

CTB2110 – Vloeistofmechanica *Nieuwe stijl*

November 2015 (CTB2110)
Januari 2015 (CTB2110)
November 2014 (CT2110)

Januari 2014 (CT1140/CTB2110)
Oefenvragen: (CT2140)
H10, H11, H12, H13, H14



**Tentamenbundel Civiele Techniek
Het Gezelschap "Practische Studie"**

EEN REPRODUCERENDE
LEERSTIJL
IS SCHADELIJK VOOR
DE ACADEMISCHE
VORMING



Schriftelijk tentamen	CTB2110
	Vloeistofmechanica
Totaal aantal pagina's	6 pagina's
Datum en tijd	3-11-2015 van 13:30 - 16.30 uur
Verantwoordelijke docent	Bram van Prooijen

Alleen het op tentamenpapier geschreven werk / antwoord wordt beoordeeld, tenzij onder 'aanvullende informatie' anders is aangegeven.

Tentamenvragen (in te vullen door examinerator)

Totaal aantal vragen: 4 (waarvan 4 open vragen en 0 multiple-choice vragen)

Max. te behalen punten: 24

☐ alle vragen tellen even zwaar

☒ vragen hebben verschillende weging (gewicht staat per vraag vermeld of wordt in overzicht gegeven.)

Gebruik hulpmiddelen en informatiebronnen tijdens tentamen (in te vullen door examinerator)

Niet toegestaan:

- Smartphone of apparaat met vergelijkbare functies.
- Antwoord geschreven met potlood.
- Hulpmiddelen en/of informatiebronnen tenzij hieronder anders vermeld.

Toegestaan:

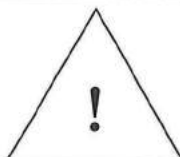
- ☐ boeken ☐ aantekeningen ☐ woordenboeken ☐ dictaten
- ☐ formulebladen (zie ook onder 'Aanvullende informatie') ☒ rekenmachines ☐ computers
- ☒ Op tentamen uitgereikt formuleblad.

Aanvullende informatie

Ieder vraagstuk dient op een afzonderlijk antwoordformulier ingeleverd te worden! Bij de beoordeling van het examenwerk zal voornamelijk worden gelet op een goede systematische aanpak en een juiste toepassing van de theorie. Indien bij de uitwerkingen aannames worden gedaan, dan moeten deze duidelijk worden vermeld. Geef waar nodig een beknopt commentaar. Wanneer het antwoord op een subvraag in vervolgvragen nodig is, maar niet kan worden berekend, neem dan een plausibele waarde daarvoor aan in de beantwoording van de vervolgvragen. Getalsmatige grootheden moeten, in ieder geval in de eindantwoorden, van de juiste eenheden worden voorzien. 

Uiterlijke datum nakijken tentamen: 24-11-2015 (in te vullen door examinerator)

(de uiterlijke nakijktermijn bedraagt 15 werkdagen)

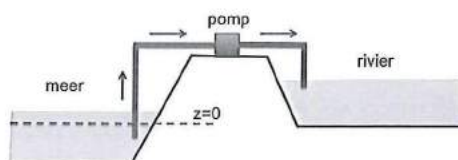


Elk vermoeden van fraude wordt
gemeld bij de Examencommissie

Mobiel UIT

Vraagstuk I (Pomp)

De waterstand in een meer wordt op peil gehouden door een pomp, die in verbinding staat met een rivier. De waterstand in het meer is gegeven door h_M en in de rivier door h_R . Bij een overschot aan water in het meer wordt water naar de rivier gepompt door een pompinstallatie en pijpen met een uniforme diameter D . De uiteinden van de pijpen liggen onder de respectievelijke waterniveau's, zie onderstaande figuur.



Verwaarloos voor de deelvragen 1-3 de wandwrijving en de intreeverliezen.

I.1^{1,5} Schets het verloop van het energieniveau en het piëzometrisch niveau voor het volledige horizontale deel van de pijp. Ga er van uit dat de waterstand in de rivier ruim hoger staat dan de waterstand in het meer, zie bovenstaande figuur. Geef in je schets duidelijk de waterstanden in de rivier en het meer aan.

De pompinstallatie moet een debiet van $3 \text{ m}^3/\text{s}$ kunnen verpompen. Ga uit van de volgende gegevens: $D = 1.2 \text{ m}$, $h_M = 0,5 \text{ m}$ en $h_R = 2,5 \text{ m}$. De horizontale pijpen en de pomp liggen 4 m boven het referentie niveau.

I.2¹ Bereken op basis van van deze gegevens het benodigde pompvermogen.

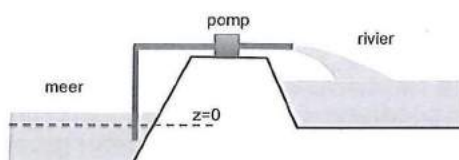
De benodigde sterkte van de pijpen hangt af van de onderdruk in de pijp.

I.3¹ Geef aan waar de onderdruk maximaal (=druk minimaal) is en bepaal deze waarde.

In werkelijkheid zal energieverlies optreden bij de instroming in de pijp.

I.4^{1,5} (a) Geef de fysische verklaring voor het optreden van intreeverliezen. (b) Bepaal het extra vermogen dat de pomp moet leveren om het intreeverlies te compenseren bij een debiet van $3 \text{ m}^3/\text{s}$. Gebruik indien nodig realistische waardes voor additionele parameters.

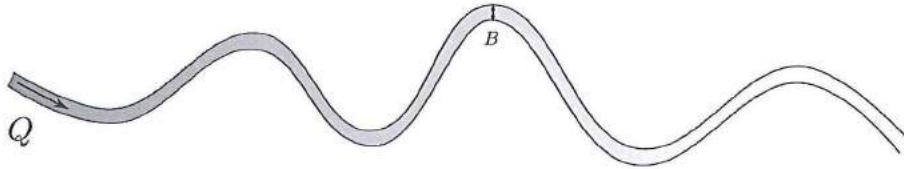
Iemand stelt voor om de verticale pijp aan de rivierzijde weg te halen om kosten te besparen, zie onderstaande figuur. Effecten van wandwrijving zijn nog steeds verwaarloosbaar.



I.5¹ Waarom leidt deze aanpassing echter tot een verlaging van de effectiviteit van de pomp? Een berekening mag, maar hoeft niet. Het gaat om de argumentatie.

Vraagstuk II (meanderende rivier)

In een sterk meanderende rivier heerst een constant debiet Q . Daarbij treedt in de bochten een zogenaamd *dwarsverhang* op. Zie onderstaande schets van de situatie.



II.1^{1,0} Geef een fysische verklaring voor het dwarsverhang. Betrek in je antwoord de onderscheidende parameters die de grootte van dit verhang bepalen.

Het dwarsprofiel van de rivier is bij benadering rechthoekig, met een constante breedte B van 85 m. Variaties van de stroomsnelheid in dwarsrichting kunnen worden verwaarloosd. In een bepaalde bocht van de rivier wordt een waterstandsverschil van 2 cm tussen de beide oevers gemeten. Deze bocht heeft een straal van 1200 m.

II.2^{1,0} Bereken uit deze gegevens de grootte van de stroomsnelheid U in de rivier.

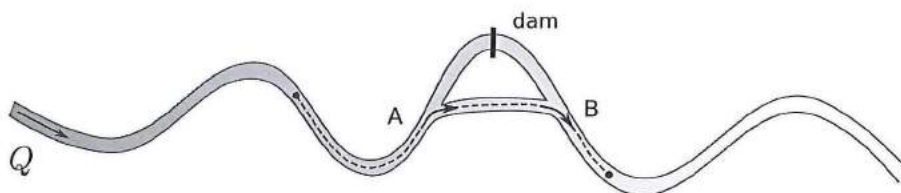
We beschouwen in het vervolg van dit vraagstuk de *langs*richting van de rivier, gebruikmakend van de theorie voor 'geleidelijk variërende stroming'.

II.3^{1,0} Welke overwegingen en aannamen liggen ten grondslag aan deze theorie?

Het bodemverhang i_b bedraagt 2×10^{-4} en de weerstandscoefficiënt c_f bedraagt 0.003.

II.4^{1,0} Geef de definitie van het begrip evenwichtsdiepte en bereken deze voor de gegeven situatie. Gebruik $U = 1.55$ m/s als je het antwoord op vraag I.2 niet kon berekenen.

Om de bevaarbaarheid van de rivier te verbeteren snijdt men één van de bochten af door middel van een kortsluitgeul. De oorspronkelijke bocht wordt daarbij afgedamd en voert geen water meer af. Zie onderstaande figuur.



De kortsluitgeul heeft hetzelfde dwarsprofiel en weerstandscoefficiënt als de oorspronkelijke rivier, het bodemverhang is daarentegen anderhalf keer zo groot (samenhangend met de verkorting) waarbij de bodem continu verloopt. De waterstand in aansluitpunt B wordt niet beïnvloed door een benedenstrooms gelegen randvoorwaarde.

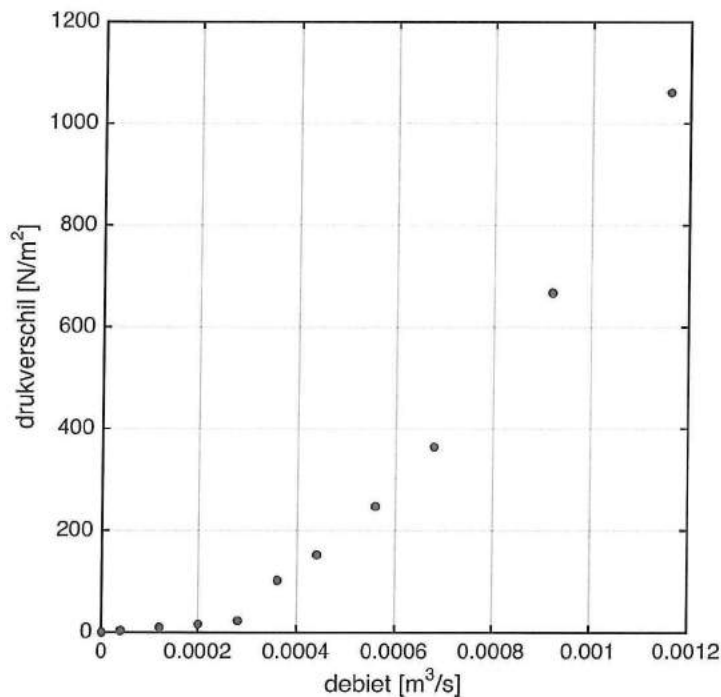
II.5^{1,0} Schets het verloop van de bodem en waterstand langs het gestippelde traject.

De lengte van de kortsluitgeul (traject A-B) bedraagt 2000 m.

II.6^{1,0} Bereken de waterdiepte in aansluitpunt A, gebruikmakend van de theorie voor kleine afwijkingen van de eenparige toestand.

Vraagstuk III (weerstand in leiding)

Een medewerker van een drinkwaterbedrijf analyseert een rechte ondergrondse pijpleiding met een lengte van $L = 200$ m en wil op indirecte wijze uitzoeken wat de diameter van de pijpleiding is en wat de ruwheid van de pijpwand is. De onderzoeker kan bij verschillende stationaire condities van ingestelde debieten de drukval over de pijpleiding meten. Veronderstel de viscositeit en dichtheid van water bekend (zie formuleblad). Neem bovendien aan dat de pijp horizontaal ligt en dat alleen de wandwrijving er toe doet. In de tabel staan de gemeten drukvallen bij de verschillende ingestelde debieten.



Q (m³/s)	Δp (N/m²)
0,00000	0,000
0,00004	3,259
0,00012	9,778
0,00020	16,30
0,00028	22,82
0,00036	102,2
0,00044	152,6
0,00056	247,3
0,00068	364,6
0,00092	667,4
0,00116	1061

III.1^{1,0} Leg uit waarom bij lage debieten de grafiek een lineair verband te zien geeft en bij hoge debieten niet.

III.2^{1,5} Bereken uit de gegevens, behorende bij het lineaire deel van de grafiek, de diameter van de buis en laat zien dat uw redering in III.1 klopte.

Indien het u niet gelukt is de diameter van de buis te berekenen, neemt u voor het vervolg een waarde $D = 0,08$ m aan.

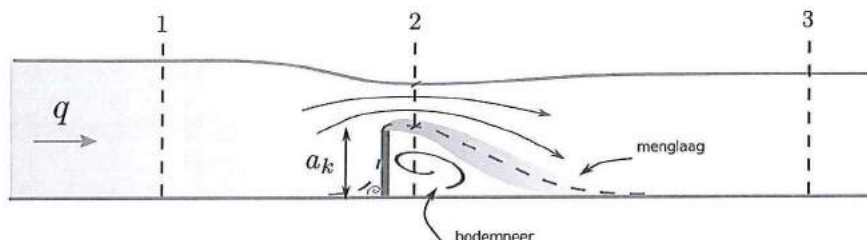
III.3^{1,0} Wat is de maximale wandschuifspanning die er volgens de gegevens uit de tabel geheerst heeft tijdens het experiment.

III.4^{1,5} Bereken uit de gegevens behorende bij de grootste debieten de ruwheidshoogte van de buiswand, onder de veronderstelling dat er hier sprake is van een hydraulisch ruwe wand.

III.5^{1,0} Reken uit vanaf welke grootte van het debiet de wand als hydraulisch ruw verondersteld mag worden. Laat zien dat de aanname bij onderdeel III.4 juist was.

Vraagstuk IV (korte overlaat)

In een drainagekanaal met een rechthoekig dwarsprofiel en horizontale bodem bevindt zich over de volle breedte een korte overlaat met een vaste kruinhoogte. We beschouwen in dit vraagstuk de situatie per eenheid van breedte. Aanvankelijk is er sprake van gestuwde afstroming met een turbulente menglaag en een bodemneer direct achter de stuw, zie onderstaande figuur.



Ter plaatse van doorgang 2 mag een hydrostatische drukverdeling worden aangenomen.

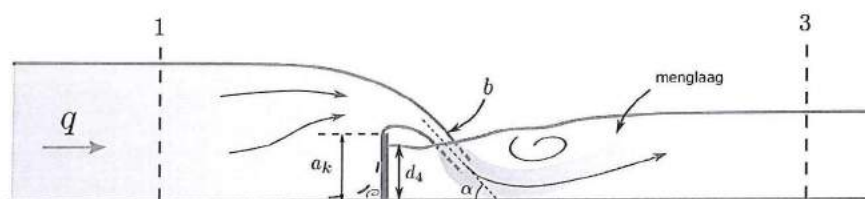
IV.1^{1,0} Leg uit waarom deze benadering hier is toegestaan.

Het specifiek debiet q bedraagt $0,30 \text{ m}^2/\text{s}$ en de waterdiepte d_3 in doorgang 3, op enige afstand benedenstrooms van de overlaat, bedraagt $0,85 \text{ m}$. De overlaat heeft een kruinhoogte a_k van $0,65 \text{ m}$ ten opzichte van het lokale bodemniveau. Slechts het deel van doorgang 2 boven de kruinhoogte is stroomvoerend.

IV.2^{1,5} Berekenen de waterdiepte d_2 in doorgang 2.

IV.3^{1,0} Berekenen de netto horizontale kracht K_H per eenheid van breedte die door het stromende water op de overlaat wordt uitgeoefend.

Men laat nu de waterstand benedenstrooms van de overlaat zakken, waarbij de waterstand bovenstrooms van de overlaat uiteindelijk niet meer verandert. Het specifiek debiet en de kruinhoogte blijven daarbij ongewijzigd. De overlaat heeft in deze situatie een afvoer-coëfficiënt gelijk aan 1.



IV.4^{1,0} Bereken de waterdiepte d_1 die uiteindelijk ter plaatse van doorgang 1 bereikt wordt.

De waterdiepte d_4 direct achter de overlaat (zie figuur) bedraagt $0,50 \text{ m}$. De overstortende straal van de overlaat heeft een breedte b van $0,10 \text{ m}$ en maakt een hoek α van 45° met het horizontale vlak, zie bovenstaande figuur.

IV.5^{1,5} Bereken voor bovenstaande situatie de waterdiepte d_3 in doorgang 3 op enige afstand benedenstrooms van de overlaat.

Formuleblad Vloeistofmechanica CTB2110

Fysische constanten

zwaarteversnelling: $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

dichtheid water: $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$

kinematische viscositeit water $\nu = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

Kentallen

Froude-getal, stroomsnelheid U , waterdiepte d :

$$Fr \equiv \frac{U}{\sqrt{gd}}$$

Reynolds-getal, lengteschaal ℓ , dynamische viscositeit η , kinematische viscositeit ν , dichtheid ρ :

$$Re \equiv \frac{\rho U \ell}{\eta} = \frac{U \ell}{\nu}$$

Hydrostatica

Hydrostatisch evenwicht:

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = 0$$

bij constante dichtheid:

$$p + \rho g z = \text{constant}$$

Hydrostatische drukkraft in open waterloop, diepte d , constante dichtheid:

$$F_p = \frac{1}{2} \rho g d^2 \quad \text{p.e.v. breedte}$$

Piëzometrisch niveau, atmosferische druk p_a :

$$h \equiv z + \frac{p - p_a}{\rho g}$$

Hydrostatisch evenwicht, ρg en p_a constant:

$$h = \text{constant}$$

Kinematica

Versnelling van een deeltje

Meebewegende (materiële) afgeleide, grootheid f , snelheidsvector $(u_x, u_y, u_z)^T$:

$$\frac{Df}{Dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + u_x \frac{\partial f}{\partial x} + u_y \frac{\partial f}{\partial y} + u_z \frac{\partial f}{\partial z}$$

In natuurlijk (s, n, b) assenstelsel:

$$\frac{Df}{Dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + u_s \frac{\partial f}{\partial s}$$

Meevoering

Volumestroom door doorgang D , normaalsnelheid u_N :

$$Q = \int_D u_N \, dA$$

Overdracht willekeurige grootte X met dichtheid ρ_X :

$$S_X = \int_D \rho_X u_N \, dA$$

Bijvoorbeeld, impuls ρu :

$$S_{\text{imp}} = \int_D \rho u u_N \, dA$$

Idem, kinetische energie:

$$S_{\text{kin}} = \int_D \frac{1}{2} \rho u^2 u_N \, dA$$

Ideale-vloeistofstroming

Euler-vergelijkingen

Bewegingsvergelijkingen in termen van hoogte piëzometrisch niveau $h = z + p/\rho g$ (natuurlijk assenstelsel):

$$a_s = \frac{\partial u_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = -g \frac{\partial h}{\partial s}$$

$$a_n = \frac{\partial u_n}{\partial t} + \frac{u^2}{R} = -g \frac{\partial h}{\partial n}$$

$$a_b = \frac{\partial u_b}{\partial t} = -g \frac{\partial h}{\partial b}$$

Bernoulli

Stationaire ideale-vloeistofstroming:

$$H = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u_s^2}{2g} = h + \frac{u_s^2}{2g} = \text{constant langs stroomlijn} \quad \left(\frac{\partial H}{\partial s} = 0 \right)$$

Torricelli

Stroming uit reservoir via kleine opening:

$$Q = \mu A \sqrt{2g \Delta h},$$

waarin Δh de hoogte is van het piëzometrisch niveau in het bovenstroomse reservoir boven dat in de uittredende straal.

Energie

Energieoverdracht

Doorgang D met oppervlak A en normaalsnelheid u_N :

$$P = \int \int_D \left(p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho u^2 \right) u_N \, dA$$

Dwarsprofiel gemiddelde energiehogte:

$$\langle H \rangle \equiv \frac{P}{\rho g Q}$$

Rechte stroomlijnen (h constant binnen dwarsprofiel), gem. stroomsnelheid U :

$$\langle H \rangle = h + \beta \frac{U^2}{2g}$$

waarin $\beta = \int_D u^3 \, dA / U^3 A \approx 1$

Energiebalans

Voor een stroombuis geldt (stationair, geen toevoeging/onttrekking van energie):

$$P = \rho g Q \langle H \rangle = \text{constant}$$

Pomp, turbine:

$$\Delta P_{\text{pomp,turb}} = \rho g Q \Delta H_{\text{pomp,turb}}$$

Energiedissipatie balansgebied met doorgangen D_1 en D_2 , stationair:

$$\Delta P_{\text{diss}} = \rho g Q \Delta \langle H \rangle = \rho g Q (\langle H \rangle_1 - \langle H \rangle_2)$$

Drukverschil

Geleidelijke vernauwing (bijv. Venturi-meter), dynamische druk p :

$$p_1 - p_2 = \Delta p = \frac{1}{2} \rho Q^2 (A_2^{-2} - A_1^{-2})$$

Impuls

Impulsoverdracht

Doorgang D met normaalvector $\mathbf{e}_N$:

$$\mathbf{F} = \int \int_D (p + \rho u^2) \mathbf{e}_N \, dA$$

Idem, doorgang met oppervlak A , evenwijdige stroomlijnen en gemiddelde snelheid U :

$$F = \int \int_D p \, dA + \alpha \rho U^2 A$$

waarin $\alpha = \int_D u^2 \, dA / U^2 A \approx 1$

Impulsbalans

Kracht vloeistof op zijdelingse begrenzing stroombuis, doorgangen D_1 en D_2 , zwaartekracht $\mathbf{F}_g$, stationaire stroming:

$$\mathbf{K} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

Horizontale kracht op begrenzing balansgebied, verticale doorgangen D_1 en D_2 , stationaire stroming:

$$K_H = F_1 - F_2 = \Delta F$$

Lokaal vertragsingsverlies

Carnot (abrupte verwijding van diameter D_1 tot D_2 in pijpstroming)
Stijging piëzometrisch niveau:

$$h_2 - h_1 = \Delta h = U_2 (U_1 - U_2) / g$$

Daling energieniveau:

$$H_1 - H_2 = \Delta H_v = (U_1 - U_2)^2 / 2g$$

Vertragsingsverlies na lokale vernauwing, contractie μ :

$$\Delta H_v = \left(\frac{1}{\mu} - 1 \right)^2 \frac{U^2}{2g}$$

Buisje van Borda (intreeverlies):

$$\mu = \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta H_v = \left(\frac{1}{\mu} - 1 \right)^2 \frac{U^2}{2g}$$

Uittreeverlies (Carnot met $U_2 = 0$):

$$\Delta H_v = \frac{U^2}{2g}$$

Snel variërend vrij oppervlak

Bodemhoogte z_b , diepte d , specifiek debiet q , diepte-gemiddelde snelheid $U = q/d$, rechte stroomlijnen.

