constructiemechanica 2

6 april 2010 van 09.00-12.00 uur

STUDIENUMMER

NAAM

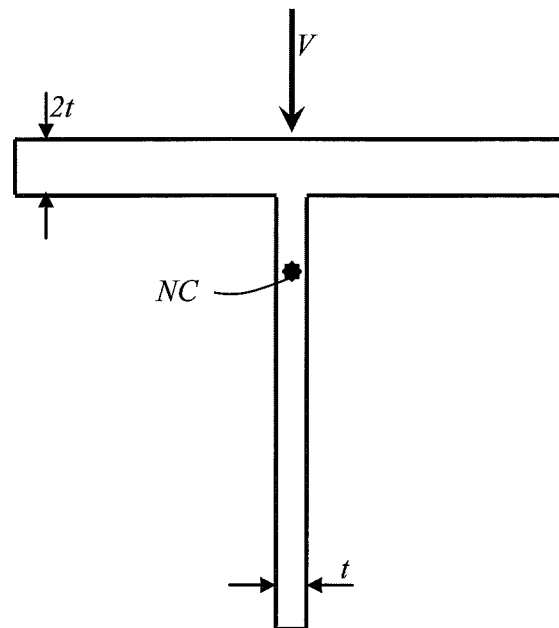
--	--	--	--	--	--	--

--	--	--	--	--	--	--	--

OPGAVE 3 (gewicht 1,5 - ongeveer 25 minuten)

Gegeven: onderstaande *dunwandige* T-doorsnede, waarvan de flens twee maal zo dik is als het lijf. In de figuur zijn de diktes van lijf en flens overdreven weergegeven.

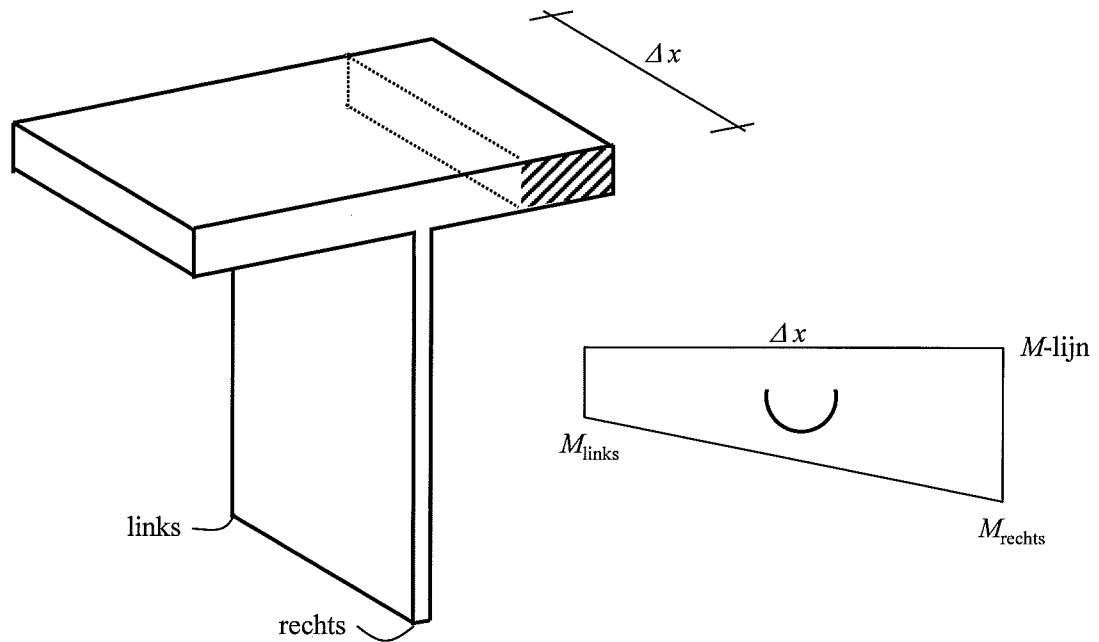
De doorsnede brengt een verticale dwarskracht V over. De plaats van het normaalkrachten centrum NC is schematisch aangegeven.



- a. Verklaar, met een schets en maximaal 10 regels tekst, waarom er in de flenzen van het T-profiel *horizontale* schuifspanningen kunnen optreden ten gevolge van de *verticale* dwarskracht V .

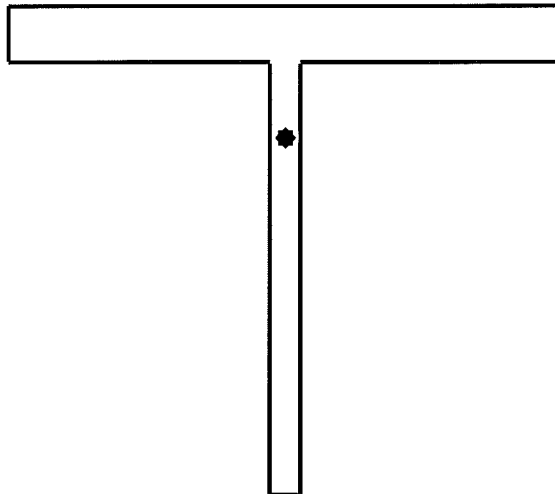
Aanwijzing, zie onderstaande figuur: beschouw een mootje in langsrichting en stel een evenwichtsbeschouwing op voor het aangegeven deel van de flens, achter het gearceerde vlakje. Besef dat de verticale dwarskracht impliceert dat het buigend moment varieert zoals aangegeven.

--	--	--	--	--	--	--



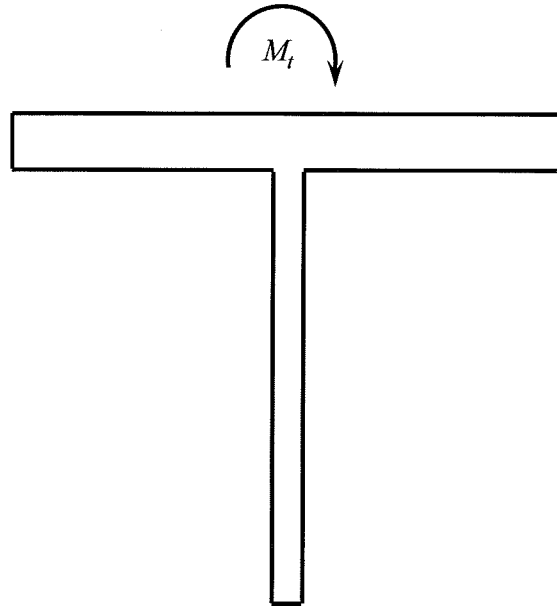
--	--	--	--	--	--	--	--

- b. Schets het schuifspanningsdiagram voor de doorsnede. Teken er pijltjes bij die grootte en richting van de schuifspanningen aangeven. Geef aan waar het maximum zich bevindt en waar de schuifspanningen nul zijn. Geef bij de kruising van flens en lijf aan hoe de schuifspanningen net links en net rechts van de flens zich verhouden tot de schuifspanning net onder de flens.



--	--	--	--	--	--	--	--

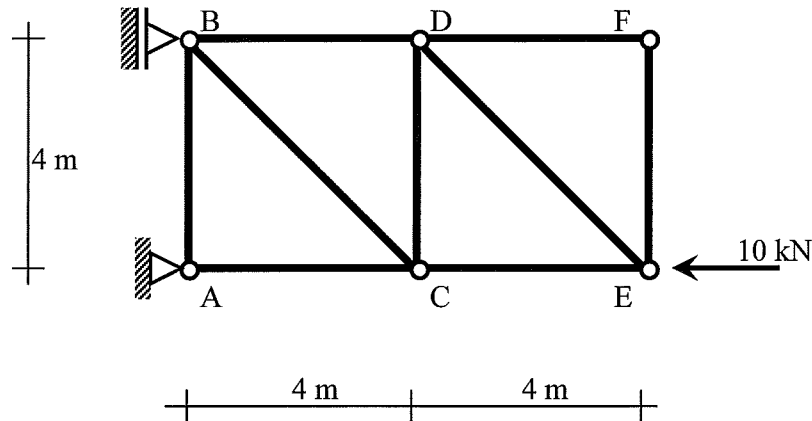
- c. Dezelfde doorsnede wordt nu belast door een wringend moment (zonder dwarskracht). Schets het schuifspanningsverloop in de doorsnede bij dit wringend moment, met pijltjes. Beredeneer met beknopte tekst en uitleg waar de schuifspanning het grootst zal zijn: in de flens of in het lijf.



--	--	--	--	--	--	--	--

OPGAVE 4 (gewicht 1,5 - ongeveer 25 minuten)

Gegeven: onderstaand vakwerk. Afmetingen, belasting en opleggingen zijn aangegeven. De rekstijfheid EA van de staven is 20000 kN.