Energiehoogte

Diepte-gemiddelde energiehoogte (vormfactor β):

$$H = z_b + d + \beta \frac{U^2}{2g}$$

Specifieke energiehoogte:

$$E = H - z_b = d + \beta \frac{U^2}{2g}$$

Impuls- en energieoverdracht

Impulsoverdracht (vormfactor α):

$$F = \frac{1}{2} \rho g d^2 + \alpha \rho q U \quad \text{p.e.v. breedte}$$

Energieoverdracht:

$$P = \rho g q H \quad \text{p.e.v. breedte}$$

Kritische stroming

Froude-getal Fr :

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gd}} = 1 \Rightarrow U^2 = gd \Rightarrow q^2 = gd^3$$

Specifieke energiehogte:

$$E = d + \frac{U^2}{2g} = d + \frac{gd}{2g} = \frac{3}{2}d$$

Grensdiepte (kritische diepte):

$$d_g = \left(\frac{q^2}{g} \right)^{1/3} = \frac{2}{3} E_g$$

Onderspuier

Gelijke energiehogte, overgang $d_1 - d_2$ (sub- naar superkritisch):

$$d_1 + \frac{q^2}{2gd_1^2} = d_2 + \frac{q^2}{2gd_2^2}$$

Kracht op schuif (via impulsbalans):

$$K = \frac{1}{2} \rho g (d_1^2 - d_2^2) + \rho q^2 (d_1^{-1} - d_2^{-1}) \quad \text{p.e.v. breedte}$$

Stationaire watersprong

Gelijke impulsoverdracht overgang $d_1 - d_2$ (super- naar subkritisch):

$$\frac{1}{2} g d_1^2 + \frac{q^2}{d_1} = \frac{1}{2} g d_2^2 + \frac{q^2}{d_2} \quad \text{p.e.v. breedte}$$

Dissipatie in sprong (via energiebalans):

$$P_{\text{diss}} = \rho g q \left(d_1 - d_2 + \frac{q^2}{2g} (d_1^{-2} - d_2^{-2}) \right) \quad \text{p.e.v. breedte}$$

Lopende watersprong

Voortplantingssnelheid:

$$c = \sqrt{g \frac{d_1 + d_2}{2} \frac{d_2}{d_1}}$$

Idem, lage storing ($d_1 \approx d_2 = d$):

$$c = \sqrt{gd}$$

Overlaten

- (1) Diepte op kruin d_k , specifieke energiehogte op kruin E_k , afvoercoëfficiënt m .

Volkomen afvoer

$$q = m d_k \sqrt{g d_k} = m \frac{2}{3} E_k \sqrt{\frac{2}{3} g E_k}$$

afvoer te bepalen via één meting (bijv. d_k of E_k)

Onvolkomen afvoer

$$q = m d_k \sqrt{2g (E_k - d_k)}$$

afvoer te bepalen via twee metingen (bijv. d_k en E_k)

Weerstand omstroomd voorwerp

Stuwdruk, aanstroomsnelheid U :

$$\Delta p_d = \frac{1}{2} \rho U^2$$

Sleepkracht, aangestroomd oppervlak A :

$$F_w = c_w \frac{1}{2} \rho U^2 A$$

waarin c_w de weerstandscoefficiënt is. Voorbeeld bol:

$$Re < 1: \quad c_w = \frac{24\nu}{UD} = \frac{24}{Re}$$
$$10^3 < Re < 2 \times 10^5: \quad c_w \approx 0,4$$

Energiedissipatie omstroomd voorwerp:

$$\Delta P_{\text{diss}} = F_w U = c_w \frac{1}{2} \rho U^3 A$$

Wandwrijving eenparige stroom

Buisstroming

Diameter $D = 2r_0$, hydraulische straal $R = D/4$, ruwheid k , kinematische viscositeit ν , gemiddelde snelheid $U = Q/A$, wandschuifspanning τ_0 .

Algemeen

Evenwicht schuifkracht - netto drukkracht:

$$\tau_0 LP = \Delta p A = \rho g \Delta h A$$

zodat

$$\tau_0 = \frac{\rho g \Delta h A}{LP} = \rho g i_w R$$

Definitie weerstandsfactor:

$$\tau_0 = c_f \rho U^2 = \frac{f}{8} \rho U^2$$

geeft:

$$i_w = \frac{f}{8} \frac{U^2}{gR}$$

en

$$\Delta H_w = i_w L = f \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g} \quad (\text{Darcy-Weisbach})$$

waarin $f = f(Re, \frac{k}{D})$, zie diagram of onderstaande vergelijkingen

Poiseuille

$Re < \text{ca. } 2300$, laminair:

$$f = \frac{64}{Re}$$

waarin $Re = \rho U D / \eta = U D / \nu$

White-Colebrook

$Re > \text{ca. } 4000$, turbulent:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(0,27 \frac{k}{D} + \frac{2,5}{Re \sqrt{f}} \right) = 2 \log \frac{3,7D}{k(1 + 3,3/Re_*)} = 2 \log \frac{3,7D}{k + \delta/3,5}$$

waarin $\delta = 11,6\nu/u_*$, $Re_* = u_* k / \nu$ en $u_* = \sqrt{g R i_w} = \frac{1}{2} \sqrt{g D i_w}$.

Willekeurig dwarsprofiel

Doorstroomd oppervlak A , weerstand leverende omtrek P , schuifspanning, gemiddeld over P , is $\langle \tau_0 \rangle$, hydraulische straal $R = A/P$, turbulente hoofdstroom ($Re = UR/\nu > \text{ca. } 600$). Open waterlopen: $i_w = i_b$

Algemeen

Evenwicht schuifkracht - netto drukkracht (eenparige stroom):

$$\langle \tau_0 \rangle = c_f \rho U^2 = \rho u_*^2 = \rho g R i_w$$

$$U = \sqrt{g R i_w / c_f}$$

$$\Delta H_w = i_w L = c_f \frac{U^2}{g R} L$$

White-Colebrook

Gegeneraliseerde coëfficiënten voor willekeurige sprofielvorm:

$$\frac{U}{u_*} = \frac{U}{\sqrt{g R i_w}} = \frac{1}{\sqrt{c_f}} = 5,75 \log \frac{12R}{k(1 + 3,3/Re_*)} = 5,75 \log \frac{12R}{k + \delta/3,5}$$

waarin $\delta = 11,6\nu/u_*$, $Re_* = u_* k/\nu$ en $u_* = \sqrt{g R i_w}$.

Hydraulisch ruw:

$$\frac{U}{u_*} = \frac{U}{\sqrt{g R i_w}} = \frac{1}{\sqrt{c_f}} = 5,75 \log \frac{12R}{k} \approx 8,3 \left(\frac{R}{k} \right)^{1/6}$$

Verhanglijnen

Tweedimensionale stroom, breedte en diepte constant in dwarsprofiel

Eenparige stroom

Evenwichtsdiepte ($i_b = i_w$):

$$d_e = \left(\frac{c_f q^2}{i_b g} \right)^{1/3}$$

Grensdiepte: zie (1)

Bélanger

Algemeen:

$$\frac{dd}{ds} = \frac{i_b - i_w}{1 - Fr^2} = \frac{i_b - c_f Q^2 P / g A^3}{1 - \alpha Q^2 B / g A^3}$$

Tweedimensionale stroom (breedte en diepte constant in dwarsprofiel):

$$\frac{dd}{ds} = \frac{i_b - c_f q^2 / g d^3}{1 - \alpha q^2 / g d^3} = i_b \frac{d^3 - d_e^3}{d^3 - d_g^3} \quad (d \neq d_g \quad \text{en} \quad i_b > 0)$$

Oplossingen

Kleine afwijkingen van de eenparige toestand:

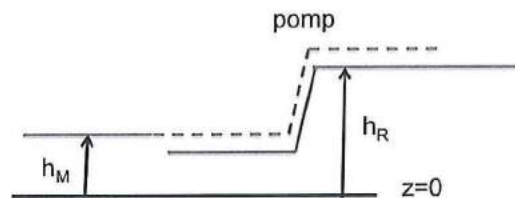
$$\Delta d = \Delta d_0 \exp \left(\frac{s - s_0}{L} \right) \quad \text{waarin} \quad L = \frac{1 - i_b / c_f}{3 i_b} d_e$$

Horizontale bodem:

$$\frac{1}{4} d^4 - d_g^3 d + c_f d_g^3 s = \text{constant}$$

Vraagstuk I (pomp)

I.1 In het pijpstuk voor de pomp is de energiehoogte gelijk aan de energiehoogte in het meer. Aangezien de snelheid in het meer verwaarloosbaar klein is geldt dat de energiehoogte in het meer gelijk is aan het piëzometrisch niveau in het meer. De snelheid is constant in de buis (continuïteit en uniforme buisdiameter). Daarmee is de snelheidshoogte ook uniform in de buis. Het piëzometrisch niveau kan getekend worden door de snelheidshoogte van de energiehoogte af te trekken. De kinetische energie wordt gedissipeerd bij de uitstroming. Het piëzometrisch niveau in de buis na de pomp is daarmee gelijk aan het waterniveau in de rivier. Het energieniveau in het pijpdeel aan de rivierzijde van de pomp kan getekend worden door de snelheidshoogte (gelijk aan de snelheidshoogte in de pijp aan de meerzijde) op te tellen bij het uniforme piëzometrisch niveau. De pomp zorgt voor een verhoging van het energieniveau.



I.2 Het pompvermogen wordt gegeven door $P = \rho g Q \Delta H$. Zie formuleblad voor $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ en $g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Het debiet is gegeven: $Q = 3 \text{ m}^3/\text{s}$. De te overbruggen energiehoogte is het verschil tussen het energieniveau na de pomp min het energieniveau voor de pomp. Het energieniveau voor de pomp is gelijk aan het energieniveau in het meer: $H_{\text{voor}} = H_M = h_M$. Het energieniveau na de pomp is het energieniveau in de rivier plus het uittreeverlies: $H_{\text{na}} = H_R + \frac{u^2}{2g} = h_R + \frac{u^2}{2g}$. De snelheid in de pijp is gegeven door $u = \frac{Q}{0.25\pi D^2} = 2.65 \text{ m/s}$. Het te overbruggen energieverval wordt daarmee: $\Delta H = h_R - h_M + \frac{u^2}{2g} = 2.5 - 0.5 + \frac{2.65^2}{2 \cdot 9.81} = 2.36 \text{ m}$. Het pompvermogen wordt daarmee: $P = \rho g Q \Delta H = 69.4 \text{ kW}$.

I.3 De onderdruk is maximaal (de druk is minimaal) in het horizontale deel van de pijp voor de pomp. Aangezien intreeverliezen verwaarloosbaar zijn is het energieniveau in de pijp voor de pomp gelijk aan het energieniveau in het meer: $H = h_M$. In de pijp is het energieniveau tevens gegeven door $H = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g}$, met $H = 0.5 \text{ m}$, $z = 4 \text{ m}$, $u = \frac{Q}{0.25\pi D^2} = 2.65 \text{ m/s}$. Dit geeft als druk tov de luchtdruk: $p = \rho g \left(H - z - \frac{u^2}{2g} \right) = -37.8 \text{ kW}$.

I.4 (a) Intreeverliezen ontstaan doordat de stroming niet in staat is de geometrie van de pijpopening te volgen. Daardoor treedt contractie op, waarbij de stroming eerst versnelt en daarna weer vertraagt. Juist bij de vertraging treedt energieverlies op. Dit is eenvoudig te laten zien met een combinatie van een impuls- en energiebalans. (b) Het extra vermogen is gegeven door $\Delta P = \rho g Q \Delta H$, waarbij ΔH het intreeverlies representeert.

Zie formuleblad voor: $\Delta H = \left(\frac{1}{\mu} - 1\right) \frac{u^2}{2g}$. Voor μ moet een realistische waarde ingevuld worden. Realistisch is $\mu = 0.5 - 1$. Voor $\mu = 0.5$: $\Delta P = 10.5$ kW.

I.5 De effectiviteit van de pomp wordt bepaald door $P = \rho g Q \Delta H$. Door de verticale pijp aan de rivierzijde weg te halen wordt het energieniveau aan de rivierzijde sterk verhoogd. Dit moet overbrugd worden door de pomp. Vergelijk dit met een hevel.

Vraagstuk II (meanderende rivier)

II.1 In een ideale vloeistof is de versnelling van een waterdeeltje bepaald door de ruimtelijke (partiële) afgeleiden van het piëzometrisch niveau (h). Voor stationaire stroming heeft de deeltjesversnelling een component in de stroomrichting s (als de *grootte* van de snelheid verandert langs een stroomlijn) en een component in de normaalrichting n (als de *richting* van de snelheid verandert langs een stroomlijn). Deze versnellingen zijn gekoppeld aan de gradiënt van het piëzometrisch niveau in de s richting, respectievelijk de n richting. In een rivierbocht volgt de hoofdstroming de oriëntatie van de oevers en de bijbehorende stroomlijnen zijn daarom gekromd in het horizontale vlak. Deze richtingsverandering leidt tot een *dwarsverhang* dat groter is naarmate de versnelling in dwarsrichting groter is. Bepalend voor dit laatste zijn de grootte van de stroomsnelheid (U) en de kromtestraal van de rivierbocht (R).

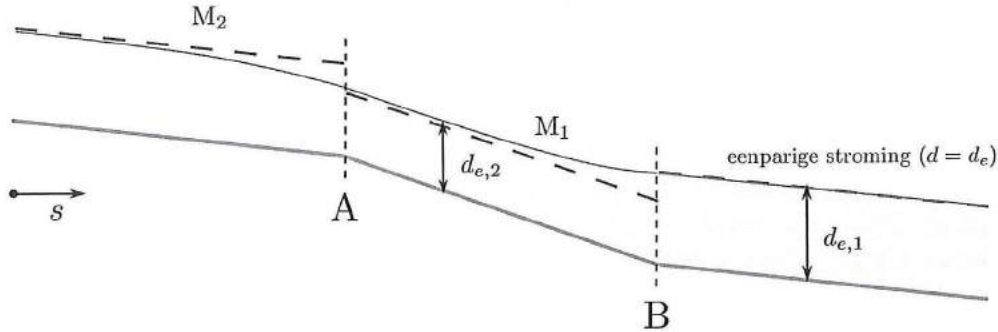
II.2 In de stationaire toestand luidt de vergelijking van Euler in de normaal-richting van een stroomlijn (zie formuleblad): $g \partial h / \partial n = -U^2 / R$, waarin R de kromtestraal van de stroomlijn is en n de richting naar het middelpunt van de bijbehorende kromtecirkel. Een willekeurige stroomlijn volgt de rivierbocht en heeft daarom een (gemiddelde) kromtestraal R van 1200 m. (Verskil in kromtestraal tussen binnen- en buitenbocht is verwaarloosbaar klein vanwege $B \ll R$.) De grootte van het dwarsverhang kan worden afgeleid via $|\partial h / \partial s| = \Delta h / B = 2.35 \times 10^{-4}$. Hieruit volgt uiteindelijk $U = \sqrt{g \Delta h R / B} = 1.66$ m/s. (Zie bijvoorbeeld ook practicumopdracht 1A: roterend vat.)

II.3 De stationaire stroming in een waterloop streeft naar een eenparige toestand, gekenmerkt door een evenwicht tussen de weerstandskracht (ten gevolge van de bodemschuifspanning) en de aandrijvende verhangkracht (ten gevolge van de zwaartekracht). Door verschillende invloeden (kunstwerken, lokale aanpassingen in het rivierbed, aangrenzende watersystemen) is dit evenwicht mogelijk niet overal aanwezig. De waterdiepte zal zich in dat geval gaan aanpassen totdat de stroming weer eenparig is. Uitgangspunt van de theorie is dat deze overgangen zich over grote afstand voltrekken, zodat de drukverdeling hydrostatisch is (rechte stroomlijnen, geen verticale versnellingen) en abrupte vertragen zich niet voordoen. Dit leidt tot een balansvergelijking voor de energiehogte met een dissipatieterm ten gevolge van uitsluitend de bodemweerstand, de zogenaamde *verhanglijnvergelijking*.

II.4 Evenwichtsdiepte: de waterdiepte in een waterloop (rivier, kanaal) waarbij voor een gegeven (specifiek) debiet de stroming eenparig is. De totale bodemweerstand is dan in evenwicht met de verhangkracht, met het weerstandsverhang gelijk aan het bodemverhang. Uit het voorgaande volgt: $g A i_b = c_f U^2 P$, waarin A en P respectievelijk het natte

oppervlak en de natte omtrek van de dwarsdoorgang zijn. Met $A/P = R \approx d$ (wat een goede benadering is indien, zoals hier, $B \gg d$) en de eerder berekende waarde van U volgt nu $d_e = c_f U^2 / (g i_b) = 4.24 \text{ m}$.

II.5 Zie onderstaande schets.



II.6 Langs het traject A-B is het bodemverhang anderhalf keer zo groot als langs de rest van de rivier waarmee de evenwichtsdiepte langs dit traject $d_{e,AB} = 3,96 \text{ m}$. In punt B heerst de evenwichtsdiepte d_e behorend bij het riviertraject benedenstrooms van B. Er treedt hierdoor langs A-B een M_1 -type verhanglijn op (flauwe bodemhelling, $d_B > d_{e,AB}$). De aanpassingslengte L hiervan bedraagt $L = d_{e,AB}(i_b^{-1} - c_f^{-1})/3 = 6158 \text{ m}$. Volgens de benadering voor kleine afwijkingen van de eenparige toestand geldt $d_A = d_{e,AB} + (d_B - d_{e,AB}) \exp((s_A - s_B)/L)$. Met $s_A - s_B = -2000 \text{ m}$ (let op het min-teken!) en $d_B - d_{e,AB} = 0,20 \text{ m}$ volgt uiteindelijk $d_A = 3,95 \text{ m}$.

Vraagstuk III (pijpleiding)

III.1 Als de drukval veroorzaakt wordt door wandwrijving is deze evenredig met het weerstandsverhang. Dit verhang is voor een turbulente stroming evenredig met de gemiddelde snelheid in het kwadraat en voor een laminaire stroming evenredig met de snelheid. Omdat de snelheid evenredig is met het debiet, duidt een lineair verband tussen drukval en debiet op een laminaire stroming. Omdat in de grafiek het lineaire deel bij lage debieten te vinden is en omdat de drukval bij hogere debieten meer dan lineair toeneemt, lijkt dit een goede verklaring.

III.2 Het verband tussen drukval en debiet volgt uit het verband tussen weerstandsverhang en snelheid. $i_w = \frac{f}{8} \frac{U^2}{gR}$ dus $\frac{\Delta p}{\rho g} = f \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g} = f \frac{L}{D} \frac{Q^2}{2g(\pi/4 D^2)^2}$ voor het laminaire geval kunnen we voor de Darcy-Weisbach weerstandsfactor nemen $f = \frac{64}{Re}$ met $Re = \frac{UD}{\nu}$ dan volgt $\frac{\Delta p}{Q} = \frac{128}{\pi} \frac{\nu \rho L}{D^4}$. Als we kijken naar de eerste 4 punten dan liggen die netjes op een lijn, met helling $81,5 \text{ kNs/m}^5$. Met de diameter als enige onbekende levert dit op: $D = 0,1 \text{ m}$. Met deze informatie kunnen we direct zien dat de stroming laminair is: bij $Q = 0,0002 \text{ m}^3/\text{s}$ volgt $U = 0,025 \text{ m/s}$ en $Re = 2550$. Dus de aanname dat voor kleine debieten de stroming laminair is klopt.