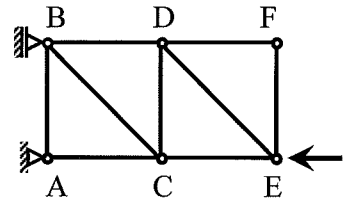
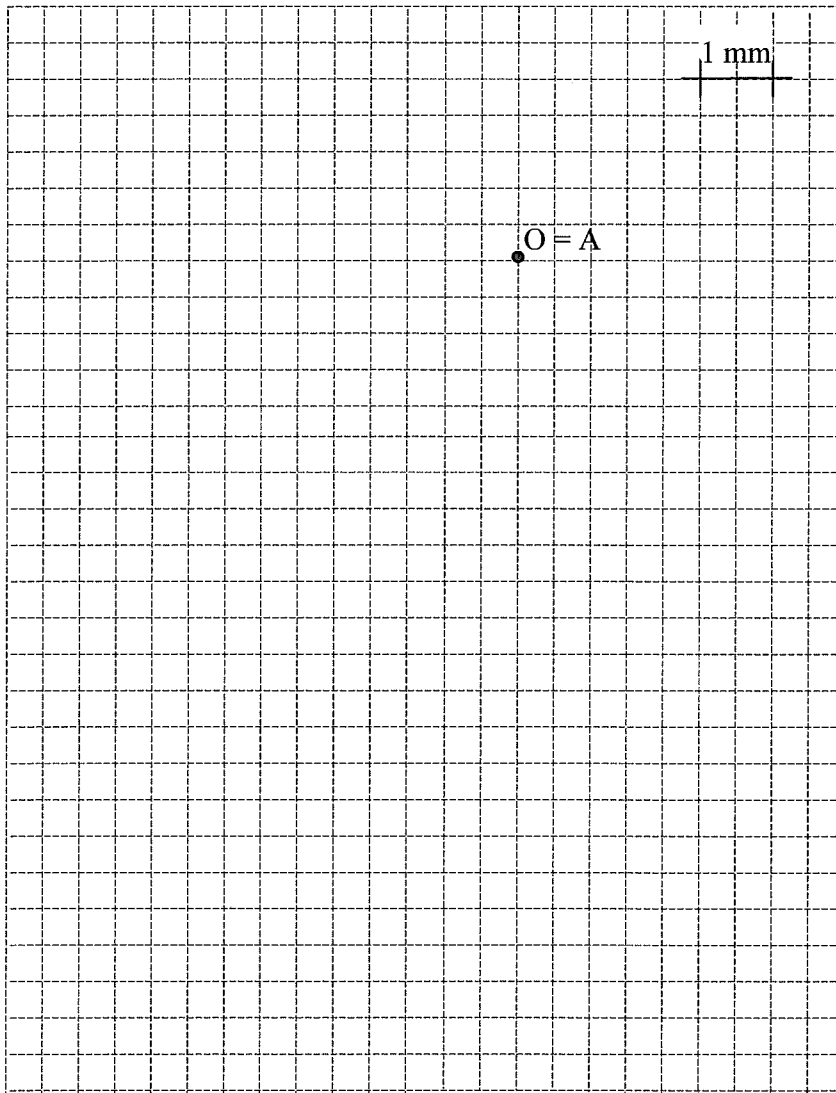
Gevraagd:

- Bepaal de staafkrachten. Let op het teken (trek, druk) en op nulstaven. Verzamel de gegevens in de tabel.
- Bereken voor alle staven de lengteverandering, in mm en met het goede teken voor verlenging of verkorting, of nul. Verzamel de gegevens in de tabel.

Staaf	N_i (kN)	Δl_i (mm)
AB		
AC		
BC		
BD		
CD		
CE		
DE		
DF		
EF		

--	--	--	--	--	--	--	--

c. Teken het Williot-diagram.



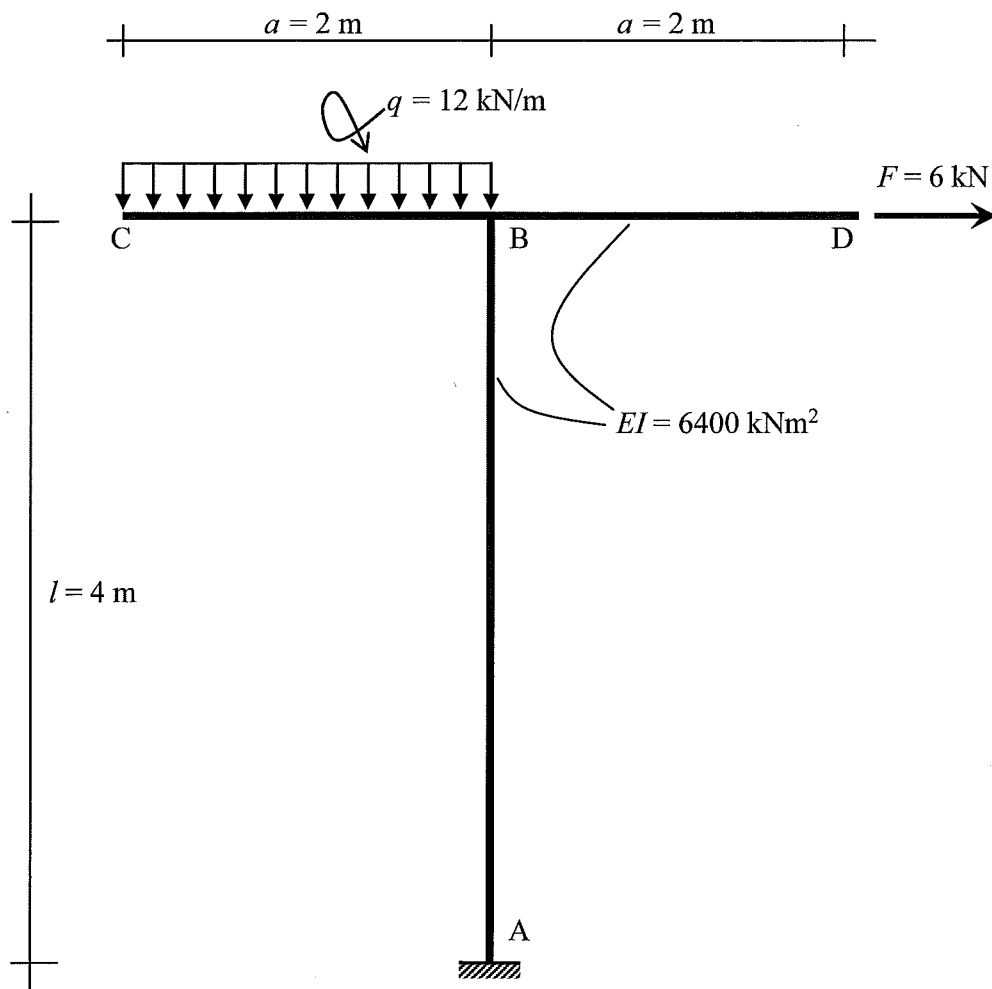
d. Verzamel de gevonden horizontale verplaatsing (u_h) en verticale verplaatsing (u_v) van de knopen D en F in onderstaande tabel. Geef met een pijltje de richting aan.

Knoop	u_h (mm)	u_v (mm)
D		
F		

--	--	--	--	--	--	--	--

OPGAVE 5 (gewicht 1,5 - ongeveer 25 minuten)

Gegeven: onderstaande constructie, opgebouwd uit kolom AB en balk CBD die momentvast zijn verbonden. De constructie is ingeklemd bij A en wordt belast door een verticale gelijkmatige verdeelde belasting en een horizontale puntlast als aangegeven. Maten en buigstijfheid EI zijn aangegeven. Normaalkrach vervorming wordt verwaarloosd ten opzichte van buigvervorming. De opgave dient te worden uitgewerkt met behulp van vergeet-me-nietjes. Een blad met relevante vergeet-me-nietjes is toegevoegd aan dit antwoordformulier.



Gevraagd:

- a. Bereken de rotatie van B. Geef met een pijltje aan of het linksom of rechtsom is.

Technische Universiteit Delft

Faculteit CiTG

Tentamen CT1041 Constructiemechanica 2

6 april 2010 van 09.00-12.00 uur

STUDIENUMMER

NAAM

--	--	--	--	--	--	--

- b. Bereken de horizontale verplaatsing van B, in mm. Geef aan of deze naar links of naar rechts gericht is.

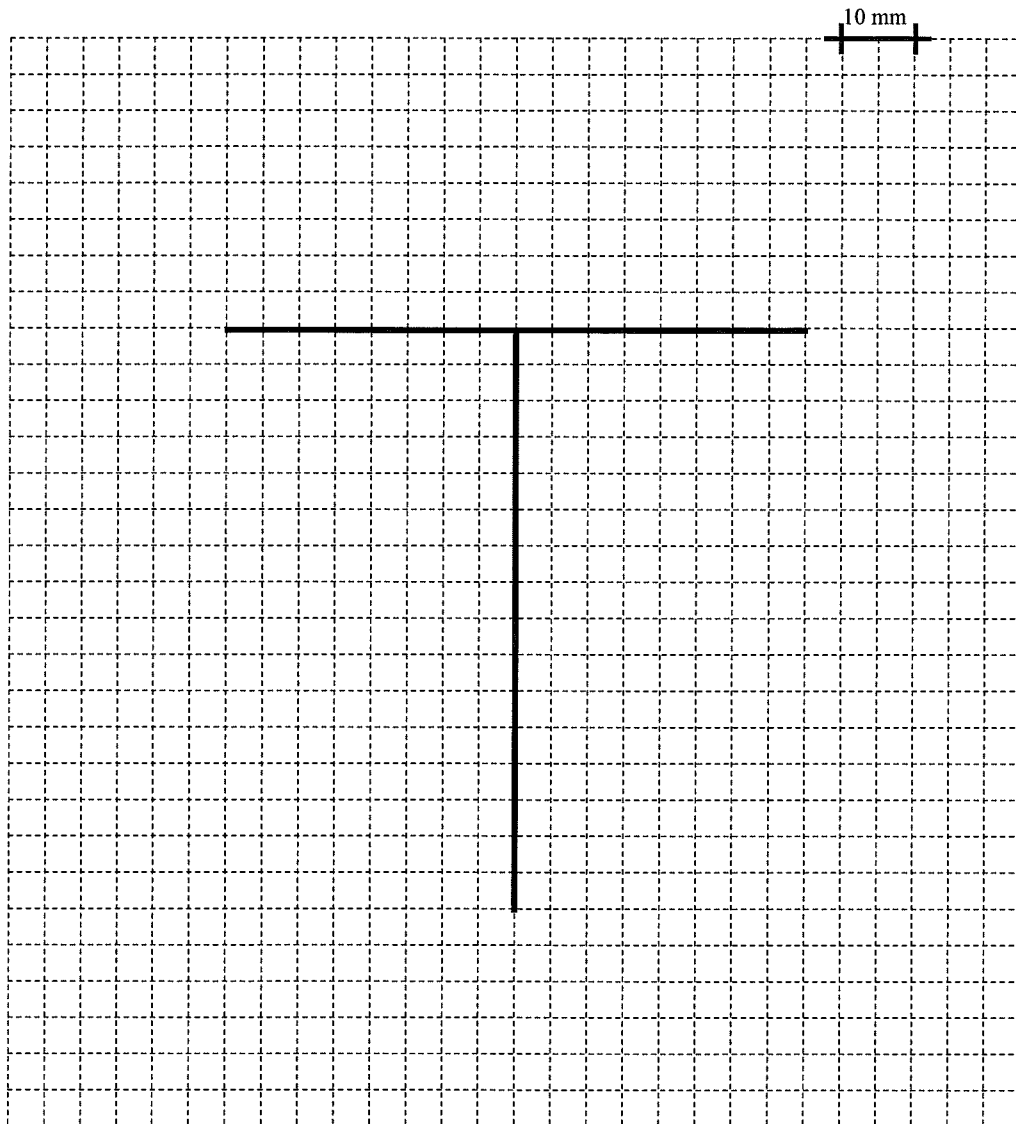
--	--	--	--	--	--	--

- c. Bereken de verticale verplaatsing van C, in mm. Geef aan of deze omhoog of omlaag gericht is.

- d. Bereken de verticale verplaatsing van D, in mm. Geef aan of deze omhoog of omlaag gericht is.

--	--	--	--	--	--	--

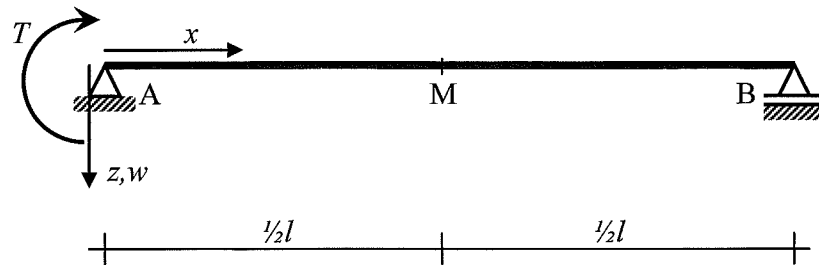
- e. Teken de vervormde constructie in onderstaande figuur. Schrijf de maximale waarden er bij.



--	--	--	--	--	--	--

OPGAVE 6 (gewicht 2,0 – ongeveer 40 minuten)

Gegeven: een vrij opgelegde ligger AB, belast door een koppel T bij A. De buigstijfheid is EI .
Maten en assenstelsel zijn aangegeven.



Gevraagd:

- a. Schets de momentenlijn. Schrijf het moment M als een functie van x (een functie $M(x)$ uitgedrukt in T , l en x).

- b. Gegeven de differentiaalvergelijking voor buiging: $\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$. Bepaal de randvoorwaarden.

Los het verloop van de doorbuiging w als functie van x op (een functie $w(x)$ uitgedrukt in T , l , EI en x).

Technische Universiteit Delft

Faculteit CiTG

Tentamen CT1041 Constructiemechanica 2

6 april 2010 van 09.00-12.00 uur

STUDIENUMMER

NAAM

--	--	--	--	--	--	--

- c. Bepaal uit het antwoord bij vraag (b) de rotatie bij A en de doorbuiging in het midden M.

Technische Universiteit Delft

Faculteit CiTG

Tentamen CT1041 Constructiemechanica 2

6 april 2010 van 09.00-12.00 uur

STUDIENUMMER

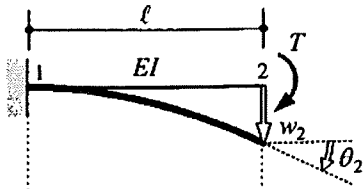
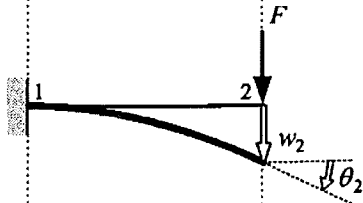
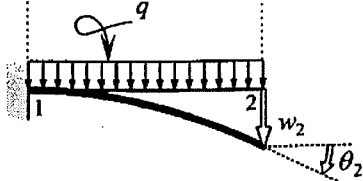
NAAM

--	--	--	--	--	--	--	--

-
- d. Bepaal nu de rotatie bij A en de doorbuiging in M door gebruik te maken van een andere methode: de methode van momentenvlakstellingen. Vergelijk cq. controleer het antwoord met het antwoord van vraag (c).

--	--	--	--	--	--	--

Vergeet-me-nietjes

(1)		$\theta_2 = \frac{T\ell}{EI}; \quad w_2 = \frac{T\ell^2}{2EI}$
(2)		$\theta_2 = \frac{F\ell^2}{2EI}; \quad w_2 = \frac{F\ell^3}{3EI}$
(3)		$\theta_2 = \frac{q\ell^3}{6EI}; \quad w_2 = \frac{q\ell^4}{8EI}$

vergeet-mij-nietjes

--	--	--	--	--	--	--	--

Jan Rots

Antwoordformulier

CT1041 Constructiemechanica 2

5 ECTS

6 april 2010

UITWERKINGEN

Zet op alle bladen uw naam en studienummer.

Bladen zonder naam en studienummer worden niet geaccepteerd.

Relevante berekeningen vermelden.

Antwoorden zonder berekening/motivering worden niet gehonoreerd.

Gebruik zo nodig de onbedrukte zijden van het antwoordformulier.

Tenzij anders vermeld wordt het **eigen gewicht van een constructie buiten beschouwing** gelaten.

Een blad met relevante **vergeet-me-nietjes** voor buigvervorming is toegevoegd aan dit antwoordformulier.

Benut controlemogelijkheden om rekenfouten te vermijden.

Maak de opgaven in een volgorde naar eigen keuze.

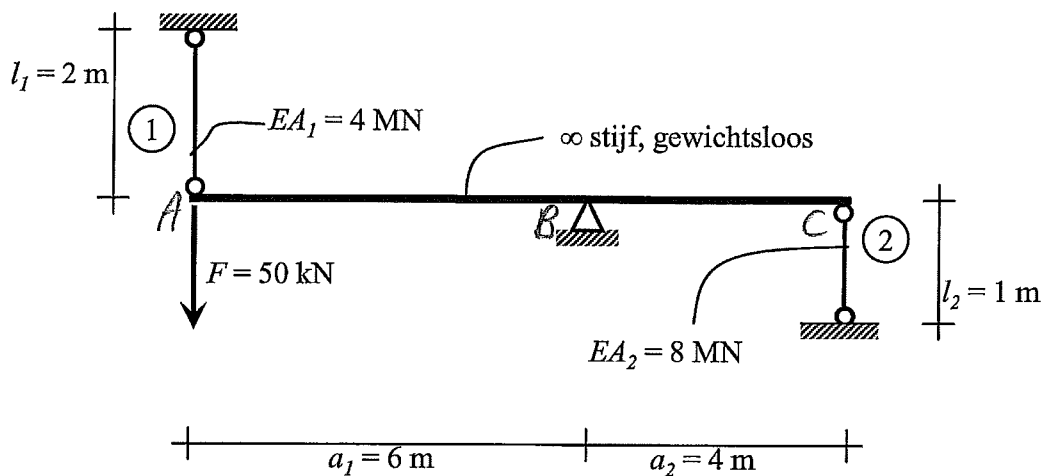
Let op: er zijn **6 opgaven**.

vraag	score
1	
2	
3	
4	
5	
6	
totaal	

--	--	--	--	--	--	--

OPGAVE 1 (gewicht 1,3 - ongeveer 25 minuten)

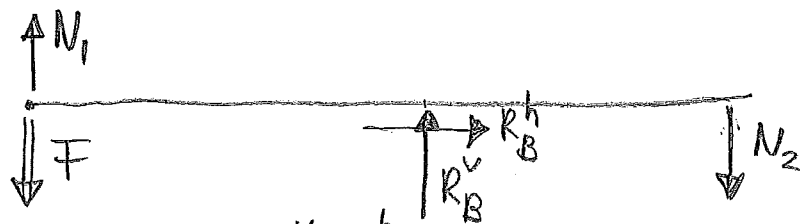
Gegeven: Een volkomen stijve en gewichtsloze ligger is scharnierend opgelegd en aan de uiteinden verbonden met twee verticale staven "1" en "2". In onbelaste toestand is de ligger horizontaal. Overige gegevens zijn in onderstaande figuur aangegeven.



Bereken ten gevolge van kracht F

- De verlenging Δl_1 van staaf "1"
- De kracht N_2 in staaf "2"
- De rek ε_2 in staaf "2"

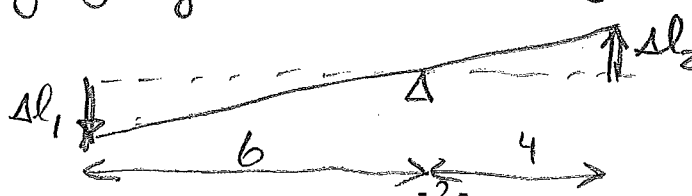
De constructie is statisch onbepaald.



4 onbekenden: N_1, N_2, R_B^v, R_B^h

3 evenwichtsvergelijkingen

extra vergelijking: kinematica stijve ligger



$$\frac{\Delta l_1}{6} = \frac{\Delta l_2}{4}$$

$$\text{of } \Delta l_2 = \frac{2}{3} \Delta l_1$$

--	--	--	--	--	--	--

$$\begin{aligned}
 \Delta l_1 &= \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} \\
 \Delta l_2 &= \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2} \\
 \Delta l_2 &= \frac{2}{3} \Delta l_1
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2} = \frac{2}{3} \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1}$$

$$\begin{aligned}
 N_2 &= \frac{2}{3} \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} \cdot \frac{E_2 A_2}{l_2} \\
 \text{invullen waarden } l_1, l_2, E_1 A_1 \text{ en } E_2 A_2 &\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow N_2 = \frac{8}{3} N_1
 \end{aligned}$$

extra vgl.