III.3 De maximale wandschuifspanning wordt gevonden voor de maximale drukval en dus ook bij het maximale debiet; immers de lengte en de diameter van de buis blijven

hetzelfde. $\tau_0 LP = \Delta p A$ zodat $\tau_0 = \frac{D\Delta p}{4L} = \frac{0,1 \cdot 1061}{4 \cdot 200} = 0,133 \text{ N/m}^2$.

III.4 Als we uitgaan van hydraulisch ruwe condities bij de grote debieten, dan geldt voor de weerstandsfactor $\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \left(\frac{3,7D}{k} \right)$ (Colebrook-White). Als we kijken naar het verloop van de grafiek waarin de evenredigheid met het debiet (en dus de snelheid) in het kwadraat te herkennen is, dan geldt daar het verband $\frac{\Delta p}{Q^2} = 7,89 \cdot 10^8 \frac{Ns^2}{m^5}$ op basis van het weerstandsverhang geldt voor deze relatie: $\frac{\Delta p}{Q^2} = f \frac{8L\rho}{\pi^2 D^5}$ zodat hieruit volgt dat $f = 0,0486$. Gebruikmakend van de White-Colebrook formule voor hydraulisch ruwe condities levert een relatieve ruwheid $\frac{k}{D} = 0,02$, zodat $k = 2 \text{ mm}$.

III.5 De voorwaarde voor hydraulisch ruwe condities geldt dat de stroming turbulent moet zijn en dat $k > \delta$ met $\delta = 11,6 \frac{\nu}{u^*}$ de dikte van de viskeuze sublaag. Met de inmiddels bekende waarde van de weerstandsfactor kunnen we u^* berekenen. Immers $\frac{u^*}{U} = \sqrt{f}$. Voor het debiet van $Q = 0,00028 \text{ m}^3/\text{s}$ geldt $\delta = 1,5 \text{ mm} \approx k$ maar bij $Q = 0,00036 \text{ m}^3/\text{s}$ geldt $\delta = 1,2 \text{ mm} < k$ dus ruw. Bij grotere debieten wordt de viskeuze sublaag alleen maar dunner.

Vraagstuk IV (korte overlaat)

IV.1 In het stroomvoerende deel van doorgang 2 zijn de stroomlijnen bij benadering recht waardoor in dit deel van de vertikaal een hydrostatische drukverdeling heerst. Het deel van de doorgang dat zich in het zog bevindt kenmerkt zich door de aanwezigheid van een bodemneer waarin de stroomlijnen gekromd zijn. De stroomsnelheden in deze zone zijn echter zo laag (ten opzichte van de hoofdstroom) dat de bijbehorende gradiënt van het piëzometrisch niveau ($\simeq U^2/gR$) verwaarloosbaar klein waardoor ook hier, zijn het bij benadering, de aanname van hydrostatische druk opgaat.

IV.2 Gebruik een balans voor horizontale impuls tussen doorgangen 2 en 3: $F_2 = F_3$, waarin $F_{2,3} = \frac{1}{2} \rho g d_{2,3}^2 + \rho q U_{2,3}$. Met $U_3 = q/d_3$ en $U_2 = q/(d_2 - a_k)$ geeft dit (op een constante factor ρ na): $\frac{1}{2} g d_2^2 + q^2/(d_2 - a_k) = \frac{1}{2} g d_3^2 + q^2/d_3$. Het rechterlid uit deze vergelijking kan rechtstreeks uit de gegevens berekend worden ($F_3 = 3650 \text{ N/m}$) waarna een vergelijking met één onbekende (d_2) resteert. Oplossen (grafische rekenmachine of iteratief) geeft uiteindelijk $d_3 = 0,76 \text{ m}$ (subkritische tak van de oplossing kiezen).

IV.3 De horizontale kracht K_H van het stromende water op de overlaat kan gevonden worden via een impulsbalans voor het balansgebied tussen doorgangen 1 en 3: $F_1 - K_H - F_3 = 0$ (balansgebied kiezen tussen doorgangen 1 en 2 kan ook). De impulsverdracht in doorgang 3 volgt rechtstreeks uit het tussenresultaat van de vorige deelvraag. Voor de impulsverdracht in doorgang 1 moeten we eerst de watediepte d_1 bepalen, via de energievergelijking tussen doorgang 1 en 2: $H_1 = H_2$. Met $U_2 = q/(d_2 - a_k)$ vinden we $H_2 = 1,137 \text{ m}$. De watediepte d_1 volgt vervolgens uit $d_1 + q^2/(2gd_1^2) = 1,137 \text{ m}$. Oplossen hiervan levert (subkritische tak kiezen): $d_1 = 1,13 \text{ m}$. Invullen in de uitdrukking voor de impulsverdracht geeft vervolgens $F_1 = 6378 \text{ N/m}$ en uiteindelijk $K_H = F_1 - F_3 = 2727 \text{ N/m}$.

IV.4 De overlaat is volkomen met afvoercoëfficiënt $m = 1$ zodat $q = d_k \sqrt{g d_k}$, oftewel

$d_k = (q^2/g)^{1/3} = 0,21 \text{ m}$ (grensdiepte) en $E_k = \frac{3}{2}d_g = 0,31 \text{ m}$. De energiehogte in doorgang voor de overlaat bedraagt nu $H_1 = a_k + E_k = 0,96 \text{ m}$. Via de uitdrukking voor de energiehogte kan hieruit de waterdiepte in doorgang 1 berekend worden: $d_1 = 0,95 \text{ m}$.

IV.5 Beschouw het behoud van horizontale impuls in het balansgebied tussen doorgangen 4 en 3: $F_4 + F_{\text{straal}} - F_3 = 0$. Hierin is F_{straal} de door de straal meegevoerde impuls gelijk aan de massa overdracht via straal keer de *horizontale* stroomsnelheid in de straal: $\rho q \times U_{\text{straal}} \cos 45^\circ$, waarin $U_{\text{straal}} = q/b = 3,0 \text{ m/s}$. De impulsoverdracht door doorgang 4 is gegeven door $F_4 = \frac{1}{2}\rho g d_4^2$ (dichte wand, stroomsnelheid nul). De balansvergelijking kan hiermee worden omgewerkt tot: $\frac{1}{2}g d_3^2 + q^2/d_3 = \frac{1}{2}g d_4^2 + (q^2/b) \cos 45^\circ$. Het rechterlid kan rechtstreeks uit de gegevens berekend worden. Oplossen van de resulterende vergelijking voor d_3 geeft (subkritische oplossing kiezen) $d_3 = 0,59 \text{ m}$.

Technische Universiteit Delft

Faculteit Civiele Techniek en Technische Aardwetenschappen

Sectie Vloeistofmechanica

Tentamen CTB2110 / CT2140

Vloeistofmechanica / Vloeistofmechanica 2

Donderdag 29 januari 2015, 14:00 tot 17:00 uur

Bij de beoordeling van het examenwerk zal voornamelijk worden gelet op een goede systematische aanpak en een juiste toepassing van de theorie. Per deelvraag staat het maximum aantal te behalen punten vermeld. Indien bij de uitwerkingen aannames worden gedaan, dan moeten deze duidelijk worden vermeld. Geef waar nodig een beknopt commentaar en geef duidelijk aan waarom een bepaalde aanname toelaatbaar is.

Wanneer het antwoord op een subvraag in vervolgvragen nodig is, maar niet kan worden berekend, neem dan een plausibele waarde daarvoor aan in de beantwoording van de vervolgvragen.

Getalsmatige grootheden moeten van eenheden worden voorzien, in elk geval in de eindantwoorden en bij voorkeur ook in de tussenstappen.

Tijdens het tentamen mag alleen het formuleblad (wordt apart uitgedeeld) worden geraadpleegd.

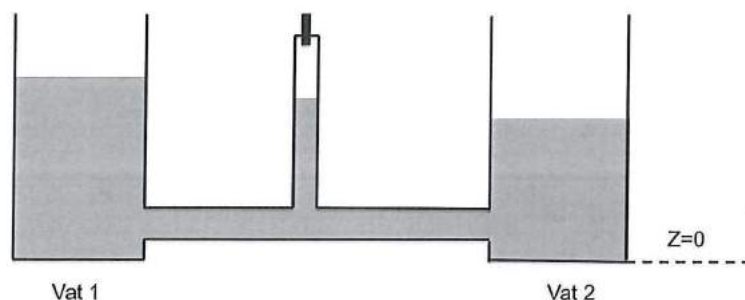
Tenzij anders gegeven geldt: massa dichtheid water $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, kinematische viscositeit water $\nu = 1.0 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, gravitatie $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

**Lever ieder vraagstuk in op een afzonderlijk antwoordformulier,
voorzien van je naam en studienummer!**

Vraagstuk I (CTB2110)

Twee identieke vaten met diameter $D_{vat} = 10\text{ m}$ zijn verbonden met een pijp (diameter: $D_{pijp} = 0.1\text{ m}$). Halverwege de pijp is een stijgbuis geplaatst met een ventiel aan het uiteinde. Op $t = 0$ is de waterstand in vat 1 veel hoger dan in vat 2. Op $t = t_1$ is de situatie bereikt met waterstanden in vat 1 en vat 2 van respectievelijk $h_1 = 3\text{ m}$ en $h_2 = 2.5\text{ m}$.

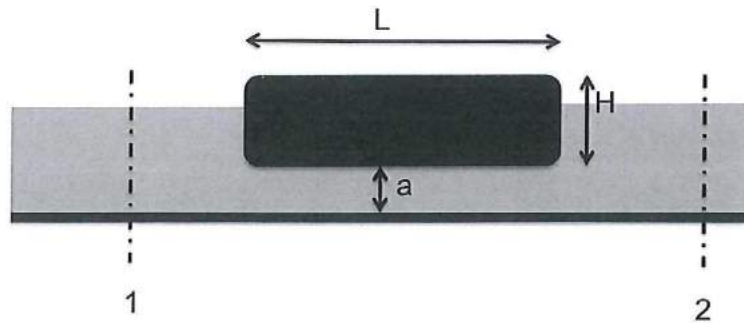
Aannames: Houd rekening met een uittreeverlies, overige verliezen mogen verwaarloosd worden. Het ventiel in de stijgbuis staat open, tenzij anders vermeld. Het volume water in de verbindingspijp en in de stijgbuis mag verwaarloosd worden ten opzichte van het volume in de vaten. Oscillaties als gevolg van traagheidseffecten mogen buiten beschouwing gelaten worden.



- 1.0 I.1 Bepaal het waterniveau in de stijgbuis op $t = t_1$ ten opzichte van $z = 0$. Hoe wordt dit niveau genoemd?
- 1.0 I.2 Bereken de stroomsnelheid door de pijp op $t = t_1$.
- 1.5 I.3 Leid de uitdrukking af (in symbolen) voor de tijd die nodig is om het evenwicht te verkrijgen waarbij de waterstanden in de vaten gelijk zijn (let op: het waterniveau in vat 2 stijgt).
- 1.0 I.4 Op $t = t_1$ wordt het ventiel dicht gezet. Bepaal de luchtdruk in de buis onder het ventiel in de eindsituatie, waarin het systeem in evenwicht is.
- 1.0 I.5 Er wordt voorgesteld om een Venturimeter te plaatsen halverwege de pijp. Leg beknopt uit hoe een Venturimeter werkt.

Vraagstuk II (CTB2110)

Een ponton met een massa van 180.000 kg (= 180 ton), een lengte $L = 4$ m en een hoogte $H = 4$ m ligt over de volle breedte van een kanaal (breedte $B = 20$ m). Zie figuur. Aanvankelijk wordt in doorgang 1 een diepte van $d_1 = 3$ m gemeten terwijl het water stil staat: $u_1 = 0$ m/s. In alle vragen mag ervan uitgegaan worden dat het ponton horizontaal ligt.



- 1.0 **II.1** Bepaal de hoogte a onder het ponton.

In een nieuwe situatie wordt in doorsnede 1 eveneens een waterdiepte van $d_1 = 3$ m gemeten, maar nu stroomt het water van links naar rechts met een stroomsnelheid van $u_1 = 0,35$ m/s.

- 1.0 **II.2** Bereken voor de situatie met stroming de waterdruk p net onder het ponton.

Gebruik in het vervolg $p = 22$ kPa als je het antwoord op deze vraag niet kunt berekenen.

- 1.5 **II.3** Laat zien dat bij deze bovenstroomse snelheid de doorstroomhoogte $a = 0,60$ m bedraagt.

- 1.0 **II.4** Bereken de horizontale kracht die nodig is om het ponton op zijn plek te houden. Maak indien nodig gebruik van de gegevens uit de vragen II.2 en II.3.

Door aangroei van mosselen treedt aan de onderkant van het ponton een schuifspanning op die evenredig is met het product van de dichtheid van water (ρ) en de stroomsnelheid onder het ponton in het kwadraat (u^2).

- 1.0 **II.5** Teken/schets de energiehogte en het piëzometrisch niveau tussen de doorgangen 1 en 2. Ga er van uit dat de doorstroomhoogte a niet is veranderd.

Vraagstuk III (CTB2110 & CT2140)

Het bepalen van de wandschuifspanning voor een stroming over een oppervlak is niet eenvoudig. Deze wordt dan ook vaak indirect gemeten, dat wil zeggen afgeleid uit ander te meten grootheden dan de schuifspanning zelf.

Een methode voor de directe meting van een schuifspanning staat in de figuur weergegeven. In de bodem van een brede stroomgoot zit een uitsparing waarin een stuk bodemoppervlak ($A = 0,1 \text{ m}^2$) bij C vast zit aan een scharnier en veren zodat de kracht F gemeten kan worden die de stroming op het oppervlak uitoefent. Het spleetje rondom het oppervlak is klein en we veronderstellen dat dit de meting niet beïnvloedt.

De diepte gemiddelde stroomsnelheid U in de goot bedraagt 1 m/s en de waterdiepte is $0,3 \text{ m}$. In eerste instantie is de bodem van de goot en het meetoppervlak glad en wordt een kracht gemeten van $F = 0,2 \text{ N}$.

- 1.0 **III.1** Geef in formulevorm aan hoe de gemeten kracht op het oppervlak onder bovenstaande condities afhangt van de over de diepte gemiddelde snelheid in de goot.

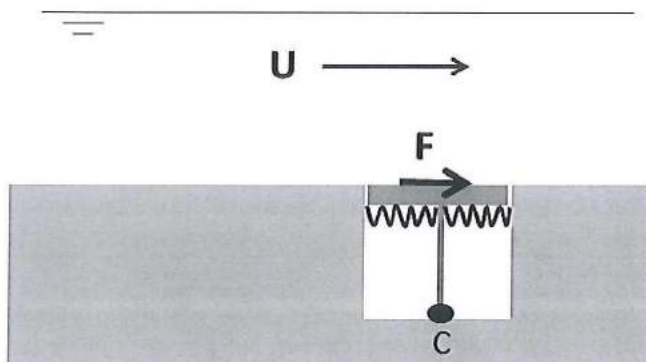
Om te onderzoeken of de ruwheid van de bodem van invloed is op de gemeten kracht, wordt de bodem beplakt met korreltjes die een typische afmeting d hebben.

- 1.5 **III.2** Hoe groot moeten de korreltjes zijn om het oppervlak onder de bovengenoemde omstandigheden als hydraulisch ruw te mogen opvatten en dus effecten te kunnen meten van de ruwheid? Geef aan waarom het van belang is dat ook de rest van de stroomgoot beplakt wordt met dezelfde korrels.

Tijdens een meting wordt bij een constante waterdiepte van $0,3 \text{ m}$ de snelheid gevarieerd en de bijbehorende kracht gemeten. De gegevens staan in bijgevoegde tabel.

- 1.5 **III.3** Zet de waarden in bijgevoegde tabel in een grafiek en bepaal hieruit de weerstandscoefficiënt. Geef een verklaring waarom bepaalde meetwaarden afwijken van je verwachting.

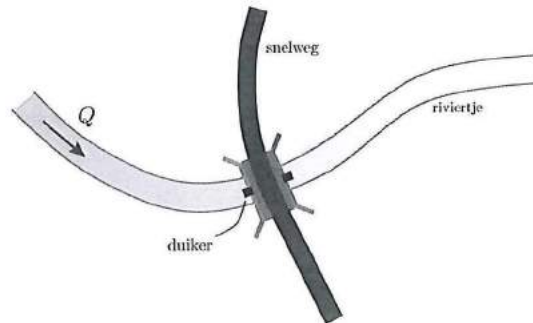
- 1.0 **III.4** Geef minimaal één andere manieren om de schuifspanning te bepalen op basis van andere informatie die in stroming te meten is, zoals bijv. snelheden en drukken en waterniveau's.



meting	$U \text{ (m/s)}$	$F \text{ (N)}$
1	0,08	0,002
2	0,18	0,011
3	0,29	0,026
4	0,50	0,074
5	0,80	0,191
6	1,00	0,305

Vraagstuk IV (CTB2110 & CT2140)

Het voorgenomen traject van een nieuwe snelweg kruist een riviertje. Men wil nagaan of deze kruising kan worden uitgevoerd middels een dam, waarbij de rivierafvoer door de dam wordt geleid via een duiker. Deze moet dan uiteraard zo ontworpen worden dat er bij hoge afvoeren van het riviertje geen wateroverlast optreedt. Zie onderstaande schets.

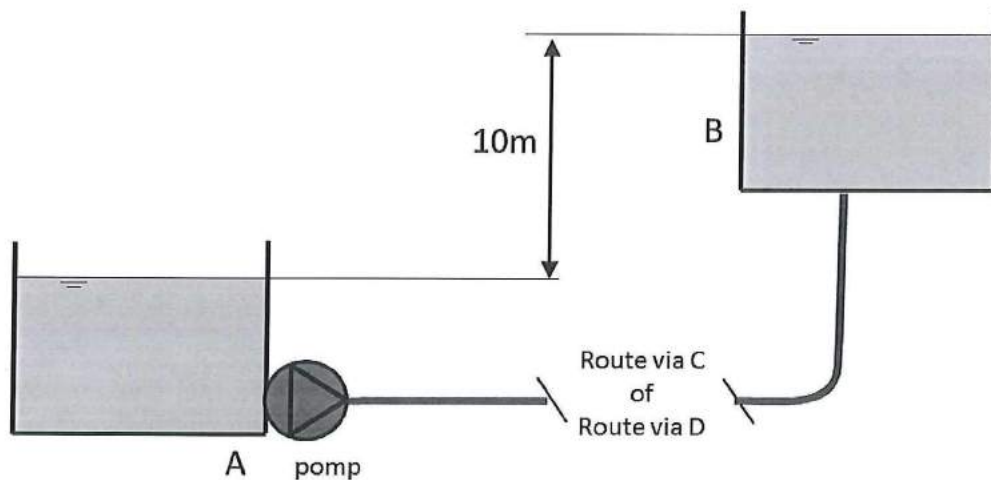


Het riviertje heeft een bodemverhang i_b van $5,0 \times 10^{-5}$ en een dimensieloze weerstandscoefficiënt c_f van $4,0 \times 10^{-3}$.

- 1.0 **IV.1** Omschrijf op welke wijze de aanleg van de dam plus duiker de waterstand in het riviertje kan beïnvloeden, en geef daarbij aan in welk deel van het riviertje (boven- of benedenstrooms van de duiker) deze verandering van toepassing is.
- Het dwarsprofiel van het riviertje wordt rechthoekig verondersteld met een constante breedte B van 20 m. De randvoorwaarden benedenstrooms van de duiker liggen op een zodanig grote afstand dat deze geen invloed hebben op de waterstand ter plaatse van de duiker.
- 1.0 **IV.2** Bereken voor een maatgevende afvoer Q_0 van $25 \text{ m}^3/\text{s}$ de waterdiepte d_0 in het riviertje op *korte* afstand benedenstrooms van de duiker.
- Het ontwerp van de duiker bestaat uit een betonnen koker met een lengte ℓ van 40 m, een breedte b van 3,0 m en een hoogte h van 1,5 m. De ruwheidshoogte k_N van de wand van de koker bedraagt 4 mm. De koker is altijd volledig gevuld met water. De bodemniveaus aan weerszijden van de duiker zijn aan elkaar gelijk.
- 1.5 **IV.3** Bereken voor de maatgevende afvoer Q_0 de waterdiepte d_1 in het riviertje op *korte* afstand bovenstrooms van de duiker. Neem aan dat de vertragsingsverliezen als gevolg van de duiker verwaarloosbaar zijn ten opzichte van het wandwrijvingsverlies in de duiker.
- 1.0 **IV.4** Bereken voor de situatie met een afvoer Q_0 de waterdiepte d_2 in het riviertje op een afstand s van 7,5 km bovenstrooms van de duiker, waarbij mag worden aangenomen dat de waterstanden in de rivier slechts weinig verschillen van die bij eenparige stroming.
- De snelweg komt onder water te staan wanneer de waterdiepte in het riviertje nabij de duiker groter is dan 4 m.
- 1.5 **IV.5** Reken uit vanaf welk debiet (Q_1) hiervan sprake is.