Momenten evenwicht t.o.v. scharnier B:

$$\sum T|B=0 \Rightarrow -50 \cdot 6 + N_1 \cdot 6 + N_2 \cdot 4 = 0$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow -50 \cdot 6 + N_1 \cdot 6 + \frac{8}{3} N_1 \cdot 4 &= 0 \Rightarrow N_1 = 18 \text{ kN trek} \\
 N_2 &= \frac{8}{3} \cdot 18 = 48 \text{ kN trek}
 \end{aligned}$$

$$(a): \Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} = \frac{18 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^6} = 9 \text{ mm (verlenging)}$$

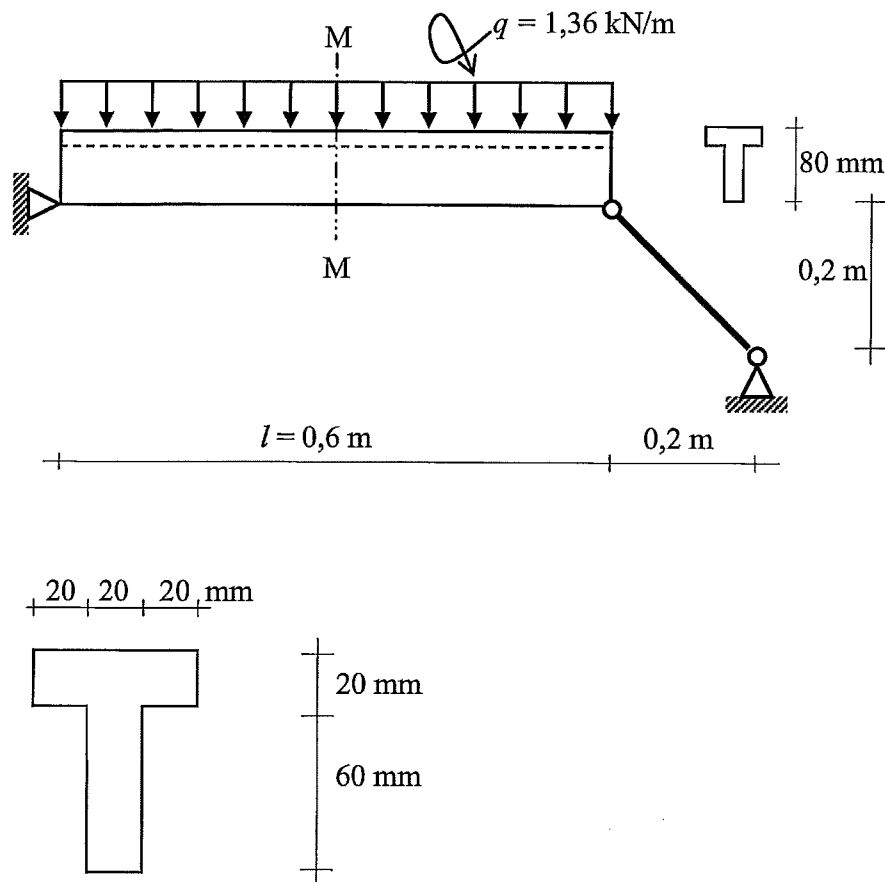
$$(b): N_2 = 48 \text{ kN (zie boven)}$$

$$(c): \epsilon_2 = \frac{\Delta l_2}{l_2} = \frac{\frac{2}{3} \Delta l_1}{l_2} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 9}{1000} = 6 \cdot 10^{-3} = 0,006 = 0,6 \% \text{ (trek)}$$

--	--	--	--	--	--	--

OPGAVE 2 (gewicht 2,2 - ongeveer 40 minuten)

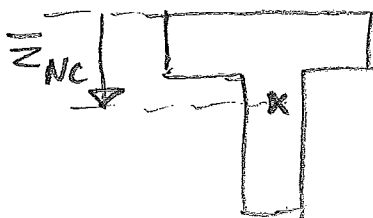
Gegeven: Een T-vormige ligger met een gelijkmatig verdeelde belasting is excentrisch ondersteund door een scharnier linksonder en een pendelstaaf rechtsonder. Belasting, maten en doorsnede-afmetingen zijn in onderstaande figuur aangegeven.



Gevraagd:

- a. Bepaal de plaats van het normaalkrachtencentrum NC van de doorsnede.

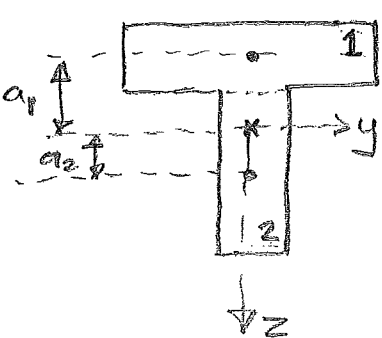
t.o.v. bovenzijde:



$$\bar{z}_{NC} = \frac{60 \cdot 20 \cdot 10 + 60 \cdot 20 \cdot 50}{60 \cdot 20 + 60 \cdot 20} = 30 \text{ mm}$$

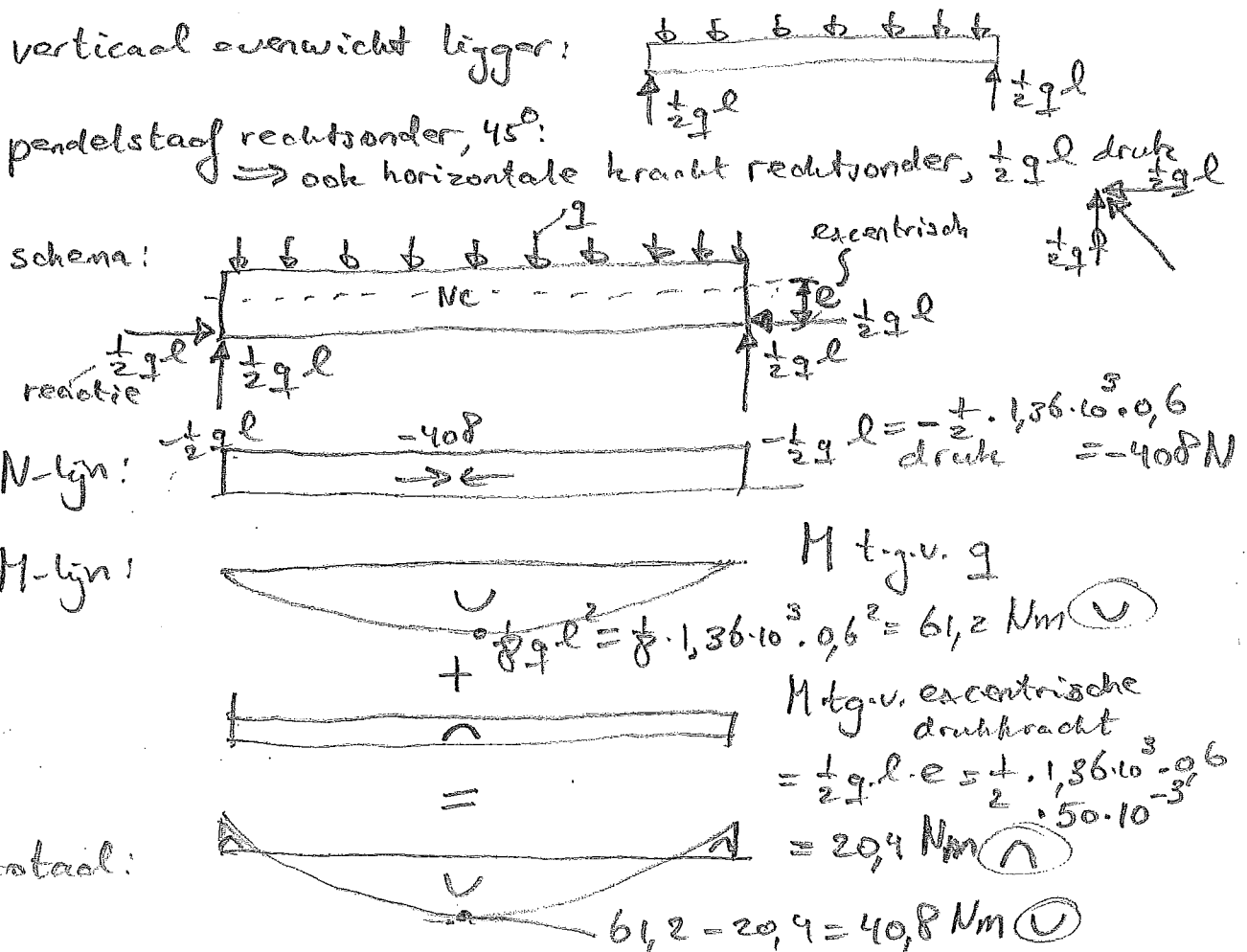
--	--	--	--	--	--	--

b. Bepaal het relevante traagheidsmoment van de doorsnede.



$$\begin{aligned}
 I_{zz} &= I_{\text{eigen}}^{(1)} + a_1^2 \cdot A_1 + I_{\text{eigen}}^{(2)} + a_2^2 \cdot A_2 \\
 &= \frac{1}{12} \cdot 60 \cdot 20^3 + 20^2 \cdot 60 \cdot 20 \\
 &\quad + \frac{1}{12} \cdot 20 \cdot 60^3 + 20^2 \cdot 60 \cdot 20 \\
 &= 1,36 \cdot 10^6 \text{ mm}^4
 \end{aligned}$$

c. Schets de normaalkrachtenlijn en de momentenlijn voor de ligger.



--	--	--	--	--	--	--

- d. Bereken de normaalspanning in de bovenvezel en de ondervezel ter plaatse van de middendoorsnede M-M, met het juiste teken voor trek en druk. Teken het normaalspanningsdiagram voor de middendoorsnede (het verloop over de hoogte, niet het ruimtelijk patroon). Schrijf de waarden en tekens erbij.