Vraagstuk V (CT2140)

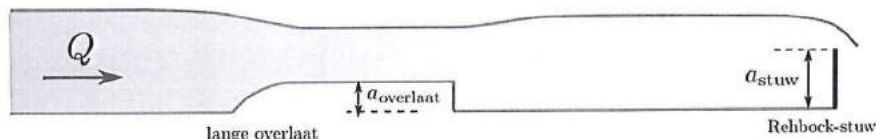
Er moet een pijpleiding worden aangelegd tussen twee plaatsen A en B maar er ligt een heuvel tussen. Er zijn twee mogelijke routes bedacht. De kortste route die over de heuveltop C, die midden in het traject ligt, heen gaat heeft een lengte van 500 m. De langere route die om de heuvel heen loopt via D, heeft een lengte van 1000 m. Het water wordt met een debiet van $0,1 \text{ m}^3/\text{s}$ bij A vanuit een reservoir met een pomp naar een iets hoger gelegen reservoir bij B verplaatst. Het waterniveau in B is 10 m hoger dan in A en het hoogste punt op de heuvel bij C ligt 25 m boven de waterspiegel in A. De keuzes van de pijpdiameter en wanddikte worden bepaald door de energieverliezen en de te verwachten drukken. Bij het ontwerp wordt uitgegaan van een pijpdiameter $D = 0,2 \text{ m}$ en een weerstandsfactor van Darcy-Weisbach $f = 0,02$.



- 1.5 V.1 Benoem de verschillende bijdragen aan het totale energie-hoogte-verlies en bereken dit verlies voor de twee verschillende routes.
- 1.5 V.2 Schets het verloop van het piezometrisch niveau en van de druk in de leiding voor beide routes, en geef daarin aan waar de plaatsen A, B, C en D liggen. De precieze vorm van de heuvel is niet belangrijk als het maar duidelijk is dat C op het hoogste punt ligt.
- 1.0 V.3 Geef aan welke problemen er met de leiding bij C kunnen ontstaan vanwege de hoge ligging?
- Uiteindelijk wordt de route via D verkozen.
- 1.0 V.4 Welk pompvermogen is er nodig om het bovengenoemde debiet van $0,1 \text{ m}^3/\text{s}$ te realiseren?
- 1.0 V.5 Geef aan door welke maatregel het benodigde pompvermogen eenvoudig te halveren is zonder de route aan te passen. Laat dit aan de hand van een berekening zien.

Vraagstuk VI (CT2140)

Beschouw een horizontale stroomgoot met een constante breedte B . Halverwege de goot bevindt zich een lange overlaat. Het debiet Q in de goot is constant en de waterstand wordt geregeld met een Rehbock-stuw aan het benedenstroomse uiteinde van de goot. Zie onderstaande figuur.



Stroomgoot met lange overlaat

- 1.0 VI.1 Wat is, hydraulisch gezien, het bepalende kenmerk waaraan de lange overlaat zijn naam ontleent?

De breedte B van de stroomgoot bedraagt 35 cm. De Rehbock-stuw heeft een afvoercoëfficiënt m van 1,05. Op de kruin van de Rehbock-stuw meet men een waterdiepte d_k van 8 cm.

- 1.0 VI.2 Bereken het debiet Q in de goot. Gebruik in het vervolg $Q = 0,020 \text{ m}^3/\text{s}$ als je het antwoord op deze vraag niet kunt berekenen.

De lange overlaat heeft een kruinhoogte a_{overlaat} van 10 cm. Aanvankelijk bedraagt de kruinhoogte van de Rehbock-stuw (a_{stuw}), eveneens 10 cm.

- 1.0 VI.3 Bereken de waterdiepte op de kruin van de lange overlaat voor het eerder berekende debiet Q . Ga er hier en in het vervolg vanuit dat bij de in de goot optredende energieverliezen de bodemweerstand geen rol speelt.

- 1.0 VI.4 Bereken de bijbehorende horizontale kracht K_H die door het stromende water op de lange overlaat wordt uitgeoefend.

Men laat nu de Rehbock-stuw zakken totdat aan de benedenstroomse zijde van de lange overlaat een watersprong optreedt. De kruinhoogte (a_{stuw}) van de Rehbock-stuw bedraagt op dat moment 5 cm. Alle overige gegevens blijven ongewijzigd.

- 1.5 VI.5 Bereken de hoogte van de optredende watersprong (dat wil zeggen, het onderlinge verschil tussen de waterdiepten rondom de sprong).

Met laat vervolgens de Rehbock-stuw helemaal zakken ($a_{\text{stuw}} = 0$). Er is daarbij sprake van een zogenaamde 'vrije afstroming'. Ook hier blijven alle overige gegevens ongewijzigd.

- 1.0 VI.6 Hoe groot is in deze situatie de waterdiepte aan de bovenstroomse zijde van de lange overlaat?

Formuleblad Vloeistofmechanica CTB2110

Kentallen

Froude-getal, stroomsnelheid U , waterdiepte d :

$$Fr \equiv \frac{U}{\sqrt{gd}}$$

Reynolds-getal, lengteschaal ℓ , dynamische viscositeit η , kinematische viscositeit ν , dichtheid ρ :

$$Re \equiv \frac{\rho U \ell}{\eta} = \frac{U \ell}{\nu}$$

Hydrostatica

Hydrostatisch evenwicht:

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = 0$$

bij constante dichtheid:

$$p + \rho g z = \text{constant}$$

Hydrostatische drukkracht in open waterloop, diepte d , constante dichtheid:

$$F_p = \frac{1}{2} \rho g d^2 \quad \text{p.e.v. breedte}$$

Piëzometrisch niveau, atmosferische druk p_a :

$$h \equiv z + \frac{p - p_a}{\rho g}$$

Hydrostatisch evenwicht, ρg en p_a constant:

$$h = \text{constant}$$

Kinematica

Versnelling van een deeltje

Meebewegende (materiële) afgeleide, grootheid f , snelheidsvector $(u_x, u_y, u_z)^T$:

$$\frac{Df}{Dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + u_x \frac{\partial f}{\partial x} + u_y \frac{\partial f}{\partial y} + u_z \frac{\partial f}{\partial z}$$

In natuurlijk (s, n, b) assenstelsel:

$$\frac{Df}{Dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + u_s \frac{\partial f}{\partial s}$$

Meevoering

Volumestroom door doorgang D , normaalsnelheid u_N :

$$Q = \int_D u_N \, dA$$

Overdracht willekeurige grootheid X met dichtheid ρ_X :

$$S_X = \int_D \rho_X u_N \, dA$$

Bijvoorbeeld, impuls $\rho \mathbf{u}$:

$$S_{\text{imp}} = \int_D \rho \mathbf{u} u_N \, dA$$

Idem, kinetische energie:

$$S_{\text{kin}} = \int_D \frac{1}{2} \rho u^2 u_N \, dA$$

Ideale-vloeistofstroming

Euler-vergelijkingen

Bewegingsvergelijkingen in termen van hoogte piëzometrisch niveau $h = z + p/\rho g$ (natuurlijk assenstelsel):

$$a_s = \frac{\partial u_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = -g \frac{\partial h}{\partial s}$$

$$a_n = \frac{\partial u_n}{\partial t} + \frac{u^2}{R} = -g \frac{\partial h}{\partial n}$$

$$a_b = \frac{\partial u_b}{\partial t} = -g \frac{\partial h}{\partial b}$$

Bernoulli

Stationaire ideale-vloeistofstroming:

$$H = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u_s^2}{2g} = h + \frac{u_s^2}{2g} = \text{constant langs stroomlijn} \quad \left(\frac{\partial H}{\partial s} = 0 \right)$$

Torricelli

Stroming uit reservoir via kleine opening:

$$Q = \mu A \sqrt{2g \Delta h},$$

waarin Δh de hoogte is van het piëzometrisch niveau in het bovenstroomse reservoir boven dat in de uittredende straal.

Energie

Energieoverdracht

Doorgang D met oppervlak A en normaalsnelheid u_N :

$$P = \int \int_D \left(p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho u^2 \right) u_N \, dA$$

Dwarsprofiel gemiddelde energiehogte:

$$\langle H \rangle \equiv \frac{P}{\rho g Q}$$

Rechte stroomlijnen (h constant binnen dwarsprofiel), gem. stroomsnelheid U :

$$\langle H \rangle = h + \beta \frac{U^2}{2g}$$

waarin $\beta = \int_D u^3 \, dA / U^3 A \approx 1$

Energiebalans

Voor een stroombuis geldt (stationair, geen toevoeging/onttrekking van energie):

$$P = \rho g Q \langle H \rangle = \text{constant}$$

Pomp, turbine:

$$\Delta P_{\text{pomp,turb}} = \rho g Q \Delta H_{\text{pomp,turb}}$$

Energiedissipatie balansgebied met doorgangen D_1 en D_2 , stationair:

$$\Delta P_{\text{diss}} = \rho g Q \Delta \langle H \rangle = \rho g Q (\langle H \rangle_1 - \langle H \rangle_2)$$

Drukverschil

Geleidelijke vernauwing (bijv. Venturi-meter), dynamische druk p :

$$p_1 - p_2 = \Delta p = \frac{1}{2} \rho Q^2 (A_2^{-2} - A_1^{-2})$$

Impuls

Impulsoverdracht

Doorgang D met normaalvector $\mathbf{e}_N$:

$$\mathbf{F} = \int \int_D (p + \rho u^2) \mathbf{e}_N \, dA$$

Idem, doorgang met oppervlak A , evenwijdige stroomlijnen en gemiddelde snelheid U :

$$F = \int \int_D p \, dA + \alpha \rho U^2 A$$

waarin $\alpha = \int_D u^2 \, dA / U^2 A \approx 1$

Impulsbalans

Kracht vloeistof op zijdelingse begrenzing stroombuis, doorgangen D_1 en D_2 , zwaartekracht $\mathbf{F}_g$, stationaire stroming:

$$\mathbf{K} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

Horizontale kracht op begrenzing balansgebied, verticale doorgangen D_1 en D_2 , stationaire stroming:

$$K_H = F_1 - F_2 = \Delta F$$

Lokaal vertragsverlies

Carnot (abrubte verwijding van diameter D_1 tot D_2 in pijpstroming)
Stijging piëzometrisch niveau:

$$h_2 - h_1 = \Delta h = U_2 (U_1 - U_2) / g$$

Daling energieniveau:

$$H_1 - H_2 = \Delta H_v = (U_1 - U_2)^2 / 2g$$

Vertragsverlies na lokale vernauwing, contractie μ :

$$\Delta H_v = \left(\frac{1}{\mu} - 1 \right)^2 \frac{U^2}{2g}$$

Buisje van Borda (intreeverlies):

$$\mu = \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta H_v = \left(\frac{1}{\mu} - 1 \right)^2 \frac{U^2}{2g}$$

Uittreeverlies (Carnot met $U_2 = 0$):

$$\Delta H_v = \frac{U^2}{2g}$$

Snel variërend vrij oppervlak

Bodemhoogte z_b , diepte d , specifiek debiet q , diepte-gemiddelde snelheid $U = q/d$, rechte stroomlijnen.

Energiehoogte

Diepte-gemiddelde energiehoogte (vormfactor β):

$$H = z_b + d + \beta \frac{U^2}{2g}$$

Specifieke energiehoogte:

$$E = H - z_b = d + \beta \frac{U^2}{2g}$$

Impuls- en energieoverdracht

Impulsoverdracht (vormfactor α):

$$F = \frac{1}{2} \rho g d^2 + \alpha \rho q U \quad \text{p.e.v. breedte}$$

Energieoverdracht:

$$P = \rho g q H \quad \text{p.e.v. breedte}$$

Kritische stroming

Froude-getal Fr :

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gd}} = 1 \Rightarrow U^2 = gd \Rightarrow q^2 = gd^3$$

Specifieke energiehoopte:

$$E = d + \frac{U^2}{2g} = d + \frac{gd}{2g} = \frac{3}{2}d$$

Grensdiepte (kritische diepte):

$$d_g = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3} = \frac{2}{3}E_g$$

Onderspuier

Gelijke energiehoopte, overgang $d_1 - d_2$ (sub- naar superkritisch):

$$d_1 + \frac{q^2}{2gd_1^2} = d_2 + \frac{q^2}{2gd_2^2}$$

Kracht op schuif (via impulsbalans):

$$K = \frac{1}{2}\rho g (d_1^2 - d_2^2) + \rho q^2 (d_1^{-1} - d_2^{-1}) \quad \text{p.e.v. breedte}$$

Stationaire watersprong

Gelijke impulsoverdracht overgang $d_1 - d_2$ (super- naar subkritisch):

$$\frac{1}{2}gd_1^2 + \frac{q^2}{d_1} = \frac{1}{2}gd_2^2 + \frac{q^2}{d_2} \quad \text{p.e.v. breedte}$$

Dissipatie in sprong (via energiebalans):

$$P_{\text{diss}} = \rho g q \left(d_1 - d_2 + \frac{q^2}{2g} (d_1^{-2} - d_2^{-2}) \right) \quad \text{p.e.v. breedte}$$

Lopende watersprong

Voortplantingssnelheid:

$$c = \sqrt{g \frac{d_1 + d_2}{2} \frac{d_2}{d_1}}$$

Idem, lage storing ($d_1 \approx d_2 = d$):

$$c = \sqrt{gd}$$

Overlaten

(1) Diepte op kruin d_k , specifieke energiehoopte op kruin E_k , afvoercoëfficiënt m .

Volkomen afvoer

$$q = m d_k \sqrt{gd_k} = m \frac{2}{3} E_k \sqrt{\frac{2}{3} g E_k}$$

afvoer te bepalen via één meting (bijv. d_k of E_k)

Onvolkomen afvoer

$$q = m d_k \sqrt{2g (E_k - d_k)}$$

afvoer te bepalen via twee metingen (bijv. d_k en E_k)

Weerstand omstroomd voorwerp

Stuwdruk, aanstroomsnelheid U :

$$\Delta p_d = \frac{1}{2} \rho U^2$$

Sleepkracht, aangestroomd oppervlak A :

$$F_w = c_w \frac{1}{2} \rho U^2 A$$

waarin c_w de weerstandscoefficiënt is. Voorbeeld bol:

$$Re < 1: \quad c_w = \frac{24\nu}{UD} = \frac{24}{Re}$$
$$10^3 < Re < 2 \times 10^5: \quad c_w \approx 0,4$$

Energiedissipatie omstroomd voorwerp:

$$\Delta P_{\text{diss}} = F_w U = c_w \frac{1}{2} \rho U^3 A$$

Wandwrijving eenparige stroom

Buisstroming

Diameter $D = 2r_0$, hydraulische straal $R = D/4$, ruwheid k , kinematische viscositeit ν , gemiddelde snelheid $U = Q/A$, wandschuifspanning τ_0 .

Algemeen

Evenwicht schuifkracht - netto drukkracht:

$$\tau_0 LP = \Delta p A = \rho g \Delta h A$$

zodat

$$\tau_0 = \frac{\rho g \Delta h A}{LP} = \rho g i_w R$$

Definitie weerstandsfactor:

$$\tau_0 = c_f \rho U^2 = \frac{f}{8} \rho U^2$$

geeft:

$$i_w = \frac{f}{8} \frac{U^2}{gR}$$

en

$$\Delta H_w = i_w L = f \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g} \quad (\text{Darcy-Weisbach})$$

waarin $f = f(Re, \frac{k}{D})$, zie diagram of onderstaande vergelijkingen

Poiseuille

$Re < \text{ca. } 2300$, laminair:

$$f = \frac{64}{Re}$$

waarin $Re = \rho U D / \eta = U D / \nu$

White-Colebrook

$Re > \text{ca. } 4000$, turbulent:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(0,27 \frac{k}{D} + \frac{2,5}{Re \sqrt{f}} \right) = 2 \log \frac{3,7D}{k(1 + 3,3/Re_*)} = 2 \log \frac{3,7D}{k + \delta/3,5}$$

waarin $\delta = 11,6\nu/u_*$, $Re_* = u_* k / \nu$ en $u_* = \sqrt{g R i_w} = \frac{1}{2} \sqrt{g D i_w}$.

Willekeurig dwarsprofiel

Doorstroomd oppervlak A , weerstand leverende omtrek P , schuifspanning, gemiddeld over P , is $\langle \tau_0 \rangle$, hydraulische straal $R = A/P$, turbulente hoofdstroom ($Re = UR/\nu > \text{ca. } 600$). Open waterlopen: $i_w = i_b$

Algemeen

Evenwicht schuifkracht - netto drukkracht (eenparige stroom):

$$\langle \tau_0 \rangle = c_f \rho U^2 = \rho u_*^2 = \rho g R i_w$$

$$U = \sqrt{g R i_w / c_f}$$

$$\Delta H_w = i_w L = c_f \frac{U^2}{gR} L$$

White-Colebrook

Gegeneraliseerde coëfficiënten voor willekeurige sprofielvorm:

$$\frac{U}{u_*} = \frac{U}{\sqrt{g R i_w}} = \frac{1}{\sqrt{c_f}} = 5,75 \log \frac{12R}{k(1 + 3,3/Re_*)} = 5,75 \log \frac{12R}{k + \delta/3,5}$$

waarin $\delta = 11,6\nu/u_*$, $Re_* = u_*k/\nu$ en $u_* = \sqrt{gRi_w}$.

Hydraulisch ruw:

$$\frac{U}{u_*} = \frac{U}{\sqrt{gRi_w}} = \frac{1}{\sqrt{c_f}} = 5,75 \log \frac{12R}{k} \approx 8,3 \left(\frac{R}{k} \right)^{1/6}$$

Verhanglijnen

Tweedimensionale stroom, breedte en diepte constant in dwarsprofiel

Eenparige stroom

Evenwichtsdiepte ($i_b = i_w$):

$$d_e = \left(\frac{c_f q^2}{i_b g} \right)^{1/3}$$

Grensdiepte: zie (1)

Bélanger

Algemeen:

$$\frac{dd}{ds} = \frac{i_b - i_w}{1 - Fr^2} = \frac{i_b - c_f Q^2 P / g A^3}{1 - \alpha Q^2 B / g A^3}$$

Tweedimensionale stroom (breedte en diepte constant in dwarsprofiel):

$$\frac{dd}{ds} = \frac{i_b - c_f q^2 / g d^3}{1 - \alpha q^2 / g d^3} = i_b \frac{d^3 - d_e^3}{d^3 - d_g^3} \quad (d \neq d_g \text{ en } i_b > 0)$$

Oplossingen

Kleine afwijkingen van de eenparige toestand:

$$\Delta d = \Delta d_0 \exp \left(\frac{s - s_0}{L} \right) \quad \text{waarin} \quad L = \frac{1 - i_b / c_f}{3i_b} d_e$$

Horizontale bodem:

$$\frac{1}{4} d^4 - d_g^3 d + c_f d_g^3 s = \text{constant}$$

Vraagstuk I

I.1 De vaten zijn groot ten op zichte van de pijp. Daarmee mag aangenomen worden dat de snelheid in de vaten gelijk is aan nul. Er treedt alleen uittreeverlies op. De energiehoogtes in Vat 1 en de pijp zijn gelijk. Het verschil in energiehoogte tussen Vat 1 en Vat 2 wordt gedissipeerd net na de uitstroom van de pijp in Vat 2. Het piëzometrisch niveau in de pijp is daarmee gelijk aan het piëzometrisch niveau in Vat 2: $h = 2.5\text{m}$. De stijghoogte in de buis representeert dit piëzometrisch niveau.

I.2 De snelheidshoogte in de pijp is het verschil tussen de waterstanden tussen Vat 1 en Vat 2. Daarmee volgt de snelheid: $u = \sqrt{2g\Delta h} = 3,13\text{m/s}$.

I.3 Stel een massabalans op voor de twee vaten: $\frac{dV_1}{dt} = -Q$ en $\frac{dV_2}{dt} = +Q$. Uitgaan van gelijke oppervlaktes geeft: $A_{vat}\frac{dh_1}{dt} = -Q$ en $A_{vat}\frac{dh_2}{dt} = +Q$. Het debiet wordt bepaald door het waterstandsverschil $Q = A_{pijp}\sqrt{2g(h_1 - h_2)}$. We kunnen daarmee de differentiaalvergelijking voor het waterstandsverschil bepalen door de massabalansen van elkaar af te trekken en de definitie voor het debiet in te vullen: $A_{vat}\frac{dh_1}{dt} - A_{vat}\frac{dh_2}{dt} = \frac{d\Delta h}{dt} = -2Q = -2A_{pijp}\sqrt{2g(h_1 - h_2)}$. Herschrijven geeft: $\frac{d\Delta h}{dt} = -2\frac{A_{pijp}}{A_{vat}}\sqrt{2g\Delta h}$. Om de tijdschaal te bepalen wordt de vergelijking herschreven tot: $\left(\frac{1}{\sqrt{\Delta h}}\right)d\Delta h = \left(-2\frac{A_{pijp}}{A_{vat}}\sqrt{2g}\right)dt$. Als we tijdstip t_2 definiëren als het tijdstip waarop de situatie in evenwicht is dan geeft integratie: $2(\sqrt{\Delta h_2} - \sqrt{\Delta h_1}) = \left(-2\frac{A_{pijp}}{A_{vat}}\sqrt{2g}\right)(t_2 - t_1)$. Uitgaande van $\Delta h_2 = 0$ en $\Delta t = t_2 - t_1$, volgt: $\Delta t = \frac{A_{vat}}{A_{pijp}}\frac{\sqrt{\Delta h_1}}{\sqrt{2g}}$. Check: tijd neemt toe voor groter initieel hoogteverschil, grotere vatdiameter en kleinere pijpdiameter.