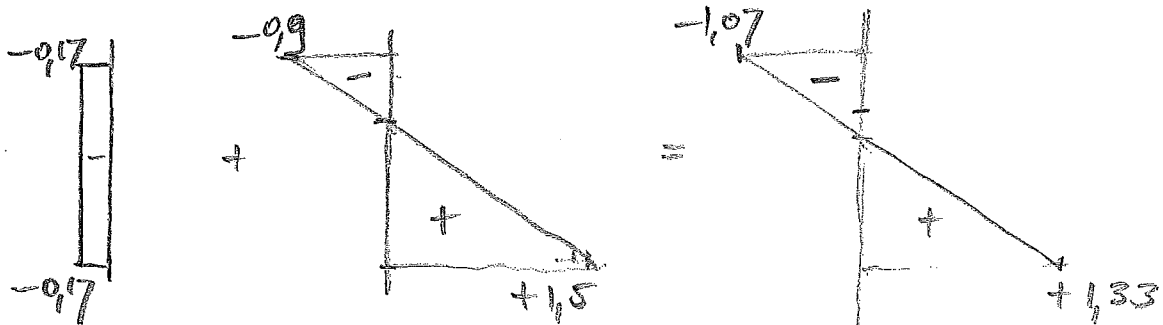
De twee momentenbijdragen mogen afzonderlijk of gezamenlijk worden beschouwd.

t.g.v. N : $\sigma = \frac{N}{A} = \frac{-408}{2 \cdot 60 \cdot 20} = -0,17 \text{ N/mm}^2$

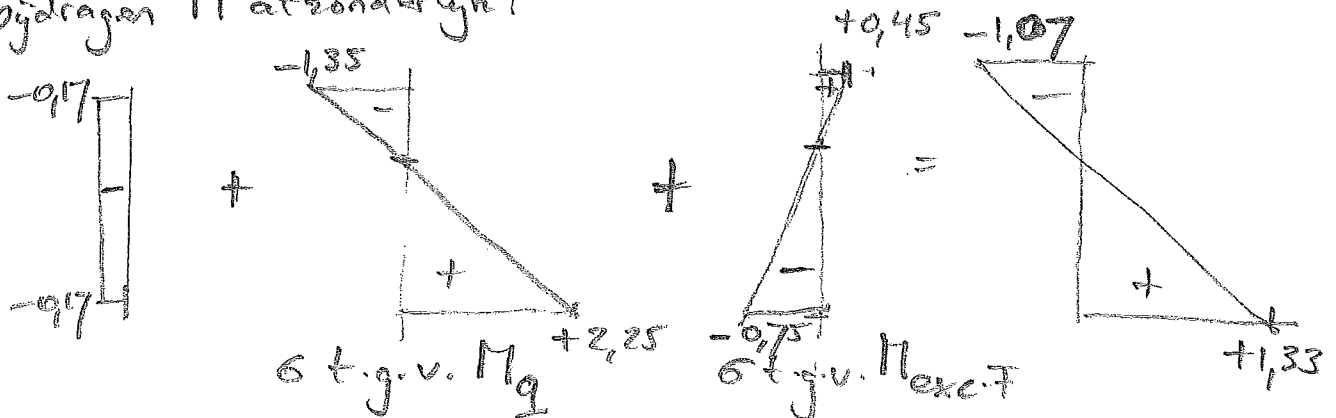
t.g.v. M : $\sigma_{\text{boven}} = -\left(\frac{M \cdot z_{\text{boven}}}{I}\right) = -\frac{40,8 \cdot 10^3 \cdot 30}{1,36 \cdot 10^6} = -0,9 \text{ N/mm}^2$



$\sigma_{\text{onder}} = +\left(\frac{M \cdot z_{\text{onder}}}{I}\right) = +\frac{40,8 \cdot 10^3 \cdot 50}{1,36 \cdot 10^6} = +1,5 \text{ N/mm}^2$



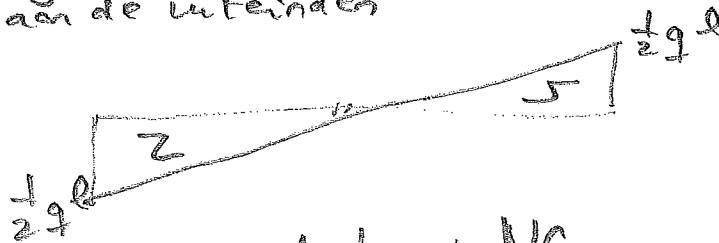
bijdragen M afzonderlijk:



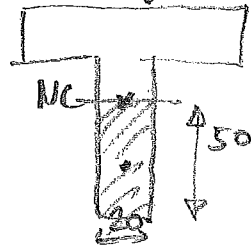
--	--	--	--	--	--	--

- e. Bereken de maximale schuifspanning in de ligger. Waar treedt deze op?

In lengterichting: maximaal waar maximale dwarskracht zit, aan de uiteinden



in dwarsrichting: maximaal t.p.v. NC



$$|\tau_{\max}| = \left| \frac{V \cdot S_a}{b \cdot I} \right|$$

$$V = \frac{1}{2} q l = 408 \text{ N}$$

$$S_a = (50 \cdot 20) \cdot 25 = 25 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

$$b = 20 \text{ mm}$$

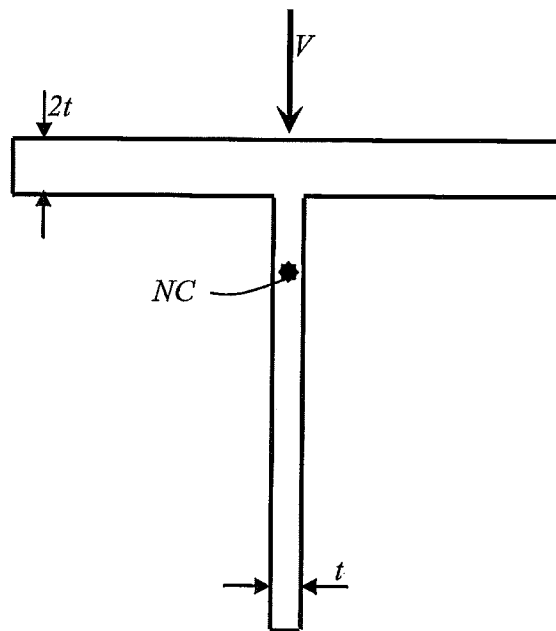
$$I = 1,36 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\tau_{\max} = 0,375 \text{ N/mm}^2$$

--	--	--	--	--	--	--	--

OPGAVE 3 (gewicht 1,5 - ongeveer 25 minuten)

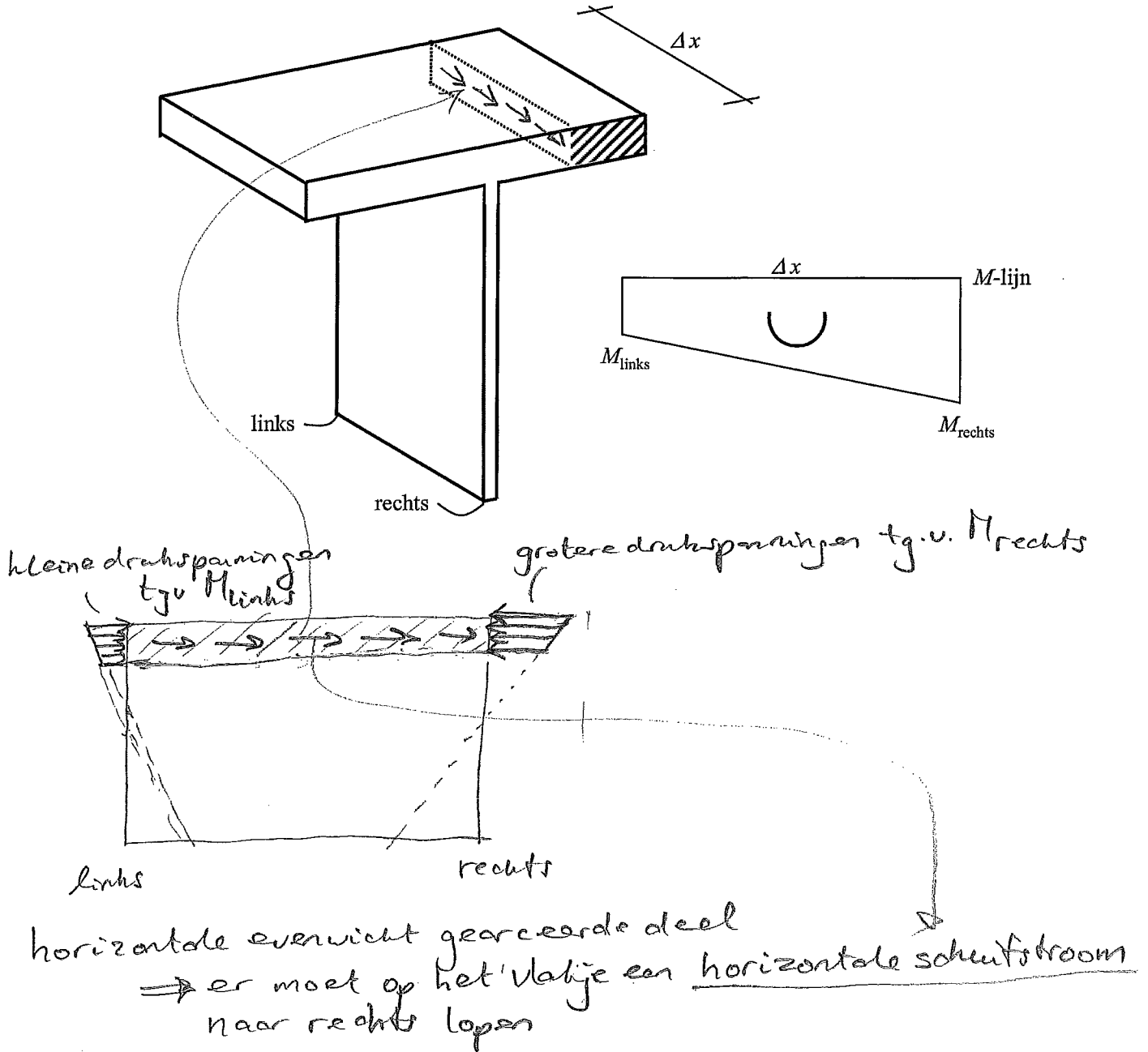
Gegeven: onderstaande *dunwandige* T-doorsnede, waarvan de flens twee maal zo dik is als het lijf. In de figuur zijn de diktes van lijf en flens overdreven weergegeven. De doorsnede brengt een verticale dwarskracht V over. De plaats van het normaalkrachtencentrum NC is schematisch aangegeven.



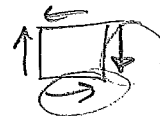
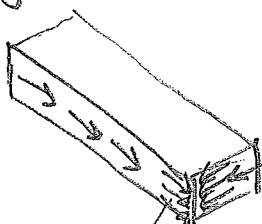
- a. Verklaar, met een schets en maximaal 10 regels tekst, waarom er in de flenzen van het T-profiel *horizontale* schuifspanningen kunnen optreden ten gevolge van de *verticale* dwarskracht V .

Aanwijzing, zie onderstaande figuur: beschouw een mootje in langsrichting en stel een evenwichtsbeschouwing op voor het aangegeven deel van de flens, achter het gearceerde vlakje. Besef dat de verticale dwarskracht impliceert dat het buigend moment varieert zoals aangegeven.

--	--	--	--	--	--	--



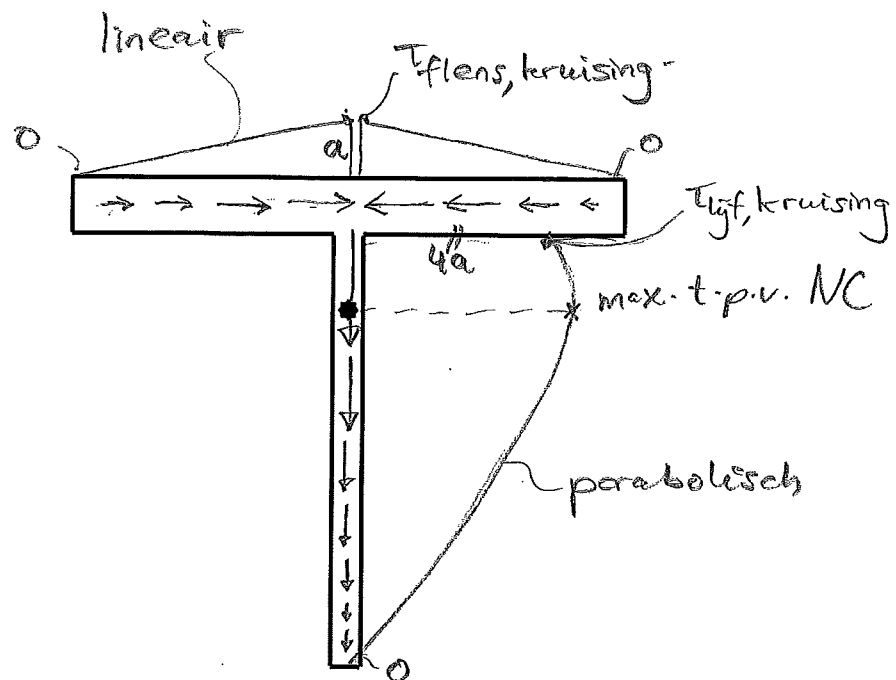
3D plaatje:



hier horizontale τ , dat ook op kopse vlakje
horizontale τ , naar links

--	--	--	--	--	--	--

- b. Schets het schuifspanningsdiagram voor de doorsnede. Teken er pijltjes bij die grootte en richting van de schuifspanningen aangeven. Geef aan waar het maximum zich bevindt en waar de schuifspanningen nul zijn. Geef bij de kruising van flens en lijf aan hoe de schuifspanningen net links en net rechts van de flens zich verhouden tot de schuifspanning net onder de flens.



instroom = uitstroom,

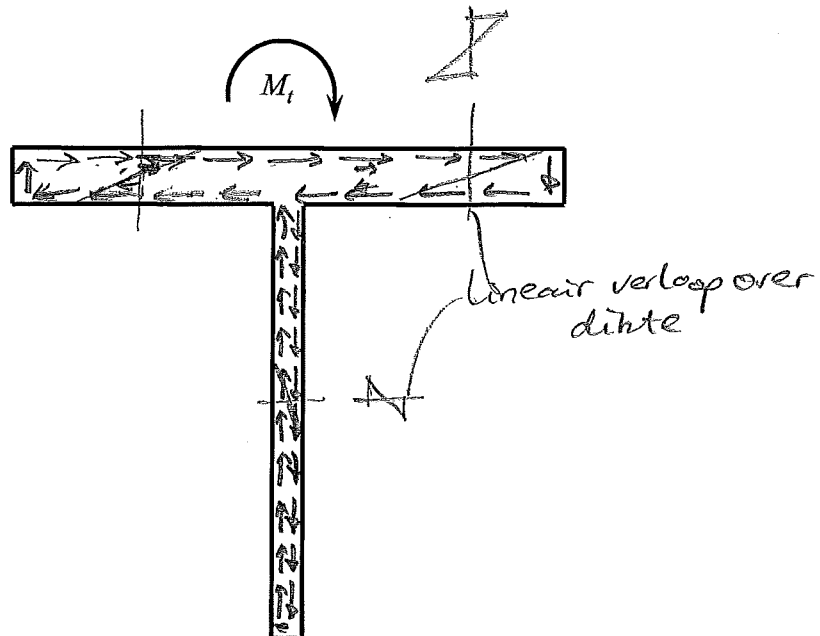
$$2 \cdot T_{\text{flens, kruising}} \cdot t_{\text{flens}} = T_{\text{lijf, kruising}} \cdot t_{\text{lijf}}$$

$$2 \cdot T_{\text{flens, kruising}} \cdot 2t = T_{\text{lijf, kruising}} \cdot t$$

$$T_{\text{lijf, kruising}} = 4 \cdot T_{\text{flens, kruising}}$$

--	--	--	--	--	--	--

- c. Dezelfde doorsnede wordt nu belast door een wringend moment (zonder dwarskracht). Schets het schuifspanningsverloop in de doorsnede bij dit wringend moment, met pijltjes. Beredeneer met beknopte tekst en uitleg waar de schuifspanning het grootst zal zijn: in de flens of in het lijf.



open doorsnede

schuifspanningen lopen "heen en terug" in de strippen

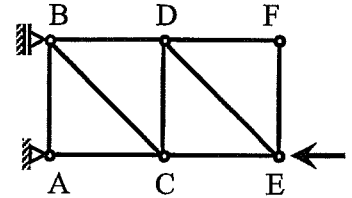
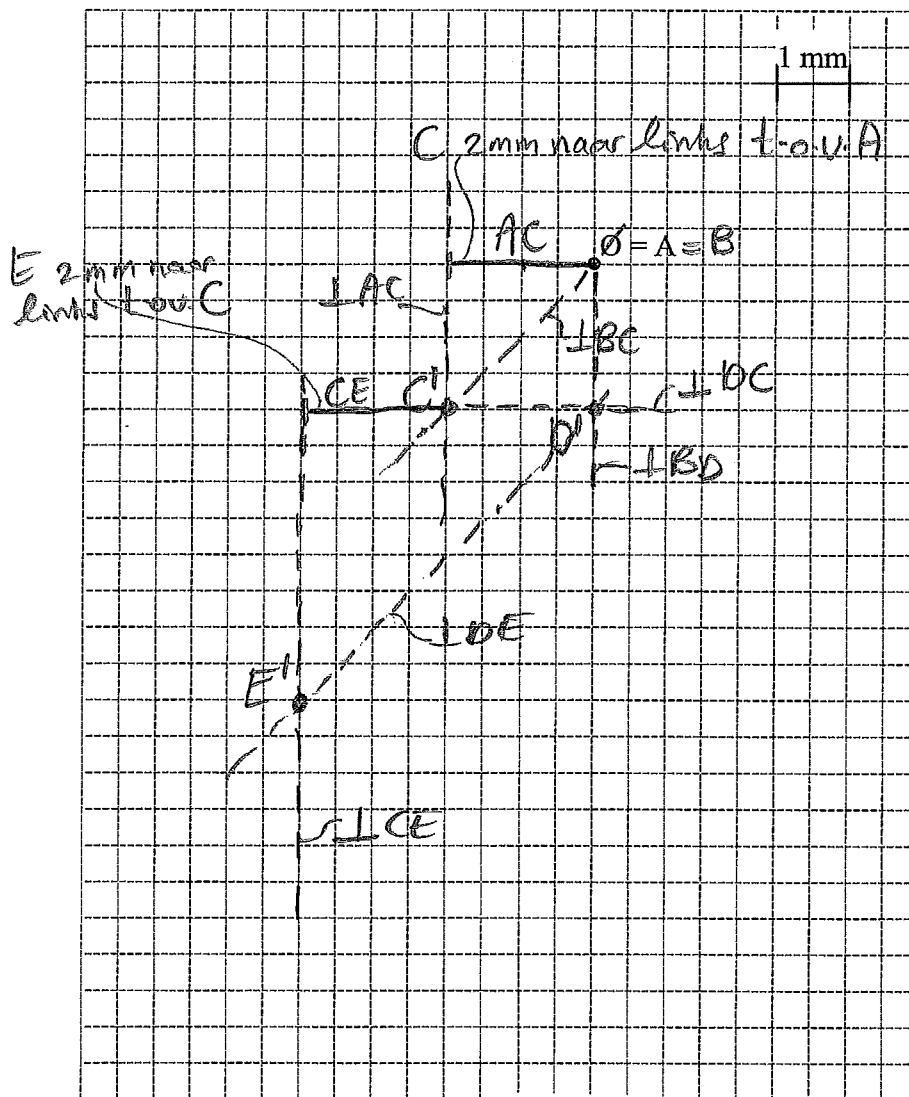
$$\tau = \frac{M_t \cdot e}{\frac{1}{2} I_t}$$

I_t is een constante voor de doorsnede,
waar e het grootst is, is τ het grootst
 e in flens $\approx 2 \cdot e$ in lijf

dus τ in de flens is groter dan τ in het lijf

--	--	--	--	--	--	--

c. Teken het Williot-diagram.