I.4 In de eindsituatie zijn de waterstanden gelijk: $h_1 = h_2 = 2.75\text{m}$. Er is echter geen lucht ontsnapt uit de buis. Bovendien mag de lucht als onsamendrukbaar beschouwd worden. Daarmee is de waterstand in de buis onveranderd: $h_{buis} = 2.5\text{m}$. De luchtdruk moet daarmee het verschil in waterstand compenseren. De overdruk in de buis is daarmee: $\Delta p_{lucht} = \rho g \Delta h = 1000 * 9.8 * 0.25 = 2450\text{ Pa}$. Deze druk komt bovenop de atmosferische druk.

I.5 Een Venturimeter bestaat uit een versmalling van een pijp met een stijghoogtemeter voor de versmalling en ter plaatse van de versmalling. Door de versmalling zal de snelheid in de versmalling hoger zijn dan ervoor. Het verschil in piëzometrisch niveau, de diameters en de vergelijking voor energiebehoud geven vervolgens het debiet door de pijp.

Vraagstuk II

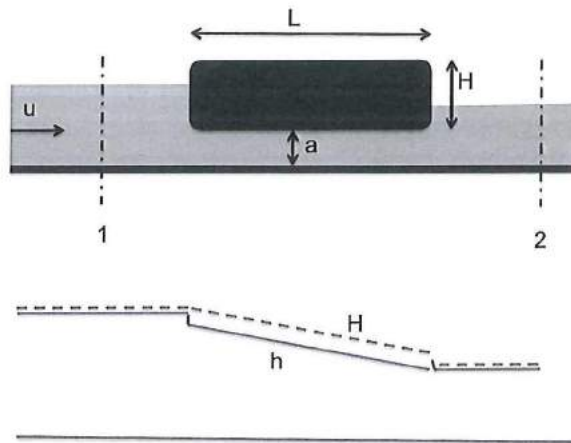
II.1 De massa van het ponton bedraagt 180.000 kg. Dit moet overeenkomen met de massa van het weggedrukte water. Het volume van het weggedrukte water is daarmee: $V = m/\rho_w = 180.000/1000 = 180\text{m}^3$. Het ponton ligt daarmee over een diepte van $V/(LB) = 180/(20 * 4) = 2,25\text{m}$ in het water. Bij een waterdiepte van 3m, volgt: $a = 3 - 2,25 = 0,75\text{m}$.

II.2 De druk net onder het ponton moet groot genoeg zijn om het ponton te dragen. De druk net onder het ponton bedraagt daarmee: $p = (mg)/(LB) = 22.050\text{Pa}$.

II.3 De bovenstroomse waterstand en snelheid zijn gegeven $d_1 = 3\text{m}$ en $u_1 = 0,35\text{m/s}$. Dit geeft een specifiek debiet van $q = 1,05\text{m}^2/\text{s}$. Om de doorgang te bepalen wordt gebruik gemaakt van energiebehoud tussen doorgang 1 en de doorgang onder het ponton: $H_1 = H_{\text{ponton}} = h_1 + \frac{u_1^2}{2g} = 3 + \frac{0,35^2}{2 * 9,8} = 3,006\text{m}$. Het piëzometrisch niveau aan de onderkant van het ponton is gelijk aan $h_{\text{ponton}} = a + \frac{p}{\rho g}$. De druk direct onder het ponton moet gelijk zijn aan $p = F/A = mg/(LB) = 22.050\text{Pa}$. De snelheidshoogte is gelijk aan $\frac{q^2}{a^2 2g}$. Daarmee is de energiehoopte onder het ponton gegeven door: $H_p = a + \frac{p}{\rho g} + \frac{q^2}{a^2 2g}$. Invullen van $a = 0,6\text{m}$ geeft $H_p = H_1$.

II.4 Om de krachten op het ponton te berekenen moet de waterstand benedenstrooms berekend worden. Aangezien energie wordt gedissipeerd achter het ponton, wordt een impulsbalans toegepast tussen de doorsnede net achter het ponton ($p+$) en doorsnede 2. De kracht per eenheid van breedte op doorsnede $p+$ is $\frac{1}{2}\rho g d_{p+}^2 + \rho a u_{p+}^2$. Let op: het water stroomt niet over de volle diepte, maar alleen over doorsnede a . De kracht per breedte in doorsnede 2 is gelijk aan: $\frac{1}{2}\rho g d_2^2 + \rho d_2 u_2^2$. Gelijkstellen geeft: $\frac{1}{2}\rho g (d_2^2 - d_{p+}^2) = \rho \left(a \frac{q^2}{a} - d_2 \frac{q^2}{d_2} \right)$. Het piëzometrisch niveau op $p+$ is gegeven door $d_{p+} = a + \frac{p}{\rho g} = 0,6 + 2,25 = 2,85\text{m}$. Het specifiek debiet is gegeven door $q = u_1 d_1 = 1,05\text{m}^2/\text{s}$. Invullen geeft: $d_2 = 2,90\text{m}$. De kracht op de het ponton wordt vervolgens bepaald worden door de impulsbalans tussen doorgang 1 en 2: $F_{\text{ponton}} = F_1 - F_2 = \frac{1}{2}\rho g (d_1^2 - d_2^2) + \rho q^2 \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) = 2,82\text{ kN}$.

II.5 Benedenstrooms is het piëzometrisch niveau bijna gelijk aan het energieniveau, aangezien de snelheid gering is. Net achter het ponton treedt energieverlies op vanwege de verwijding. Onder het ponton neemt het energieniveau af in stroomafwaartse richting vanwege bodemwrijving. De snelheid blijft uniform vanwege de gelijke doorstroomhoogte, daarmee loopt het piëzometrisch niveau parallel aan het energieniveau. Bovenstrooms van het ponton is het piëzometrisch niveau bijna gelijk aan het energie niveau, vanwege de relatief lage snelheid.

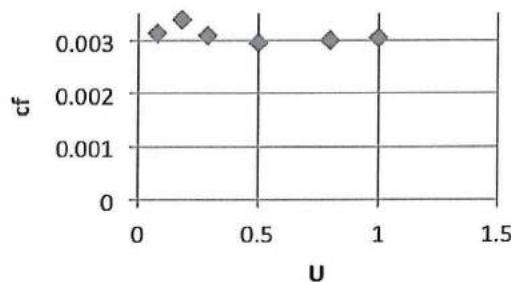


Vraagstuk III

III.1 De afhankelijkheid van de snelheid wordt bepaald door het al dan niet turbulent zijn van de stroming. Met een Reynoldsgetal van $Re = UL/\nu = 300.000$ mag geconcludeerd worden dat de stroming turbulent is zodat geldt: $F = A\tau = A\rho c_f U^2$.

III.2 De ruwheid van de wand is van invloed op de stroming zodra de ruwheidshoogte veel groter is dan de dikte van de viskeuze sub-laag. Deze laatste wordt beschreven met $\delta = 11,6\nu/u^*$. Omdat de gemeten kracht bekend is kunnen we de frictie-snelheid halen uit $F = \tau A = \rho(u^*)^2 A$, zodat volgt $u^* = 0,045$ m/s en $\delta = 0,26$ mm. De korrels moeten dus veel groter zijn dan deze waarde, zeg 2 mm. Om de effecten van de ruwheid goed te kunnen meten moet de grenslaag zich goed hebben kunnen ontwikkelen en daar is een grote lengte voor nodig waarover de ruwheid uniform is.

III.3 Omdat bij onderdeel 1 geconstateerd is dat de kracht evenredig is met U^2 is het handig om deze als functie van de kracht in een grafiek uit te zetten. De helling van de lijn waarop de punten zouden moeten liggen is dan gelijk aan $\frac{\Delta F}{\Delta U^2} = A\rho c_f$. Er kan ook een grafiek gemaakt worden waarin de voor iedere snelheid berekende waarde van c_f uitgezet wordt tegen de snelheid.



Hierin is te zien dat de waarde van c_f voor kleinere snelheden iets groter wordt en de curve wat onregelmatiger. Bij kleine snelheden zijn de krachten klein en dus moeilijker te meten. Bovendien komen we bij lage snelheden in de buurt van het hydraulisch gladde

regime waar de waarde van c_f toeneemt.

III.4 De schuifspanning kan ook gemeten worden door te kijken naar het weerstandsverhang. Dit verhang is immers in balans met de bodemschuifspanning: $\rho g h i_w = \tau$. Door het verticale profiel van de horizontale snelheid te meten en in een grafiek de snelheid uit te zetten tegen de logaritme van de afstand tot de bodem wordt een lijn gevonden waarvan de helling gelijk is aan u^*/κ . Hiermee is ook de schuifspanning bekend.

Vraagstuk IV

IV.1 De versnelling en vervolgens weer vertraging van het stromende water rondom de duiker zorgt voor een verlies aan energiehogte in benedenstroomse richting en een bijbehorende stijging van het piëzometrisch niveau in bovenstroomse richting. Het riviertje heeft een flauwe bodemhelling (want $i_b < c_f$). Deze lokale afwijking van de eenparige toestand zal zich dus in bovenstroomse richting manifesteren in de vorm van een stuwkromme. Benedenstrooms van de duiker zullen er geen veranderingen van de waterstand optreden.

IV.2 Benedenstrooms van de duiker heerst de *evenwichtsdiepte* $d_e = (c_f q^2 / i_b g)^{1/3}$ (flauwe bodemhelling, geen invloed benedenstroomse rvw). Het specifiek debiet $q = Q_0/B = 1,25 \text{ m}^2/\text{s}$. Met de gegeven waarden van c_f en i_b volgt nu $d_0 = d_e = 2,34 \text{ m}$.

IV.3 Gebruik de energievergelijking: $H_1 - \Delta H_w = H_0$, waarin H_1 de energiehogte is aan de bovenstroomse zijde van de duiker, H_0 die aan de benedenstroomse zijde en ΔH_w het weerstandsverlies gegeven door $\Delta H_w = c_{f,d} \frac{\ell}{R} \frac{U_d^2}{g}$. Het dwarsprofiel van de duiker heeft een oppervlak $A = bh = 4,5 \text{ m}^2$ en hydraulische straal $R = \frac{1}{2}A/(b+h) = 0,5 \text{ m}$. Met $k = 4 \text{ mm}$ volgt hieruit $c_{f,d} = 0,003$ (White-Colebrook). De stroomsnelheid U_d in de duiker bedraagt $U_d = Q_0/A = 5,56 \text{ m/s}$ zodat uiteindelijk een weerstandsverval ΔH_w van $0,75 \text{ m}$ resulteert. Met de lokale bodemhoogte als referentieniveau is de energiehogte H_0 gelijk aan $d_0 + U_0^2/2g = d_0 + Q_0^2/(2gd_0^3B^2) = 2,35 \text{ m}$ zodat $H_1 = H_0 + \Delta H_w = 3,10 \text{ m}$. Via $H_1 = d_1 + Q_0^2/(2gd_1^3B^2)$ volgt uiteindelijk een waterdiepte d_1 van $3,09 \text{ m}$. (Merk op dat in het riviertje de snelheidshogte verwaarloosbaar klein is ten opzichte van de waterdiepte, de benadering $d_{0,1} \approx H_{0,1}$ is eventueel gerechtvaardigd.)

IV.4 Oplossing verhanglijnvengelijking voor kleine afwijkingen van de eenparige toestand: $d(s) = d_e + (d(s_0) - d_e) \exp(-(s_0 - s)/L)$. Hierin is s_0 de positie van de randvoorwaarde (de duiker) en $s_0 - s = 7500 \text{ m}$. De aanpassingslengte L is gegeven door $L = (1/i_b - 1/c_f) d_e/3 = 15.377 \text{ m}$. Met $d(s_0) = d_1 = 3,09 \text{ m}$ en de eerder berekende waarde van $d_e (=d_0$ uit vraag IV.2) volgt nu $d(s) = 2,80 \text{ m}$.

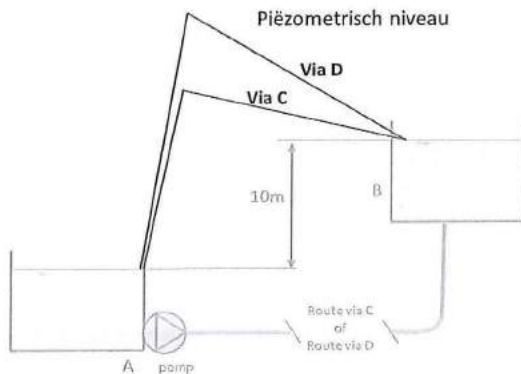
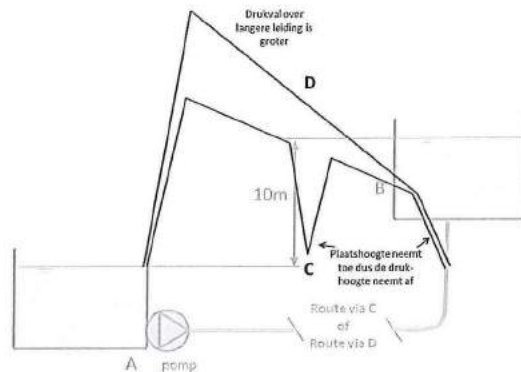
IV.5 Als de afvoer toeneemt neemt niet alleen het weerstandsverval over de duiker toe maar ook de benedenstroomse waterdiepte d_0 , deze is immers gelijk aan de evenwichtsdiepte welke ook afhankelijk is van het debiet. Toepassen van de energievergelijking geeft nu $d_1 + U_1^2/2g - c_{f,d} \frac{\ell}{R} \frac{U_d^2}{2g} = d_e + U_e^2/2g$. (Vanwege de eerder genoemde reden kunnen de termen met de snelheidshogte hierin verwaarloosd worden, maar voor de volledigheid zullen ze hier worden meegenomen.) Ga zelf na dat het rechterlid kan worden geschreven

als $d_e \left(1 + \frac{1}{2} \frac{i_b}{c_f}\right)$. Substitutie van $U_d = Q_1/A$ en de gebruikelijk uitdrukking voor d_e geeft $d_1 = c_{f,d} \frac{\ell}{R} \frac{Q_1^2}{2gA^2} + (c_f Q_1^2 / g B^2 i_b)^{1/3} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{i_b}{c_f}\right) - Q^2 / (2g B^2 d_1^2) = 4 \text{ m}$. Deze vergelijking voor Q_1 kan worden opgelost (grafische rekenmachine of iteratief) met als resultaat $Q_1 = 32,0 \text{ m}^3/\text{s}$. De bijbehorende waterdiepte $d_0 = d_e$ bedraagt dan 2,73 m. (Iteratief: reken eerst het debiet Q_1 uit voor $d_0 = d_e = 4 \text{ m}$. Bepaal nu, via de methode van vraag IV.3 de waterdiepte d_1 , deze is dan groter dan 4 m. Trek het verschil af van de beginschatting van d_e en herhaal de procedue, totdat het antwoord Q_1 niet meer noemenswaardig verandert.)

Vraagstuk V

V.1 De verliezen bestaan uit in- en uittree-verliezen en als gevolg van de leidingweerstand, eventueel ook in de pomp, maar daar zijn geen gegevens van. Het uittreeverlies bedraagt: $\Delta H_u = U^2/2g$, het intreeverlies is een deel daarvan afhankelijk van de contractie. Uit de gegevens is via $U = Q/A$ te halen dat $U = 3,18 \text{ m/s}$. Hiermee volgt voor het uittreeverlies $\Delta H_u = 0,52 \text{ m}$. Voor het weerstandsverlies geldt $\Delta H_w = f \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g}$, zodat met de gegevens voor het traject langs C geldt $\Delta H_{wC} = 25,8 \text{ m}$ en $\Delta H_{wD} = 51,6 \text{ m}$.

V.2 Zie figuur.



V.3 Door de hoge ligging is de druk in C laag en kan deze onder de atmosferische druk komen te liggen. Hierdoor kan de pijpleiding in elkaar gedrukt worden, of wanneer de onderdruk te groot wordt treedt er cavitatie op, dwz de vloeistof gaat over in dampvorm.

V.4 Voor het pompvermogen geldt: $P_p = \rho g \Delta H Q$. Nu moet ook het hoogteverschil tussen de reservoirs meegenomen worden zodat voor de route langs D geeft dit: $P_p = 61$ kW.

V.5 Het is het eenvoudigst om de diameter van de pijp te vergroten. Wanneer het debiet constant gehouden wordt neemt ook nog eens de snelheid af waardoor het verlies nog sterker afneemt. Het vermogen is evenredig met $1/D^5$, dus als de diameter met een factor 1,15 vergroot wordt kan bij gelijkblijvend debiet het vermogen gehalveerd worden.

Als alleen de snelheid verlaagd wordt neemt het debiet af en wordt er te weinig water geleverd.

Vraagstuk VI

VI.1 Een lange overlaat is lang genoeg om de stroomlijnen ter plaatse van de kruin een recht, horizontaal verloop te laten aannemen. De drukverdeling in het stromende water is ter plaatse van de kruin zodoende hydrostatisch. (Van deze eigenschap maken we dankbaar gebruik bij het toepassen van de energie- en impulsbalans in situaties met een lange overlaat.)

VI.2 Rehbock-stuw: volkomen overlaat, afvoer $q = m d_k \sqrt{g d_k}$. Invullen van $d_k = 8$ cm geeft $q = 0,074 \text{ m}^2/\text{s}$ en $Q = Bq = 0,026 \text{ m}^3/\text{s}$.

VI.3 De berekening verloopt in twee stappen: 1) bereken via de energievergelijking de waterdiepte d_0 benedenstrooms van de lange overlaat / bovenstrooms van de Rehbock-stuw; 2) bereken vervolgens via een impulsbalans de waterdiepte op de kruin van de lange overlaat. Eerste stap: specifieke energiehogte voor Rehbock-stuw: $E_0 = d_0 + u_0^2/2g = a_{\text{stuw}} + \frac{3}{2}d_k = 0,22 \text{ m}$. Uit deze vergelijking volgt $d_0 = 0,21 \text{ m}$. Stap twee: gebruik de balansvergelijking voor horizontale impuls om de diepte d_0 te relateren aan de diepte d_1 op de kruin van de lange overlaat: $f_0 = \frac{1}{2}\rho g d_0^2 + \rho q^2/d_0 = 250,0 \text{ N/m}$. Via $f_0 = \frac{1}{2}\rho g (d_1 + a_{\text{overlaat}})^2 + \rho q^2/d_1$ volgt tenslotte de waterdiepte $d_1 = 0,10 \text{ m}$ (grafische rekenmachine of iteratie).

VI.4 Bereken eerst de waterdiepte d_2 bovenstrooms van de lange overlaat via de energievergelijking: $H_2 = d_2 + \frac{1}{2}u_2^2/g = a_{\text{overlaat}} + d_1 + \frac{1}{2}u_1^2/g = 0,23 \text{ m}$. Met $u_{1,2} = q/d_{1,2}$ volgt hieruit $d_2 = 0,22 \text{ m}$. De horizontale kracht op de lange overlaat volgt nu uit de balans voor horizontale impuls tussen de doorgangen voor en achter de overlaat: $K_H = F_2 - F_0$, waarin $F_{0,2} = \rho B (\frac{1}{2}g d_{0,2}^2 + q^2/d_{0,2})$. Invullen van de eerder berekende waarden van d_0 en d_2 geeft uiteindelijk $K_H = 5,83 \text{ N}$.

VI.5 De waterdiepte na de sprong (d_3) volgt uit de stand van de overlaat: $d_3 + q^2/(2g d_3^2) = a_{\text{stuw}} + \frac{3}{2}d_k = 17 \text{ cm}$ (merk op dat de waterdiepte op de kruin van de Rehbock-stuw vanwege gelijkblijvend debiet niet verandert is). Hieruit volgt $d_3 = 0,16 \text{ m}$. De waterdiepte vóór de watersprong (d_4) is de geconjugeerde van d_3 , te berekenen uit een impulsverge-

lijking: $\frac{1}{2}gd_3^2 + q^2/d_3 = \frac{1}{2}d_4^2 + q^2/d_4$ (rechterlid na invulling van d_4 bekend, superkritische oplossing voor d_4 kiezen). Hieruit volgt $d_4 = 0,022$ m, en de spronghoogte $\Delta d = d_3 - d_4 = 0,14$ m.