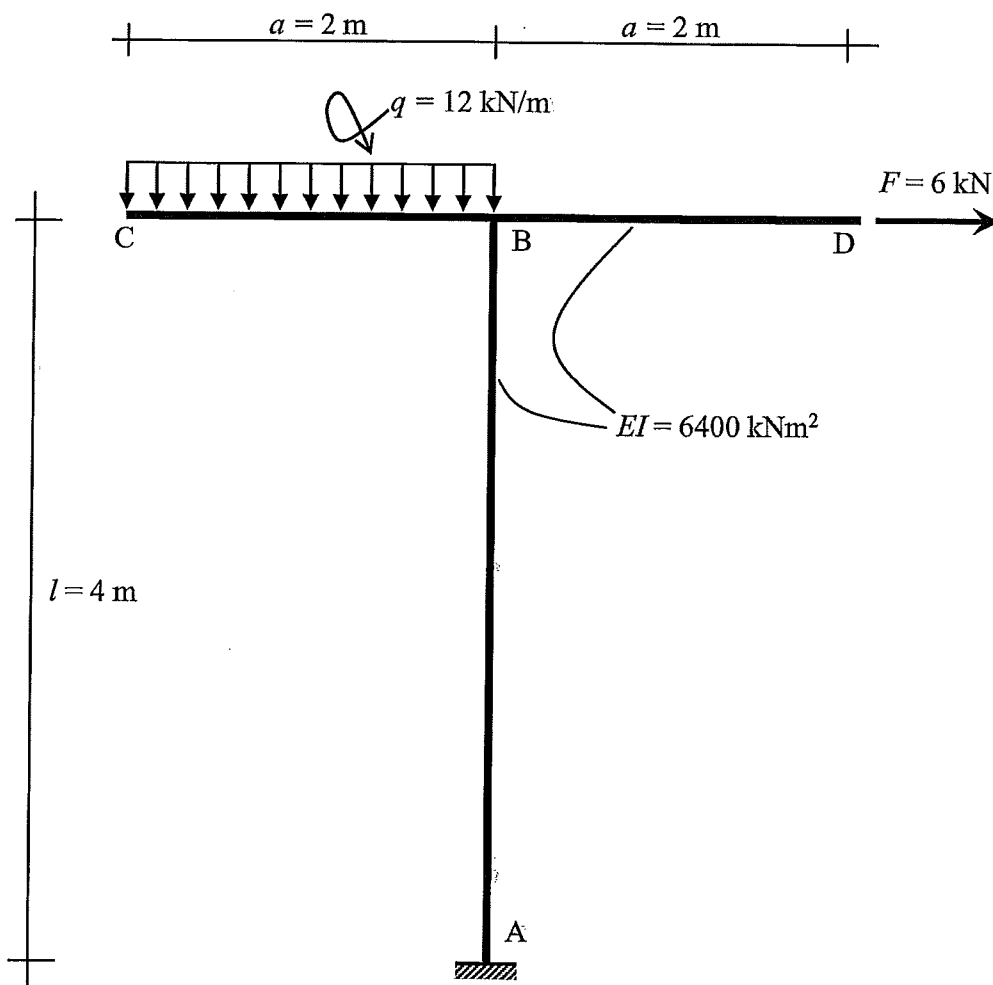
d. Verzamel de gevonden horizontale verplaatsing (u_h) en verticale verplaatsing (u_v) van de knopen D en F in onderstaande tabel. Geef met een pijltje de richting aan.

Knoop	u_h (mm)	u_v (mm)
D	0	2 ↓
F	0	6 ↓

--	--	--	--	--	--	--	--

OPGAVE 5 (gewicht 1,5 - ongeveer 25 minuten).

Gegeven: onderstaande constructie, opgebouwd uit kolom AB en balk CBD die momentvast zijn verbonden. De constructie is ingeklemd bij A en wordt belast door een verticale gelijkmatige verdeelde belasting en een horizontale puntlast als aangegeven. Maten en buigstijfheid EI zijn aangegeven. Normaalkrachtvervorming wordt verwaarloosd ten opzichte van buigvervorming. De opgave dient te worden uitgewerkt met behulp van vergeet-me-nietjes. Een blad met relevante vergeet-me-nietjes is toegevoegd aan dit antwoordformulier.



Gevraagd:

- a. Bereken de rotatie van B. Geef met een pijltje aan of het linksom of rechtsom is.

--	--	--	--	--	--	--

$T = 12 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \text{ kNm}$
 6 kN
 isoleer holom AB
 moment op B = $\frac{1}{2} q a^2$

$\varphi_B = \frac{Tl}{EI}$
 $= \frac{24 \cdot 4}{6400} = 0,015 \text{ rad}$

$\varphi_B = \frac{Fl^2}{2EI} = \frac{6 \cdot 4^2}{2 \cdot 6400} = 0,0075 \text{ rad}$

totaal: $\varphi_B = 0,0075 \text{ rad}$

- b. Bereken de horizontale verplaatsing van B, in mm. Geef aan of deze naar links of naar rechts gericht is.

$u_h^B = \frac{Tl^2}{2EI}$
 $= \frac{24 \cdot 4^2}{2 \cdot 6400}$
 $= 0,08 \text{ m}$
 $= 80 \text{ mm} \leftarrow$

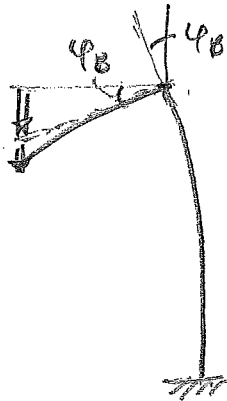
$u_h^B = \frac{Fl^3}{8EI}$
 $= \frac{6 \cdot 4^3}{8 \cdot 6400}$
 $= 0,02 \text{ m}$
 $= 20 \text{ mm} \rightarrow$

totaal: $u_h^B = 10 \text{ mm} \leftarrow$

--	--	--	--	--	--	--

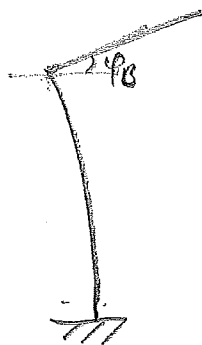
voor l hier a invullen

- c. Bereken de verticale verplaatsing van C, in mm. Geef aan of deze omhoog of omlaag gericht is.



$$\begin{aligned}
 u_v^C &= \varphi_B \cdot a \downarrow + \frac{q \cdot l^4}{8EI} \downarrow \\
 &= 0,0075 \cdot 2 + \frac{12 \cdot 2^4}{8 \cdot 6400} \\
 &= 0,015 + 0,00375 \\
 &= 0,01875 \text{ m} \\
 &= 18,75 \text{ mm} \downarrow
 \end{aligned}$$

- d. Bereken de verticale verplaatsing van D, in mm. Geef aan of deze omhoog of omlaag gericht is.

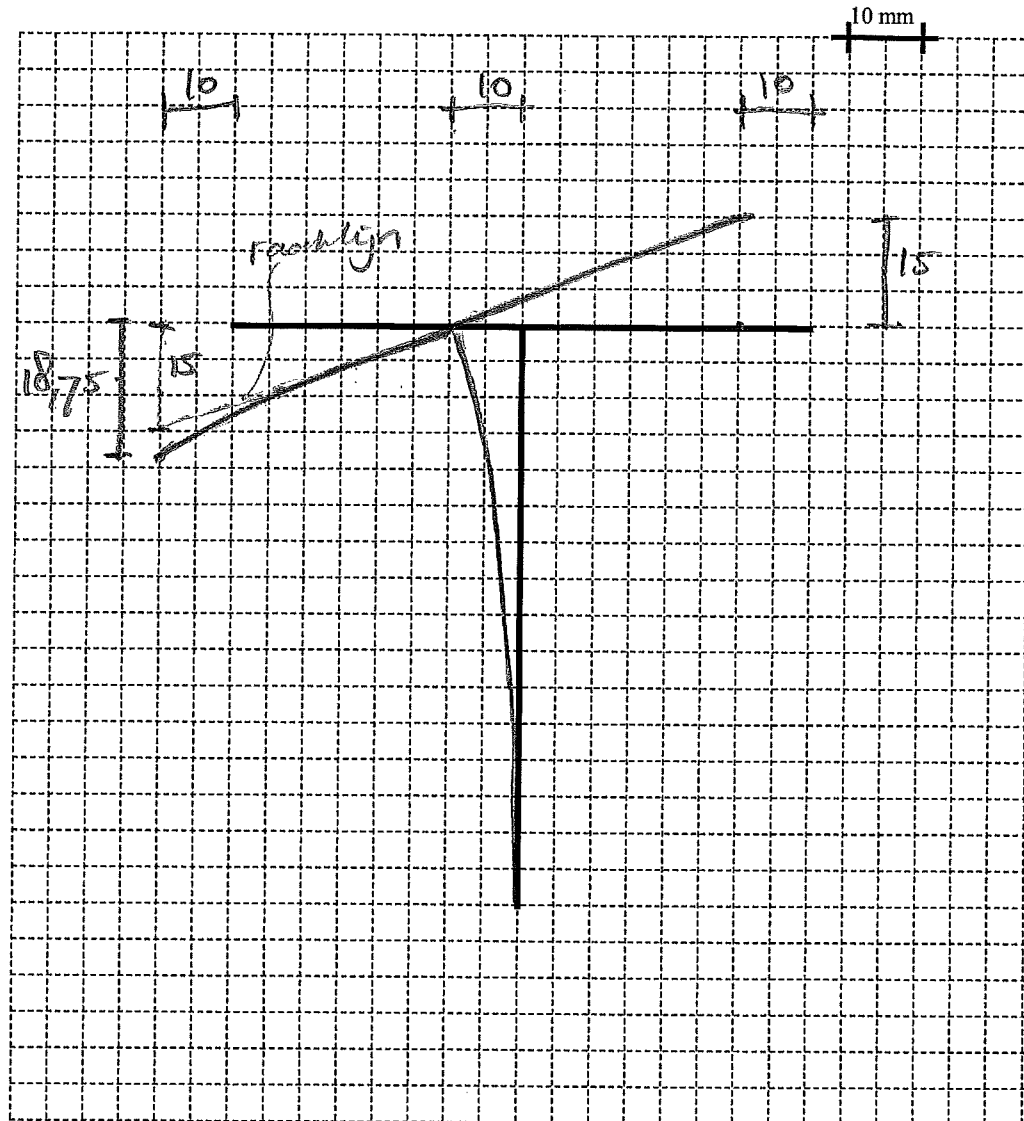


alleen hunspeleffect,
geen buiging van BD

$$\begin{aligned}
 u_D^V &= \varphi_B \cdot a \uparrow \\
 &= 0,0075 \cdot 2 \\
 &= 0,015 \text{ m} \\
 &= 15 \text{ mm} \uparrow
 \end{aligned}$$