VI.6 Vrije afstroming: de waterdiepte op de lange overlaat is gelijk aan de grensdiepte d_g . Deze is gelijk aan de eerder gegeven waarde voor de diepte op de kruin van de Rehbock-stuw (ga zelf na waarom): $d_g = 0,08$ m. Energiehoogte op de lange overlaat is nu $H = a_{\text{overlaat}} + \frac{3}{2}d_g = 0,22$ m (t.o.v. bodem goot). De waterdiepte voor de overlaat behorend bij deze energiehoogte bedraagt 0,21 m (zelfde antwoord als voor d_0 in tussenstap vraag VI.3).

Technische Universiteit Delft

Faculteit Civiele Techniek en Technische Aardwetenschappen

Sectie Vloeistofmechanica

Tentamen CTB2110 / CT2140

Vloeistofmechanica / Vloeistofmechanica 2

Woensdag 5 november 2014, 14:00 tot 17:00 uur

Bij de beoordeling van het examenwerk zal voornamelijk worden gelet op een goede systematische aanpak en een juiste toepassing van de theorie. Per deelvraag staat het maximum aantal te behalen punten vermeld. Indien bij de uitwerkingen aannames worden gedaan, dan moeten deze duidelijk worden vermeld. Geef waar nodig een beknopt commentaar en geef duidelijk aan waarom een bepaalde aanname toelaatbaar is.

Wanneer het antwoord op een subvraag in vervolgvragen nodig is, maar niet kan worden berekend, neem dan een plausibele waarde daarvoor aan in de beantwoording van de vervolgvragen.

Getalsmatige grootheden moeten van eenheden worden voorzien, in elk geval in de eindantwoorden en bij voorkeur ook in de tussenstappen.

Tijdens het tentamen mag alleen het formuleblad (wordt apart uitgedeeld) worden geraadpleegd.

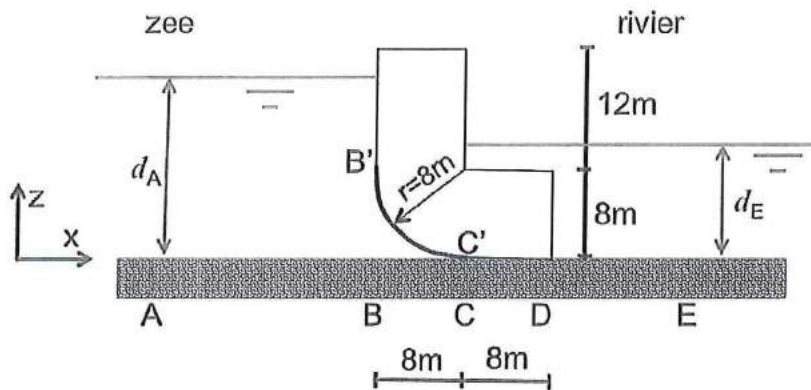
Tenzij anders gegeven geldt: massa dichtheid water $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, kinematische viscositeit water $\nu = 1.0 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, gravitatie $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

Gebruik bijgevoegd antwoordformulier.

**Vergeet niet je naam en studienummer in te vullen op het
antwoordformulier!**

Vraagstuk I (CTB2110)

De schuif van een stormvloedkering heeft een doorsnede zoals weergegeven in onderstaande figuur. Beschouw de situatie per eenheid van breedte.



In gesloten toestand staat de schuif op de horizontale bodem. De waterdiepte d_A aan de zeezijde (links) bedraagt daarbij 16 m en de diepte aan de rivierzijde d_E bedraagt 10 m.

I.1¹ Bereken de netto horizontale drukkracht van het water op de schuif p.e.v. breedte.

Deel $B' - C'$ van de schuif is de omtrek van een kwart cirkel met een straal r van 8 m.

I.2^{1.5} Bereken de grootte en de richting van de netto drukkracht van het water op $B' - C'$ p.e.v. breedte.

Na een storm neemt de waterstand aan de zeezijde af terwijl de waterstand op de rivier gelijk blijft. Zodra het waterstandsverschil dat toelaat wordt de schuif gedeeltelijk in verticale richting geopend totdat de opening $a_C (= a_D)$ onder de schuif 1 m bedraagt. In de ontstane situatie is de stationaire stroomsnelheid u_{CD} in de doorstroomopening tussen C en D gelijk aan 3 m/s.

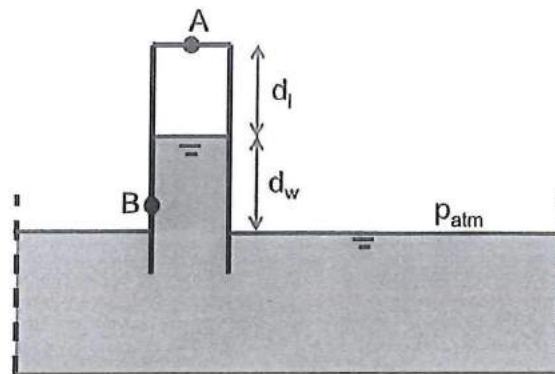
I.3¹ Schets het verloop van de snelheid u en van de versnelling a langs een willekeurige stroomlijn tussen de doorgangen A en D . De precieze waarden van de snelheden en versnellingen hoeven niet bepaald te worden.

I.4¹ Bereken voor de situatie met een gedeeltelijk geopende schuif de waterdiepte d_D juist benedenstrooms van doorgang D . (Gebruik verder $d_D = 9.25$ m als je het antwoord op deze vraag niet kunt berekenen.)

I.5^{1.5} Bereken de bijbehorende horizontale kracht van het stromende water op de schuif p.e.v. breedte. (Aanwijzing: bereken eerst de waterdiepte d_A .)

Vraagstuk II (CTB2110)

Beschouw een groot aquarium, gevuld met water (dichtheid: ρ_w). Een beker wordt omgekeerd in het aquarium gezet, waarbij een verschil ontstaat tussen de waterstand in de beker en de constante waterstand in het aquarium, zie tekening.



De dichtheid van lucht ρ_l bedraagt 1 kg/m^3 en lucht mag als onsamendrukbaar beschouwd worden. De atmosferische druk wordt gegeven door p_{atm} . De bodem van het bekeerglas heeft een oppervlak A_b .

II.1¹ Geef de uitdrukking voor de druk aan de binnenzijde van de bodem van het bekeerglas. Laat zien dat de bijdrage van het gewicht van de lucht verwaarloosd mag worden (gebruik deze aanname in het vervolg van deze vraag).

In de bodem van het bekeerglas (punt A) zit een ventiel. De opening van het ventiel heeft een netto doorstroomoppervlak $\mu A_v \ll A_b$.

II.2^{1,5} Leid af dat de stroomsnelheid van lucht in het openstaande ventiel gegeven is door:

$$u_{\text{ventiel}} = \sqrt{2g \frac{\rho_w}{\rho_l} d_w}$$

Het ventiel wordt op tijdstip $t = 0$ plotseling geopend.

II.3¹ Geef de uitdrukking voor de zaksnelheid van het waterniveau in het bekeerglas op tijdstip $t = 0$.

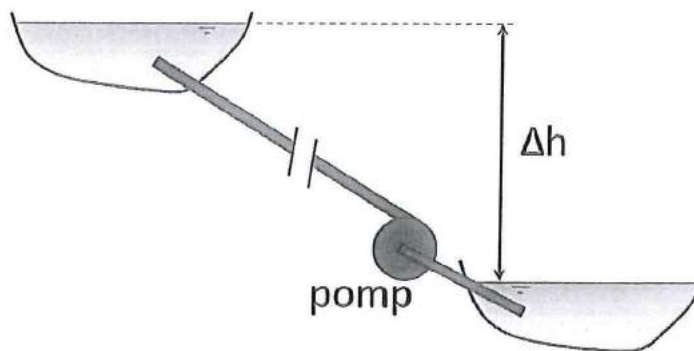
II.4^{1,5} Leid de differentiaalvergelijking af die de hoogte van de waterkolom d_w in het bekeerglas beschrijft als functie van de tijd t .

In plaats van een ventiel aan de bovenzijde in punt A te maken, wordt het ventiel in een punt B onder de waterspiegel in de zijwand van het bekeerglas aangebracht.

II.5¹ Beredeneer wat er zal gebeuren als het ventiel in B opengezet wordt.

Vraagstuk III (CTB2110 & CT2140)

Een opslagsysteem voor drinkwater bestaat uit twee reservoirs met een onderling hoogteverschil Δh waarbij water via een leiding met een constante diameter door middel van een pomp naar het hogergelegen reservoir verplaatst wordt. Zie onderstaande figuur.



Beschouw een situatie met een constant debiet in de leiding. Het energieverlies over de leiding is daarbij bepaald door de wandweerstand in de leiding en het uittreeverlies. Eventuele intree- en bochtverliezen kunnen in dit geval verwaarloosd worden.

III.1^{1.5} Maak een prinsipschets van het bijbehorend verloop van het piëzometrisch niveau h en de energiehogte H langs de leiding. Geef daarbij aan hoe de energiehogte samengesteld is en benoem de energieverliezen.

Het hoogteverschil Δh tussen de reservoirs bedraagt 200 m. De leiding heeft een lengte ℓ van 1000 m en een diameter D van 0.5 m. De gemiddelde stroomsnelheid U in de leiding bedraagt 2 m/s waarbij het weerstandsverhang i_w gelijk is aan 10^{-2} .

III.2^{1.5} Bereken het vermogen dat de pomp in deze situatie moet leveren.

III.3¹ Bepaal de grootte van de wandschuifspanning τ en de bijbehorende schuifspanningssnelheid u_* .

III.4¹ Bereken, onder de veronderstelling dat de wandstroming hydraulisch ruw is, de Nikuradse ruwheidshoogte k van de leidingwand.

III.5¹ Laat door middel van een berekening zien dat de veronderstelling van hydraulisch ruwe wandstroming inderdaad juist is.

6.

Vraagstuk IV (CTB2110 & CT2140)

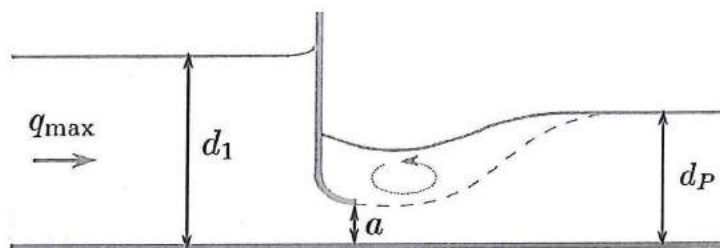
Een afwateringskanaal met rechthoekig dwarsprofiel en constante breedte ($R \approx d$) mondt uit in een groot meer met constant waterpeil. Het kanaal heeft een bodemverhang i_b van 5×10^{-4} en een weerstandscoefficiënt c_f van 3×10^{-3} . Het kanaal is zodanig ontworpen dat voor de ontwerpafvoer $q_{\max}$ de eenparige stroming een diepte heeft van 3.25 m.

IV.1¹ Hoe groot bedraagt de (specifieke) ontwerpafvoer $q_{\max}$? (Gebruik verder $q_{\max} = 5.5 \text{ m}^2/\text{s}$ als je het antwoord op deze vraag niet kunt berekenen.)

De waterdiepte d_0 in het kanaal ter plaatse van de aansluiting met het meer bedraagt 3.75 m.

IV.2^{1.5} Bereken voor de ontwerpafvoer de waterdiepte d_P in een punt P op 4 km afstand bovenstrooms van de monding. Ga uit van kleine afwijkingen van de eenparige toestand. (Gebruik verder $d_P = 3.50 \text{ m}$ als je het antwoord op deze vraag niet kunt berekenen.)

Om de waterstand in het kanaal te kunnen regelen legt men ter plaatse van P een onderspuier met verstelbare doorstroomhoogte a aan, zie onderstaande figuur.



IV.3¹ Beargumenteer in welk deel van het kanaal de waterstand wordt beïnvloed indien men in bovenstaande situatie de doorstroomhoogte een klein beetje laat variëren.

Voor een doorstroomhoogte a van 1.25 m is voor de ontwerpafvoer $q_{\max}$ het stroombeeld direct achter de onderspuier conform de weergave in bovenstaande figuur (zgn. 'verdrongen' watersprong).

IV.4^{1.5} Bereken voor deze situatie de diepte d_1 direct bovenstrooms van de onderspuier en geef aan welk type verhanglijn er bovenstrooms van de onderspuier aanwezig is.

Laat men bij gelijkblijvende afvoer de onderspuier verder zakken, dan zal voor een doorstroomhoogte $a \leq a'$ benedenstrooms van de onderspuier een vrijstaande watersprong optreden.

IV.5^{1.5} Bereken de doorstroomhoogte a' waarbij de vrijstaande watersprong zich tijdens het zakken van de onderspuier voor het eerst voordoet.

$$6\frac{1}{2}$$

$$11 + 12\frac{1}{2}$$

$$23.5$$

Vraagstuk V (CT2140)

Voor het aanleggen van bodembescherming worden stenen met een massadichtheid van $\rho_s = 2600 \text{ kg/m}^3$, in het water gegooid. De aannemer wil weten hoe snel de stenen naar de bodem zinken. Voor het gemak worden de stenen beschouwd als bollen met een diameter D van 0.3 m. Als waarde voor de weerstandscoefficiënt c_D kiest hij/zij 0.5 overeenkomend met de aanname van de bolvorm.

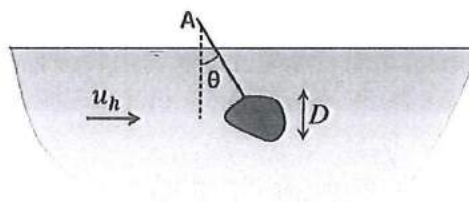
V.1¹ Hoe groot is de verticale kracht die een steen in het water ondervindt als gevolg van de zwaartekracht en de opwaartse kracht? (Als je het antwoord op deze vraag niet hebt kunnen vinden gebruik je verder een waarde van 200 N.)

V.2¹ Hoe groot is de stationaire valsnelheid w die de steen zal krijgen als de waterdiepte groot genoeg is?

V.3¹ Leg uit waarom onder condities vergelijkbaar met die van de vorige vraag de weerstandscoefficiënt c_D constant mag worden verondersteld.

De steen is hier beschouwd als bolvormig maar is in werkelijkheid onregelmatig van vorm. Hierdoor zal de weerstandscoefficiënt afwijken van die van een bol. **V.4^{0.5}** Beredeneer op welke manier de afwijking van de bolvorm leidt tot een andere waarde van de weerstandscoefficiënt c_D .

Om er achter te komen wat de werkelijke waarde is voor c_D , voert de aannemer een proef uit zoals geschetst in de figuur hieronder. De steen wordt in het punt A aan een flexibel touw opgehangen in water dat met een horizontale snelheid $u_h = 2.7 \text{ m/s}$ stroomt. De massa van het touw en de sleepkracht die op het touw wordt uitgeoefend kunnen daarbij worden verwaarloosd. Zodra de situatie stationair is blijkt het touw een hoek $\theta = 10^\circ$ te maken met de verticaal.

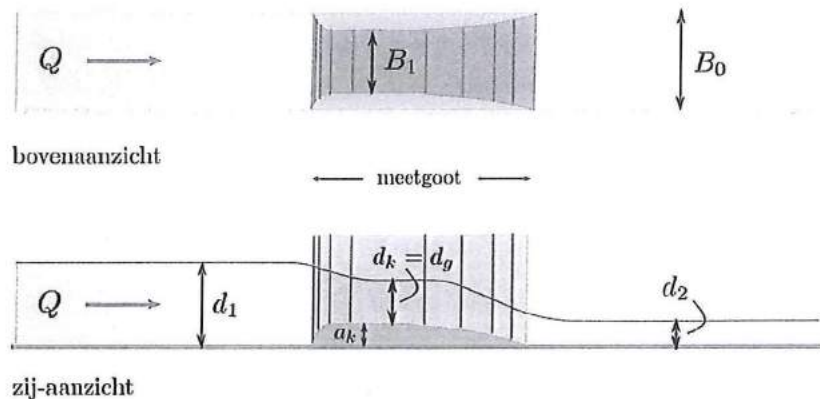


V.5^{1.5} Bereken de werkelijke waarde van de weerstandscoefficiënt c_D die uit de resultaten van deze proef kan worden berekend.

$$u \frac{1}{2}$$

Vraagstuk VI (CT2140)

In een kanaal met horizontale bodem, rechthoekig dwarsprofiel en constante breedte bevindt zich een zgn. meetgoot uitgevoerd als een lange overlaat met een versmalling. Dergelijke kunstwerken worden in de praktijk veelvuldig toegepast om afvoeren te meten. We beschouwen een situatie met vrije (ongestuwde) afstroming. In de meetgoot treedt daarbij de grensdiepte op, e.e.a. zoals weergegeven in onderstaande figuur.



VI.1¹ Leg uit waarom de waterstand benedenstrooms van de meetgoot in dit geval geen invloed heeft op de bovenstroomse waterstand.

Het kanaal heeft een breedte B_0 van 2.5 m. De breedte B_1 van de meetgoot bedraagt 1.5 m en de kruinhoogte a_k bedraagt 1.0 m. Men meet op de kruin van de meetgoot een waterdiepte d_k van 0.8 m. De afvoercoëfficiënt m is gelijk aan 1.

VI.2¹ Bereken het debiet Q in het kanaal. (Gebruik verder $Q = 4.76 \text{ m}^3/\text{s}$ als je het antwoord op deze vraag niet kunt berekenen.)

De meetgoot verloopt zowel aan de aanstroomzijde als aan het benedenstroomse uiteinde vloeiend om zodoende de optredende energieverliezen te minimaliseren.

VI.3^{1.5} Bereken de waterdiepte d_1 bovenstrooms en de waterdiepte d_2 benedenstrooms van de meetgoot in geval de energieverliezen in het geheel worden verwaarloosd. (Gebruik verder $d_1 = 2.16 \text{ m}$ en $d_2 = 0.31 \text{ m}$ als je het antwoord op deze vraag niet kunt berekenen.)

VI.4^{1.5} Bereken voor de situatie van vraag VI.3 de horizontale kracht K_H (N) die door het stromende water op de meetgoot wordt uitgeoefend.

Verwaarlozing van het energieverlies aan de voorzijde van de meetgoot (versnelling) zal in werkelijkheid een goede aanname zijn maar aan de achterzijde (vertraging) zal er wel degelijk energie gedissipeerd worden.

VI.5^{1.5} Laat met behulp van de bijbehorende energiekromme en impuls-kromme zien of daarbij de horizontale kracht K_H op de meetgoot toeneemt of juist afneemt ten opzichte van het eerder beschouwde geval zonder energiedissipatie.

Uitwerking

Vraagstuk I

I.1 Beschouw het horizontaal evenwicht p.e.v. breedte van de vloeistof tussen de doorgangen A en E: $F_{H,A} - F_{H,E} - K_H = 0$, hierin is K_H de door het water uitgeoefende horizontale kracht op de schuif en $F_{H,(A,E)}$ de hydrostatische drukkracht in de respectievelijke doorgangen. Gebruikmakend van $F_H = \frac{1}{2}\rho g d^2$ volgt nu $K_H = \frac{1}{2}\rho g (d_A^2 - d_E^2) = 765 \text{ kN/m}$.

I.2 Beschouw het evenwicht p.e.v. breedte van het vloeistofmootje $BC'B'$.

Horizontaal evenwicht: $\frac{1}{2}(p_B + p_{B'}) \times BB' - K_H = 0$, waarin K_H de horizontale component is van de door het water uitgeoefende drukkracht op $B'C'$. Met $p_B = \rho g d_A = 156.96 \text{ kPa}$, $p_{B'} = \rho g (d_A - r) = 78.48 \text{ kPa}$ en $BB' = 8 \text{ m}$ volgt hiervoor $K_H = 942 \text{ kN/m}$ (naar rechts).

Verticaal evenwicht: $p_{BC} \times BC - F_{zw} - K_V = 0$, waarin F_{zw} de zwaartekracht is op het vloeistofmootje en K_V de verticale component is van de door het water uitgeoefende drukkracht op $B'C'$. Via $p_{BC} = \rho g d_A = 156.96 \text{ kPa}$ (druk op de bodem links van de schuif) en $F_{zw} = \rho g (1 - \frac{1}{4}\pi) r^2 = 134.75 \text{ kN/m}$ en $BC = 8 \text{ m}$ volgt uiteindelijk: $K_V = 1121 \text{ kN/m}$ (opwaarts).

De totale kracht K op het beschouwde deel van de schuif wordt hiermee: $K = \sqrt{K_H^2 + K_V^2} = 1464 \text{ kN/m}$. De hoek θ van de werklijn van deze kracht met de horizontaal is gegeven door $\theta = \arctan(K_V/K_H) = 50^\circ$.

I.3 Zie onderstaande figuur.

I.4 Beschouw een impulsbalans (p.e.v. breedte) voor het balansgebied tussen doorgang E en de doorgang juist benedenstrooms van D. Uitgedrukt in de gevraagde waterdiepte d_D luidt deze (op een constance factor ρ na): $\frac{1}{2}g d_D^2 + q^2/a_{CD} = \frac{1}{2}g d_E^2 + q^2/d_E$, waarin $a_{CD} = 1 \text{ m}$ de doorstroomhoogte onder de schuif is en $q = a_{CD} u_{CD} = 3 \text{ m}^2/\text{s}$ het specifieke debiet. Uit de gegevens kan het rechterlid van deze balansvergelijking direct berekend worden ($490.5 \text{ m}^2 \cdot \text{m}/\text{s}^2$). Oplossen van de resulterende vergelijking voor d_D (één oplossing mogelijk) geeft uiteindelijk $d_D = 9.90 \text{ m}$.

I.5 De horizontale kracht K_H door het stromende water op de schuif uitgeoefend volgt uit de horizontale-impulsbalans voor het balansgebied tussen de doorgangen A en E. Per eenheid van breedte luidt deze: $\frac{1}{2}\rho g d_A^2 + \rho q^2/d_A - \frac{1}{2}\rho g d_E^2 - \rho q^2/d_E - K_H = 0$. De impulsoverdracht door doorgang E (je kunt ook doorgang D nemen) is bekend uit de vorige deelvraag. Voor het berekenen van de impulsoverdracht door doorgang A moet de waterdiepte d_A bekend zijn. Deze kan bepaald worden via de energievergelijking tussen doorgang A en doorgang D (over korte afstand versnellende stroming): $H_A = H_D \rightarrow d_A + q^2/(2g d_A^2) = d_D + q^2/(2g a_{CD}^2) = 10.37 \text{ m}$. Hieruit volgt (subkritische tak van de oplossing kiezen) $d_A = 10.36 \text{ m}$. Het bepalen van de horizontale kracht op schuif is nu verder een invuloefening waaruit volgt $K_H = 40.4 \text{ kN/m}$ (naar rechts).

Vraagstuk II

II.1 De druk in de beker ter hoogte van het waterniveau in het aquarium is gelijk aan de atmosferische druk p_{atm} (wet van Pascal). Beschouwing van het hydrostatisch evenwicht in het bekeerglas geeft nu (begin bovenin met rekenen): $p_A + \rho_l g d_l + \rho_w g d_w = p_{\text{atm}}$, oftewel $p_A = p_{\text{atm}} - \rho_w g d_w - \rho_l g d_l$. De laatste term in het rechterlid (t.g.v. het gewicht van de lucht in de beker) is verwaarloosbaar vanwege $\rho_l \ll \rho_w$ indien d_l en d_w van dezelfde grootte orde zijn.

II.2 Bij stroming door het ventiel zijn de stroomsnelheden op enige afstand hiervan verwaarloosbaar klein (voor de atmosfeer is dit evident, voor de lucht in de beker geldt dit vanwege $\mu A_v \ll A_b$). In dergelijke situaties geldt de wet van Torricelli: $u_{\text{ventiel}} = \sqrt{2g\Delta h}$, waarin Δh het verschil in piëzometrisch niveau is over de opening. In termen van het drukverschil over de opening Δp kunnen we dit herschrijven als $\Delta h = \Delta p / \rho_l g = (p_{\text{atm}} - p_A) / \rho_l g$. Gebruikmakend van de uitdrukking voor p_A uit de vorige deelvraag geldt $\Delta h = \rho_w / \rho_l d_w$ waaruit onmiddellijk de gegeven uitdrukking voor u_{ventiel} volgt.

II.3 De binnenkomende luchtstroom op tijdstip $t = 0$ heeft een debiet $Q_{\text{in}} = \mu A_v u_{\text{ventiel}} = \mu A_v \sqrt{2g \frac{\rho_w}{\rho_l} d_w} (t = 0)$. Uit een volumebalans volgt dat dit debiet gelijk is aan de zaksnelheid w van het vloeistofoppervlak maal de grootte van dit oppervlak: $Q = w A_b$. Voor de zaksnelheid volgt nu: $w(t = 0) = \frac{\mu A_v}{A_b} \sqrt{2g \frac{\rho_w}{\rho_l} d_w} (t = 0)$.

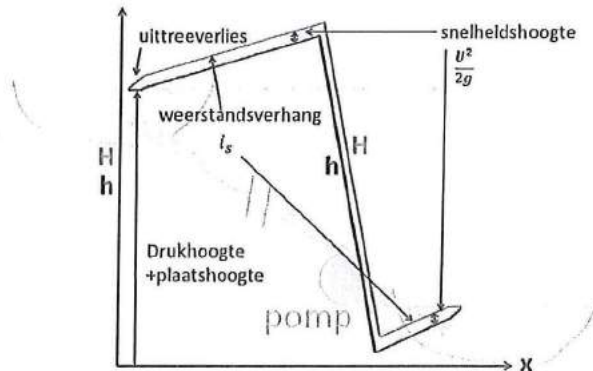
II.4 De vergelijking voor de zaksnelheid geldt feitelijk voor ieder tijdstip $t \geq 0$. Via $w = -dd_w/dt$ volgt hieruit een differentiaalvergelijking voor $d_w(t)$, gegeven door: $dd_w/dt = -\frac{\mu A_v}{A_b} \sqrt{2g \frac{\rho_w}{\rho_l} d_w}$.

II.5 De druk in de beker ter hoogte van B is lager dan de atmosferische druk. Uit de hydrostatische drukverdeling volgt: $p_B = p_{\text{atm}} - \rho_w g z_B$, waarin z_B de hoogte van punt B is t.o.v. het waterniveau in het aquarium. Na opening van het ventiel in B heerst er een drukverschil over het ventiel waarbij de druk aan de buitenkant ervan hoger is dan aan de binnenzijde in de beker. Hierdoor zal er lucht van buiten naar binnen gaan stromen.

Vraagstuk III

III.1 In de twee reservoirs staat het water stil en valt de energiehogte samen met het vrije oppervlak. In de leiding heerst een uniforme stroomsnelheid U , wat een bijdrage aan de energiehogte in de leiding levert van $U^2/2g$. Dit is tevens het uittreeverlies. Door de weerstand in de pijpleiding is er een verhang i_w . De pomp compenseert de verliezen en zorgt voor het benodigde opvoerhoogte om het water naar boven te laten stromen. Zie figuur.

III.2 De pomp moet een hoogteverschil $\Delta h = 200$ m overbruggen en energieverlies compenseren. Het energiehogteverlies in de leiding bedraagt $i_w L = 10^{-2} \times 1000 = 10$ m, het uittreeverlies is gelijk aan de snelheidshogte $U^2/2g = 0.20$ m. De opvoerhoogte van de pomp wordt hiermee $\Delta H_{\text{pomp}} = 210.2$ m. Voor het pompvermogen van de pomp geldt: $\Delta P_{\text{pomp}} = \rho g \Delta H_{\text{pomp}} Q$, waarbij $Q = \frac{1}{4} \pi D^2 U = 0.2 \text{ m}^3/\text{s}$. Met de gegeven grootheden



levert dit een vermogen op van 412 kW

III.3 Bij het gegeven weerstandsverhang is de wandschuifspanning te bepalen via $\tau_0 P = \rho g A i_w$ (evenwicht verhangkracht en weerstand), waaruit volgt $\tau_0 = \rho g R i_w = 12.3 \text{ N/m}^2$. Via de definitie van de schuifspanningssnelheid, $\tau_0 = \rho u_*^2$ volgt $u_* = 0.11 \text{ m/s}$.

III.4 De wandschuifspanning is gerelateerd aan de gemiddelde stroomsnelheid via $\tau_0 = \rho(f/8)U^2$, waaruit volgt dat in dit geval $f = 0.025$. In het hydraulisch ruwe regime is f gegeven door $1/\sqrt{f} = 2 \log(3.7D/k)$ (White-Colebrook) waaruit voor de eerder berekende waarde van f volgt dat $k = 1.3 \text{ mm}$.

III.5 Hydraulisch ruw wil zeggen dat de dikte van de laminaire sublaag δ verwaarloosbaar klein is t.o.v. de ruwheidshoogte k_N , oftewel $\delta \ll k$. De laminaire-sublaagdikte $\delta = 11.6\nu/u_* = 0.1 \text{ mm}$, dit is een factor 13 kleiner dan de gevonden ruwheidshoogte, waarmee voldaan is aan de eerder gestelde voorwaarde voor hydraulisch ruwe wandstroming.

Vraagstuk IV

IV.1 Uit de gegevens valt op te maken dat de evenwichtsdiepte (d_e) tijdens maatgevende afvoer gelijk is aan 3.25 m. Via $d_e^3 = (c_f/i_b) q_{\max}^2/g$ volgt $q_{\max} = 7.49 \text{ m}^2/\text{s}$.

IV.2 Oplossing verhanglijn voor kleine afwijkingen van de eenparige toestand geeft: $d_P = d_e + (d_0 - d_e) \exp((s_P - s_0)/L)$, waarin de 'aanpassingslengte' $L = d_e(1 - i_b/c_f)/(3i_b) = 1805 \text{ m}$. Met $s_P - s_0 = -4000 \text{ m}$ volgt $d_P = 3.25 \text{ m} + [0.50 \text{ m}] \times \exp([-4000 \text{ m}]/[1805 \text{ m}]) = 3.30 \text{ m}$.

IV.3 De stroming in de rivier en rondom de onderspuier is sub-kritisch. Dit betekent dat beïnvloeding van de waterstand alleen in bovenstroomse richting plaatsvindt. Een (kleine) variatie van de doorstroomhoogte ter plaatse van de onderspuier zal dus alleen in het bovenstrooms ervan gelegen kanaalpand merkbaar zijn. De diepte op enige afstand benedestrooms van de onderspuier is blijft daarbij bepaald door de randvoorwaarde ter plaatse van het meer. (Voor grote variaties van de doorstroomopening kan de stroming ter

plaatse van de onderspuier superkritisch worden, waarna bovenstaande redenering niet meer opgaat. Daarnaast heeft een variatie van de doorstroomhoogte effect op de waterdiepten onmiddellijk bovenstrooms (d_1) en benedenstrooms van de onderspuier (punt van maximum contractie), maar dit betreft uiteraard niet de verhanglijn).

IV.4 De berekening verloopt in twee stappen:

1. Bereken de waterdiepte ter plaatse van het maximum contractiepunt bij de onderspuier (d_a) via een impulsbalans tussen deze doorgang en de doorgang bij P . Uitwerken van $F_a = F_P$ geeft $\frac{1}{2}\rho g d_a^2 + \rho q_{\max}^2/a = \frac{1}{2}\rho g d_P^2 + \rho q_{\max}^2/d_P = 70.55 \text{ kN/m}$. Invullen van $q_{\max}$ en de gegeven waarde van a geeft $d_a = 2.29 \text{ m}$.
2. Pas vervolgens de energievergelijking (Bernoulli) toe tussen doorgang a en doorgang 1: $E_1 = E_a$ (horizontale bodem) geeft $d_1 + q_{\max}^2/(2gd_1^2) = d_a + q_{\max}^2/(2ga^2) = 4.12 \text{ m}$. Oplossen van de resulterende vergelijking geeft $d_1 = 3.93 \text{ m}$ (sub-kritische tak van de oplossing kiezen).

IV.5 Als er een watersprong optreedt is de waterdiepte net benedenstrooms van de onderspuier gelijk aan de doorstroomhoogte a . De watersprong treedt op zodra de waterdiepte a als geconjugeerde de waterdiepte d_P heeft. Dit geeft $F_{a'} = F_P$ oftewel $\frac{1}{2}\rho g (a')^2 + \rho q_{\max}^2/a' = 70.55 \text{ kN/m}$ (rechterlid volgt onmiddellijk uit vorige vraag), waarbij voor a' de superkritische tak van de oplossing moet worden gekozen. Oplossen van deze vergelijking geeft tenslotte $a' = 0.84 \text{ m}$.

Vraagstuk V

V.1 De resulterende verticale kracht is het verschil tussen de opwaartse kracht en de zwaartekracht: $F_{\text{res}} = F_{\text{zw}} - F_{\text{opw}} = (\rho_s - \rho_w) g V_{\text{bol}} = (\rho_s - \rho_w) g \frac{4}{3}\pi R^3 = 222 \text{ N}$.

V.2 Als de snelheid stationair is, is er een krachtenevenwicht tussen de eerder berekende netto zwaartekracht en de sleepkracht: $F_{\text{res}} = c_D \frac{1}{2}\rho_w w^2 A$, hierin is w de valsnelheid en $A = \pi R^2$ het aangestroomd oppervlak. Hieruit volgt $w = 3.5 \text{ m/s}$.

V.3 De weerstandscoefficiënt c_D hangt sterk af van het Reynoldsgetal wanneer deze klein is. In de huidige situatie is het Reynoldsgetal groot $\text{Re} = wD/\nu \approx 10^6$ en is de weerstandscoefficiënt nagenoeg constant.

V.4 Door de onregelmatige vorm zal de stroming bij de hoeken en randen gemakkelijker loslaten waardoor het zog vergroot. Dit leidt in de regel tot een hogere weerstand met bijbehorende grotere weerstandscoefficiënt.

V.5 De hoek die het touw met de verticaal maakt, wordt bepaald door de verhouding van de horizontale sleepkracht en de verticale netto zwaartekracht: $\tan \theta = F_{\text{res}} / \left(c_D \frac{1}{2}\rho_w U_h^2 A \right)$. Invullen van de gegeven waarde van θ en de eerder berekende waarde voor F_{res} en de gegeven snelheid U_h geeft dan $c_D = 0.15$.

Deze kleine waarde voldoet niet aan de verwachting zoals bij deelvraag V.4 benoemd.

Kennelijk is er bij deze meting iets bijzonders aan de hand. Dit kan het gevolg zijn van een meetfout of van een fysisch verschijnsel zoals het mogelijk optreden van het fenomeen 'drag crisis', wat bij de beschouwde Reynolds getallen niet uit te sluiten is.

Vraagstuk VI

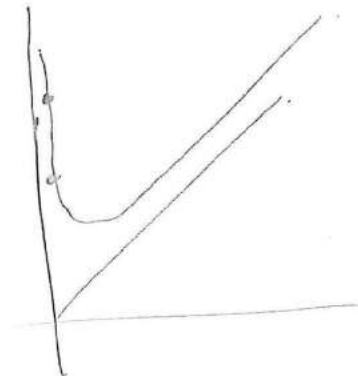
VI.1 Gegeven is dat in de meetgoot de grensdiepte optreedt, de stroming is daar dus kritisch. Storingen (van bijvoorbeeld de waterstand) planten zich dan met dezelfde snelheid voort als de stroomsnelheid en kunnen zich dus niet in bovenstroomse richting uitbreiden. Dit betekent dat een de waterstand bovenstrooms van de meetgoot niet beïnvloed wordt door de waterstand benedenstrooms ervan.

VI.2 Stroomsnelheid op de kruin volgt uit het gegeven dat de stroming er kritisch is: $U_k = \sqrt{gd_k} = 2.80 \text{ m/s}$. Voor het specifieke debiet op de kruin volgt nu $q_k = m d_k U_k = 2.24 \text{ m}^2/\text{s}$ en tenslotte voor het debiet $Q_k = q_k B_1 = 3.36 \text{ m}^3/\text{s}$. Dit is gelijk aan het debiet Q in het kanaal (continuïteit).

VI.3 Zowel in doorgang 1 als in doorgang 2 is de energiehogte gelijk aan de energiehogte ter plaatse van de kruin, met de bodemhoogte van het kanaal als referentie geeft dit: $H_1 = H_2 = H_k = a_k + \frac{3}{2}d_k = 2.2 \text{ m}$. De waterdiepten d_1 respectievelijk d_2 volgen nu uit oplossen van de energievergelijking $d_{1,2} + Q^2 / (2gB_0^2 d_{1,2}^2)$ waarbij voor d_1 de sub-kritische tak van de oplossing gekozen moet worden en voor d_2 de super-kritische tak. Dit geeft uiteindelijk $d_1 = 2.18 \text{ m}$ en $d_2 = 0.22 \text{ m}$.

VI.4 De horizontale kracht K_H op de meetgoot volgt uit een impulsbalans tussen de doorgangen 1 en 2: $K_H = \frac{1}{2}\rho g B_0 (d_1^2 - d_2^2) + \rho Q (U_1 - U_2)$ waarin $U_{1,2} = Q / (B_0 d_{1,2})$. Invullen van d_1 en d_2 geeft: $K_H = 38.84 \text{ kN}$.

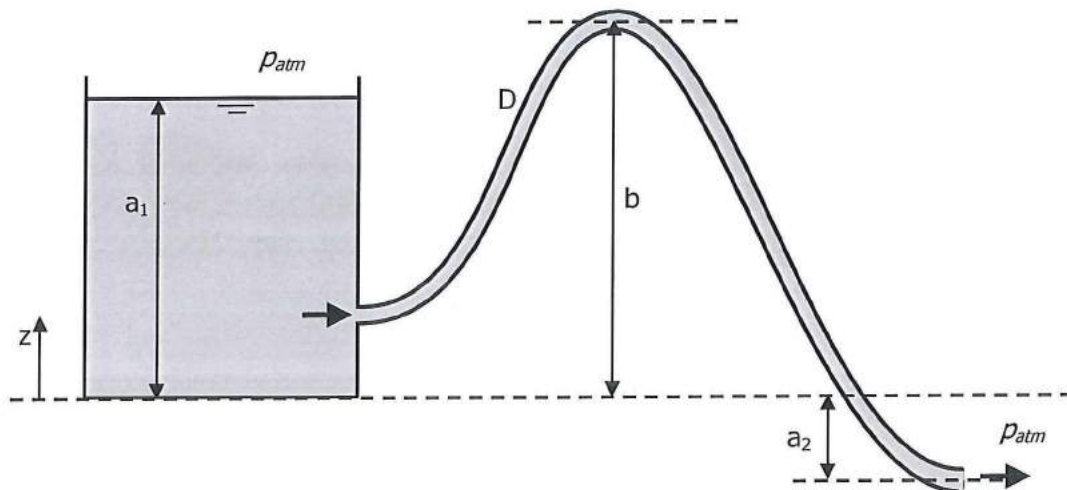
VI.5 Indien er aan de achterzijde wel dissipatie optreedt (tussen de kruin en doorgang 2) dan zal de waterdiepte d_2 groter zijn dan de eerder berekende waarde zonder energiedissipatie. Immers, de stroming in doorgang 2 is super-kritisch en in dat geval betekent een afname van de specifieke energiehogte een toename van de diepte (zie energiekromme). Een toename van de diepte betekent in het super-kritische regime echter een afname van de impulsoverdracht (zie impuls-kromme). Alles natuurlijk onder de voorwaarde dat het debiet gelijk blijft. Het verschil tussen F_1 en F_2 wordt dus groter hetgeen een toename van de horizontale kracht op de meetgoot betekent.



Tentamen januari 2014

Vraagstuk I (CT1140)

Uit een reservoir met een constant waterniveau wordt, na korte aanzuiging, via een hevel water afgevoerd (Figuur 1). Het water stroomt aan het uiteinde van de hevel vrij uit. De diameter van de hevel, D , is constant. Neem aan dat a_1 en a_2 bekend zijn.



Figuur 1

Je mag, in eerste instantie, energieverliezen in de leiding verwaarlozen.

- I.1¹ Geef de uitdrukking voor de snelheidshoogte in de leiding, als functie van a_1 en a_2 .
- I.2¹ Schets op het antwoordblad het verloop van de gewogen energiehogte $\langle H \rangle$ en het verloop van het piëzometrisch niveau h . Geef de snelheidshoogte zoals bepaald onder I.1 duidelijk in de schets aan.

Cavitatie in een leiding treedt op als de druk in de vloeistof lager wordt dan de dampdruk van de vloeistof.

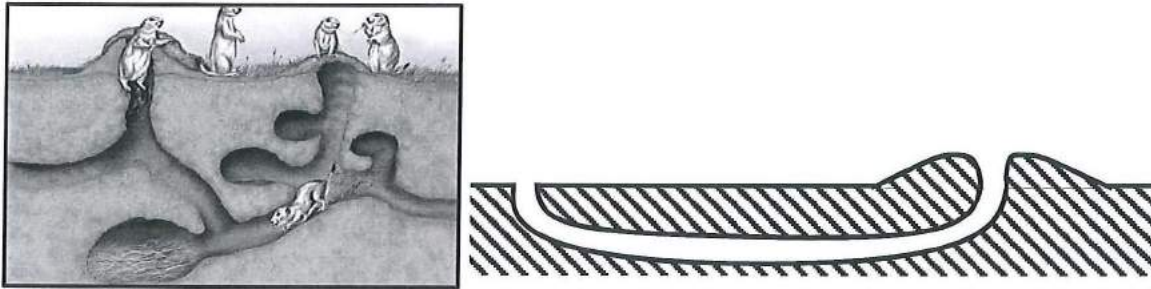
- I.3¹ Bepaal de maximale hoogte b (als functie van a_1 en a_2) waarbij er net geen cavitatie optreedt. Neem hierbij aan dat de dampdruk gelijk is aan 0 kPa en de atmosferische druk gelijk aan 100 kPa.