--	--	--	--	--	--	--

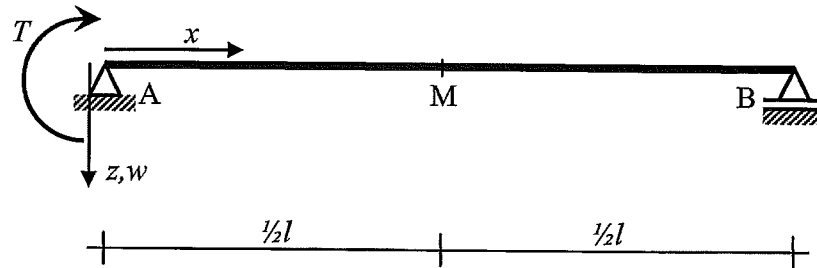
- e. Teken de vervormde constructie in onderstaande figuur. Schrijf de maximale waarden er bij.



--	--	--	--	--	--	--

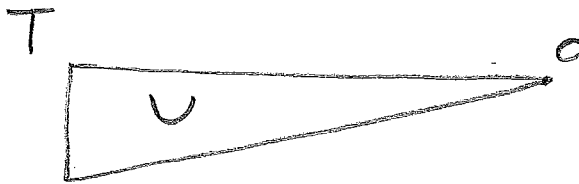
OPGAVE 6 (gewicht 2,0 – ongeveer 40 minuten)

Gegeven: een vrij opgelegde ligger AB, belast door een koppel T bij A. De buigstijfheid is EI . Maten en assenstelsel zijn aangegeven.



Gevraagd:

- a. Schets de momentenlijn. Schrijf het moment M als een functie van x (een functie $M(x)$ uitgedrukt in T , l en x).



$$x=0: M=T$$

$$x=l: M=0$$

$$\text{dus } M(x) = T - T \cdot \frac{x}{l}$$

- b. Gegeven de differentiaalvergelijking voor buiging: $\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$. Bepaal de randvoorwaarden.

Los het verloop van de doorbuiging w als functie van x op (een functie $w(x)$ uitgedrukt in T , l , EI en x).

randvoorwaarden: $x=0: w=0$
 $x=l: w=0$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI} = -\frac{T}{EI} + \frac{T}{EI} \cdot \frac{x}{l} = +\frac{T}{EI l} \cdot x - \frac{T}{EI}$$

$$\frac{dw}{dx} = +\frac{1}{2} \frac{T}{EI l} x^2 - \frac{T}{EI} x + C_1$$

$$w = +\frac{1}{6} \frac{T}{EI l} x^3 - \frac{1}{2} \frac{T}{EI} x^2 + C_1 x + C_2$$

--	--	--	--	--	--	--

$$x=0: w=0 \Rightarrow 0 = C_2$$

$$x=l: w=0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{6} \frac{Tl^3}{EI} - \frac{1}{2} \frac{Tl^2}{EI} + C_1 l + 0$$

$$\Rightarrow C_1 = -\frac{1}{6} \frac{Tl}{EI} + \frac{1}{2} \frac{Tl}{EI}$$

$$= +\frac{1}{3} \frac{Tl}{EI}$$

dus:

$$w(x) = \frac{1}{6} \frac{T}{EI} x^3 - \frac{1}{2} \frac{T}{EI} x^2 + \frac{1}{3} \frac{Tl}{EI} x$$

c. Bepaal uit het antwoord bij vraag (b) de rotatie bij A en de doorbuiging in het midden M.

$$\varphi = -\frac{dw}{dx} = -\frac{1}{2} \frac{T}{EI} x^2 - \frac{T}{EI} x + \frac{1}{3} \frac{Tl}{EI}$$

$$x=0 \Rightarrow \varphi_A = +\frac{1}{3} \frac{Tl}{EI} \quad (\uparrow)$$

$$w_M:$$

$$x = \frac{1}{2} l \Rightarrow w_M = \frac{1}{6} \frac{T}{EI} \left(\frac{1}{2} l\right)^3 - \frac{1}{2} \frac{T}{EI} \left(\frac{1}{2} l\right)^2 + \frac{1}{3} \frac{Tl}{EI} \cdot \frac{1}{2} l$$

$$= \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\right) \frac{Tl^2}{EI}$$

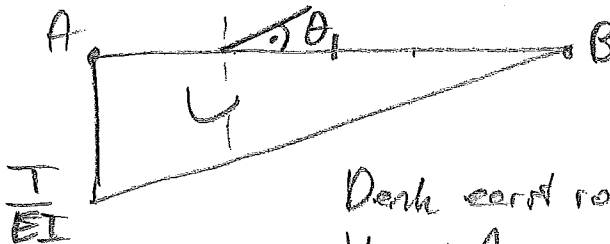
$$= \left(\frac{1}{48} - \frac{1}{8} + \frac{1}{6}\right) \frac{Tl^2}{EI} = \left(\frac{1}{48} - \frac{6}{48} + \frac{8}{48}\right) \frac{Tl^2}{EI}$$

$$= \frac{3}{48} \frac{Tl^2}{EI} = \frac{1}{16} \frac{Tl^2}{EI} \quad (\downarrow)$$

--	--	--	--	--	--	--

- d. Bepaal nu de rotatie bij A en de doorbuiging in M door gebruik te maken van een andere methode: de methode van momentenvlakstellingen. Vergelijk cq. controleer het antwoord met het antwoord van vraag (c).

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{TL}{EI}$$



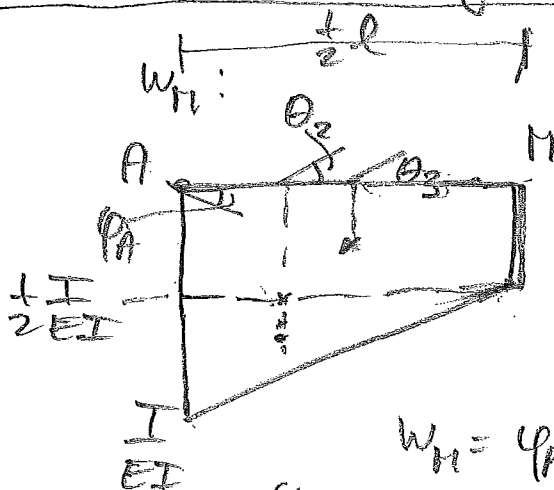
Denk eerst rol B weg.

Vanuit A gezien: $w_B = \theta_1 \cdot \frac{2}{3}l \uparrow$
 $= \frac{1}{2} \frac{TL}{EI} \cdot \frac{2}{3}l = \frac{1}{3} \frac{TL^2}{EI} \uparrow$

eis: $w_B = 0$ (rol)

→ tangdraaien met $\varphi_A = \frac{w_B}{l} = \frac{\frac{1}{3} \frac{TL^2}{EI}}{l} = \frac{1}{3} \frac{TL}{EI} \downarrow$

controle: vraag c $\checkmark$



$$\theta_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}l \cdot \frac{1}{2} \frac{T}{EI} = \frac{1}{8} \frac{TL}{EI}$$

$$\theta_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}l \cdot \frac{1}{2} \frac{T}{EI} = \frac{1}{4} \frac{TL}{EI}$$

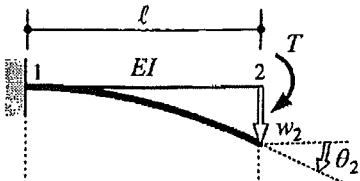
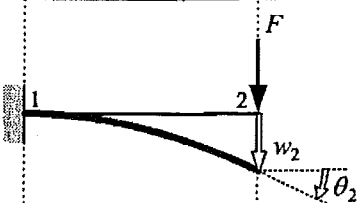
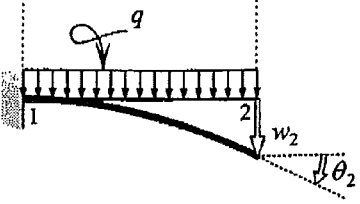
$$\varphi_A = \frac{1}{3} \frac{TL}{EI}$$

$$\begin{aligned} w_M &= \varphi_A \cdot \frac{1}{2}l - \theta_2 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}l\right) - \theta_3 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}l\right) \\ (\downarrow = +) \quad &= \frac{1}{3} \frac{TL}{EI} \cdot \frac{1}{2}l - \frac{1}{8} \frac{TL}{EI} \cdot \frac{1}{3}l - \frac{1}{4} \frac{TL}{EI} \cdot \frac{1}{4}l \\ &= \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{24} - \frac{1}{16}\right) \frac{TL^2}{EI} \\ &= \left(\frac{8}{48} - \frac{2}{48} - \frac{3}{48}\right) \frac{TL^2}{EI} = \frac{1}{16} \frac{TL^2}{EI} (\downarrow) \end{aligned}$$

controle: vraag c: $\checkmark$

--	--	--	--	--	--	--

Vergeet-me-nietjes

(1)		$\theta_2 = \frac{Tl}{EI}; \quad w_2 = \frac{Tl^2}{2EI}$
(2)		$\theta_2 = \frac{Fl^2}{2EI}; \quad w_2 = \frac{Fl^3}{3EI}$
(3)		$\theta_2 = \frac{ql^3}{6EI}; \quad w_2 = \frac{ql^4}{8EI}$

vergeet-mij-nietjes