Neem nu aan dat er een verlies ΔH_{intree} optreedt bij het intreepunt van de leiding. De contractiecoëfficiënt is gelijk aan 0.5. Overige energieverliezen mag je verwaarlozen.

- I.4¹ Geef de uitdrukking voor de snelheidshoogte in de leiding, en geef de uitdrukking voor het intreeverlies ΔH_{intree} , beide als functie van a_1 en a_2 .
- I.5¹ Schets nu voor de situatie met dit intreeverlies het verloop van de gewogen energiehogte $\langle H \rangle$. Schets ook het verloop van het piëzometrisch niveau h . Geef in de schets ook duidelijk het intreeverlies en de snelheidshoogte aan.

Vraagstuk II (CT1140)

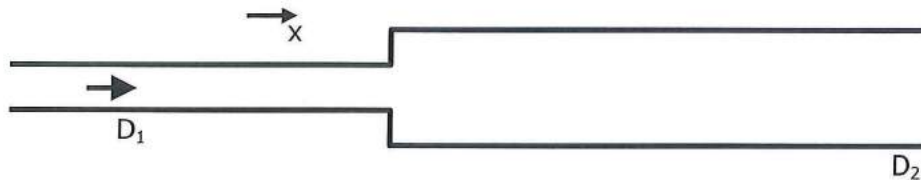
- II.1¹ Leg uit hoe prairiehonden als het waait 'gebruik maken' van de Wet van Bernoulli om hun hol te luchten. Leg dit uit aan de hand van een drukverschil, en geef in de situatieschets duidelijk aan in welke richting de lucht stroomt.



Figuur 2a

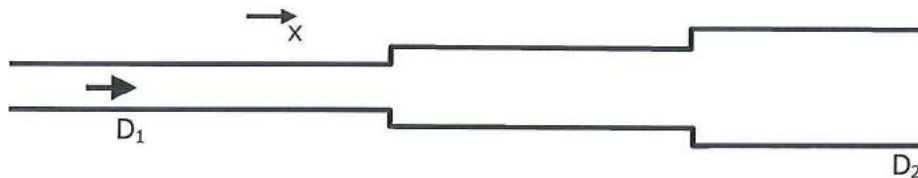
We beschouwen nu een heel ander probleem. Water stroomt door een verbindingsstuk tussen 2 leidingen met verschillende diameter, D_1 en D_2 (Figuur 2b). Leidingdiameter D_2 is twee keer zo groot als D_1 ($D_1 = \frac{1}{2} D_2$). Je mag energieverlies ten gevolge van wrijving verwaarlozen.

- II.2¹ Bepaal de uitdrukking voor het vertragsverlies ten gevolge van de verwijding van het profiel, als functie van het debiet door de leiding Q en leidingdiameter D_2 .



Figuur 2b

Het verbindingsstuk in de leiding wordt vervangen door een ander verbindingsstuk waar dezelfde vergroting van de diameter plaatsvindt, maar nu in twee gelijke stappen (Figuur 2c). D_1 en D_2 zijn gelijk aan die bij vraag II.2.

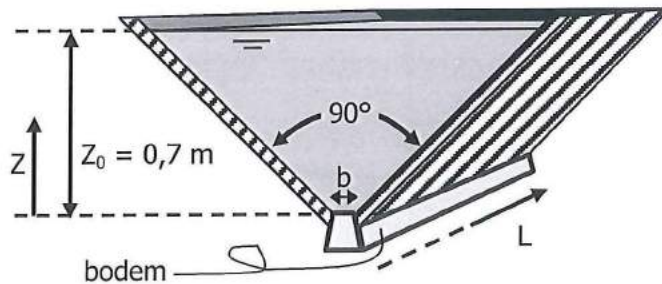


Figuur 2c

- II.3¹ Bepaal opnieuw de uitdrukking voor het vertragsverlies ten gevolge van de verwijding van het profiel, als functie van het debiet Q en leidingdiameter D_2 .
- II.4¹ Verklaar het verschil tussen de uitkomsten voor het vertragsverlies onder II.2 en II.3.

Vraagstuk III (CT1140, CTB2110, combinatie tentamen)

Een houten watertrog met een driehoekige doorsnede en een lengte L ($L = 1.5$ m) wordt gevormd door twee planken (zie Figuur 3 voor een dwarsdoorsnede van de trog). Aan de onderzijde bevindt zich over de gehele lengte L een opening b van 10 cm. Initieel is de trog afgesloten aan de onderzijde en is de waterdiepte gelijk aan 70 cm.



Figuur 3 Dwarsdoorsnede trog

- III.1¹ Bepaal de druk op de bodem. Teken het verloop van de druk langs de linkerwand. Bepaal de grootte en richting van zowel de horizontale als de verticale en de totale kracht die het water op de linkerwand uitoefent.

De bodem aan de onderzijde van de trog wordt nu verwijderd. De contractiecoëfficiënt bedraagt 0,6.

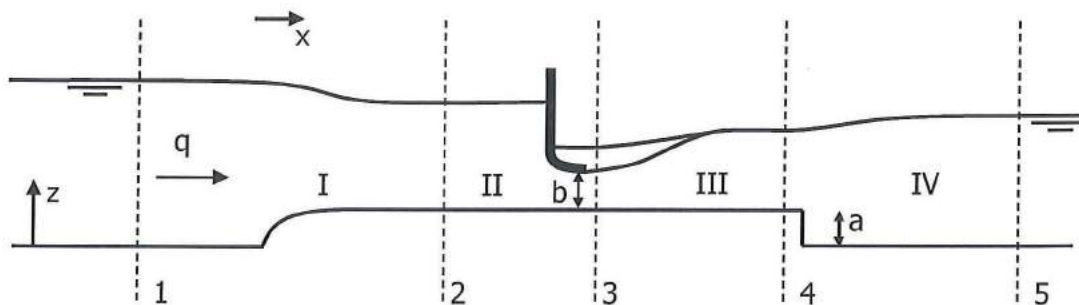
- III.2¹ Stel de volumebalans op voor de trog.

- III.3¹ Bepaal de uitdrukking voor het debiet, als functie van de variërende waterdiepte Z in de trog. Bepaal ook de uitdrukking voor het oppervlak van de waterspiegel A_0 , als functie van de variërende waterdiepte Z in de trog.

- III.4¹ Hoe lang duurt het voordat de waterdiepte in de trog is afgenomen tot 20 cm?

Vraagstuk IV (CT1140, CTB2110, combinatie tentamen)

In een irrigatiekanaal met constante breedte bevindt zich een regelwerk bestaande uit een lange overlaat en een in hoogte verstelbare afgeronde schuif (Figuur 4). Rondom het regelwerk is een aantal doorgangen 1 t/m 5 en bijbehorende balansgebieden I t/m IV gedefinieerd. In doorgangen 1 t/m 5 zijn de stroomlijnen parallel. De situatie is stationair en je mag energieverlies ten gevolge van wrijving verwaarlozen.



Figuur 4

- IV.1¹ Geef aan over welk balansgebied de energiehogte constant is:
- in balansgebied I,
 - in balansgebied II,
 - in balansgebied III,
 - in balansgebied IV?
- IV.2¹ Geef aan voor welk balansgebied het impulstransport door de doorgangen constant is:
- in balansgebied I,
 - in balansgebied II,
 - in balansgebied III,
 - in balansgebied IV?
- IV.3¹ Waarom kan vlak achter de overlaat de verticale drukverdeling, bij goede benadering, hydrostatisch worden verondersteld?
- De hoogte van de overlaat a bedraagt 0,5 m en de doorstroomhoogte onder de schuif b bedraagt 0,4 m. De waterdiepte d_4 in doorgang 4 is 1,0 m. Het specifieke debiet q bedraagt 1 m²/s.
- IV.4¹ Bereken de waterdiepte d_3 in doorgang 3.
- IV.5¹ Bereken de energiehogten H_1 en H_2 in de respectievelijke doorgangen 1 en 2.
- IV.6¹ Geef de uitdrukking voor de horizontale kracht per eenheid van breedte die het stromende water op de schuif uitoefent. Je mag hierin de waterdiepte in doorgang 2, d_2 , als onbekende laten staan. Geef wel aan met welke vergelijking je waterdiepte d_2 zou kunnen oplossen.

Vraagstuk V (CT2140, CTB2110 en combinatie tentamen)

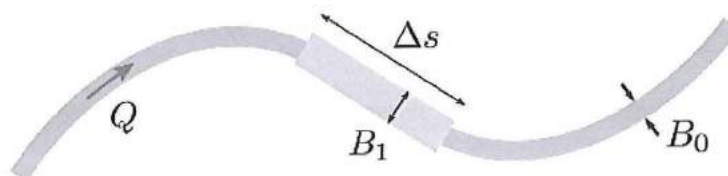
Een rivier zorgt regelmatig voor wateroverlast (tijdens perioden met hoge rivierafvoer). Om dit te bestuderen schematiseren we de rivier als een waterloop met een constante breedte B_0 van 500 m, een constant bodemverhang i_b van 8×10^{-5} en weerstandscoefficiënt c_f van 0,003. Zie onderstaande figuur.



Wateroverlast treedt op bij een rivierafvoer Q van $3.500 \text{ m}^3/\text{s}$.

- V.1¹ Hoe groot bedraagt bij deze afvoer de waterdiepte indien wordt uitgegaan van eenparige stroming?
- V.2¹ Hoeveel bedraagt in deze eenparige stroming de energiedissipatie over een riviertraject met een lengte van 10 km?

Men wil de wateroverlast lokaal tegengaan door het dwarsprofiel van de rivier over een lengte Δs (orde grootte enkele km) te verbreden naar een breedte B_1 van 650 m. De plaats van deze verbreding is zodanig dat de invloed van eventuele verder benedenstrooms gelegen randvoorwaarden geen rol speelt. Zie figuur.



- V.3¹ Maak een schets van het waterstandsverloop langs de verbreding en tot enige afstand bovenstrooms ervan. Geef hierin ook de grens- en evenwichtsdiepten aan, voorzien van de bijbehorende getalswaarden.

Het verbrede traject heeft een lengte Δs van 10 km.

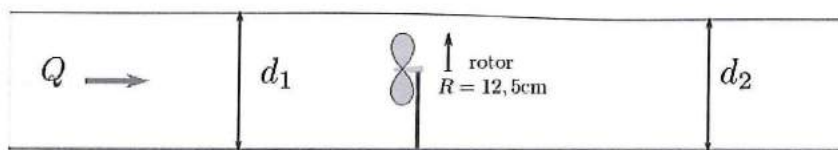
- V.4^{1,5} Bereken de maximale diepteverandering die binnen dit traject optreedt.
- V.5^{1,5} Hoe lang is het deel van dit traject waar de diepteverandering ten opzichte van de situatie zonder verbreding in absolute zin 0,25 m of meer bedraagt?

Vraagstuk VI (CT2140, CTB2110 & combinatietentamen)

Een nieuwe ontwikkeling betreft zgn. onderwatermolens. Dit zijn rotors die onder water worden geplaatst en door het langsstromende water in beweging worden gebracht waardoor energie wordt opgewekt, e.e.a. vergelijkbaar met windmolens.

VI.1¹ Op welk principe berust de werking van deze molens?

Men overweegt ergens in Nederland deze molens te plaatsen en laat d.m.v. laboratoriumexperimenten het netto vermogen ervan bepalen. Daartoe wordt een schaalmodel van de molen in een stroomgoot geplaatst, zie onderstaande figuur.



De stroomgoot heeft een breedte B van 150 cm. Het debiet Q bedraagt 650 l/s. Op ruime afstand bovenstrooms en benedenstrooms van de molen meet men waterdiepten van resp. $d_1 = 40,3$ cm en $d_2 = 39,9$ cm. De optredende weerstandsverliezen zijn uitsluitend het gevolg van de rotor van de molen.

VI.2¹ Bereken het door de rotor aan het stromende water onttrokken vermogen.

De rotor heeft een straal R van 12,5 cm en derhalve een aangestroomd oppervlak $A = \pi R^2$ van 500 cm².

VI.3^{1,5} Bereken de (dimensieloze) coëfficiënt c_W op basis waarvan het vermogen van de rotor kan worden berekend uit het aangestroomd oppervlak A , de dichtheid van water ρ en de ongestoorde aanstroomsnelheid U_1 .

Via een op de molen aangesloten dynamo meet men een netto geleverd elektrisch vermogen ΔP_{netto} van 14 W.

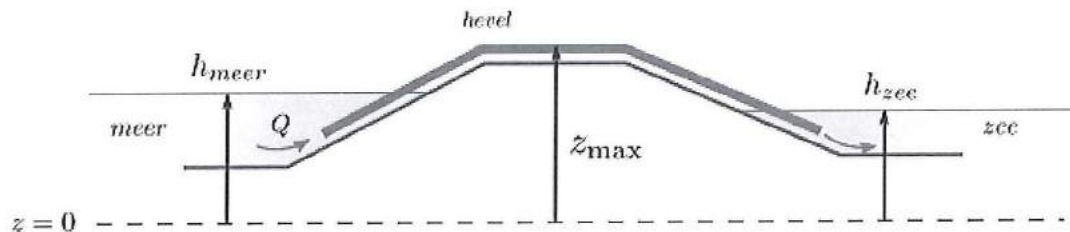
VI.4¹ Bereken het netto rendement η van de molen.

De proefondervindelijk verkregen gegevens worden nu gebruikt om het vermogen van een molen op werkelijke schaal te bepalen. Daartoe gaat men uit van gelijkvormigheid, d.w.z. de in het experiment vastgestelde dimensieloze coëfficiënten c_W en η gelden ook in de werkelijke situatie.

VI.5^{1,5} Bereken het netto geleverde vermogen voor een onderwatermolen met een rotorstraal R van 8 m in een gebied met een ongestoorde snelheid U van 1,35 m/s.

Vraagstuk VII (CT2140)

Een meer loost via een over een dam aangelegde hevel overtollig water op zee, zie onderstaande figuur.



VII.1¹ Wat is het voornaamste kenmerk van een hevel en op welk principe berust de werking ervan?

In de gegeven situatie bedragen de waterniveaus h_{meer} en h_{zee} respectievelijk 3,45 m en 2,45 m t.o.v. het gekozen referentieniveau. De hevelleiding heeft een totale lengte L van 250 m, een diameter D van 0,85 m en een ruwheids-hoogte k_N van 1 mm (hydraulisch ruw). De instroom- en bochtverliezen zijn in dit geval verwaarloosbaar klein.

VII.2¹ Hoe groot is het debiet Q dat in deze situatie onder vrij verval wordt afgevoerd?

VII.3¹ Is de stroming in de leiding hier turbulent of laminair? Motiveer je antwoord met een korte berekening.

Het hoogste punt van de hevelleiding bevindt zich precies halverwege de leiding en heeft een hoogte z_{max} van 6 m t.o.v. het gekozen referentieniveau. Zie figuur.

VII.4^{1,5} Bereken de drukhoogte in dit punt.

Door klimaatverandering neemt het te lozen debiet toe met 25% terwijl het waterniveau op zee stijgt naar 2,75 m. Om deze situatie het hoofd te kunnen bieden besluit men een pomp met een netto vermogen ΔP_{pomp} van 6,5 kW op de hevelleiding aan te sluiten.

VII.5^{1,5} Ga via een berekening na of door installatie van deze pomp aan de toekomstige eis m.b.t. het te lozen debiet kan worden voldaan.

Vraagstuk VIII (CT2140)

In een horizontale stroomgoot bevindt zich plaatselijk een vernauwing met gestroomlijnde aanstroomzijden. De benedenstroomse waterstand wordt geregeld met een in hoogte verstelbare korte overlaat aan het uitstroomeinde. De stroming is stationair. Zie onderstaande figuur.

De goot heeft een breedte B_0 van 30 cm. De korte overlaat heeft een afvoercoëfficiënt m van 1 en de kruinhoogte is 14 cm. De diepte op de kruin van de overlaat bedraagt 12 cm.

VIII.1¹ Bereken het debiet Q in de goot en de waterdiepte d_0 op korte afstand bovenstrooms van de overlaat (alwaar horizontale stroomlijnen).

Ter plaatse van de vernauwing is de doorstroombreedte B_1 gelijk aan 15 cm.

VIII.2^{1,5} Bereken de waterdiepte d_1 ter plaatse van de vernauwing.

Men laat nu de schuif zakken waarbij het debiet Q in de goot constant blijft. Op een bepaald moment de stroming ter plaatse van de vernauwing kritisch.

VIII.3¹ Hoe groot is daarbij de waterdiepte d_2 bovenstrooms van de vernauwing?

VIII.4^{1,5} Hoe groot bedraagt op dat moment de kruinhoogte a_k van de overlaat? (Aanwijzing: > BA

Vraagstuk I

I.1

Er wordt gevraagd naar het uitdrukken van de snelheidshoogte, $\frac{U^2}{2g}$, in a_1 en a_2 :

$$\langle H \rangle_{res} = \langle H \rangle_{uitstroom}$$

waarin

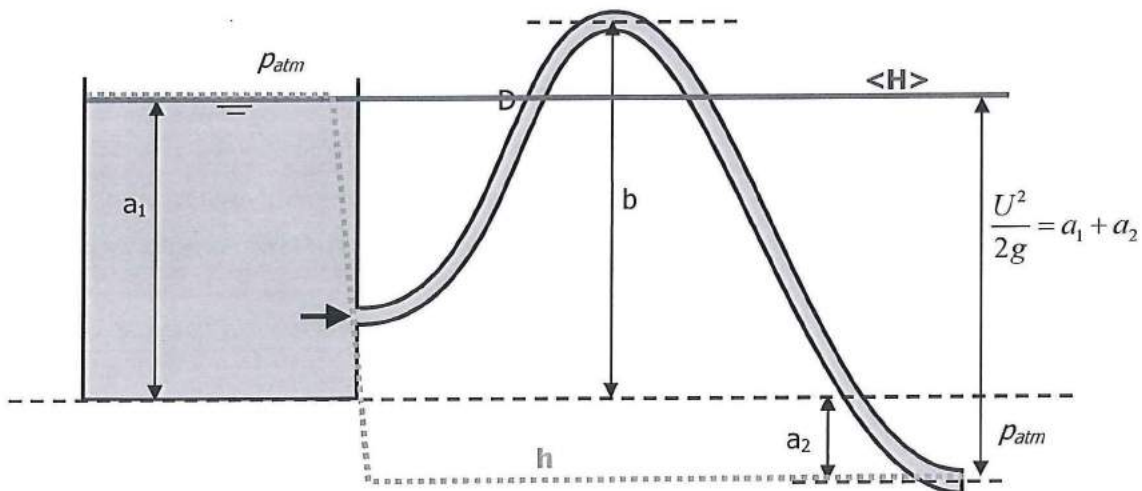
$$\langle H \rangle_{res} = a_1 \quad (\text{tov bodem reservoir})$$

$$\langle H \rangle_{uitstroom} = -a_2 + \frac{U^2}{2g}$$

Invullen levert

$$\langle H \rangle_{res} = \langle H \rangle_{uitstroom} \Leftrightarrow a_1 = -a_2 + \frac{U^2}{2g} \rightarrow \boxed{\frac{U^2}{2g} = a_1 + a_2}$$

I.2



I.3

Cavitatie is de situatie dat de lokale druk onder de dampdruk daalt. De vloeistof begint dan te koken. Deze situatie moet voorkomen worden aangezien het schade veroorzaakt aan de leiding.

De stroomsnelheid in de leiding is overal constant aangezien het debiet en de diameter constant zijn. We passen Bernoulli toe tussen het reservoir en het hoogste punt van de leiding.

Bernoulli:

$$\langle H \rangle_b = \langle H \rangle_{\text{res}}$$

waarin

$$\langle H \rangle_{\text{res}} = a_1$$

$$\langle H \rangle_b = b + \frac{p_b'}{\rho g} + \frac{U^2}{2g}$$

$$p_b' = p_b - p_{\text{atm}}$$

$$p_b = p_{\text{dampdruk}} = 0 \text{ kPa}$$

$$p_{\text{atm}} = 100 \text{ kPa}$$

$$\frac{U^2}{2g} = a_1 + a_2 \quad (\text{zie vorige deelvraag})$$

Dit alles invullen in $\langle H \rangle_b = \langle H \rangle_{\text{res}}$ levert:

$$a_1 = b + \frac{p_{\text{dampdruk}} - p_{\text{atm}}}{\rho g} + a_1 + a_2$$

$$b = -\frac{0 \text{ kPa} - 100 \text{ kPa}}{\rho g} - a_2 = 10 \text{ m} - a_2$$

I.4

$$\langle H \rangle_{\text{res}} = \Delta H_{\text{intree}} + \langle H \rangle_{\text{uitstroom}}$$

waarin

$$\langle H \rangle_{\text{res}} = a_1$$

$$\langle H \rangle_{\text{uitstroom}} = -a_2 + \frac{U^2}{2g}$$

$$\Delta H_{\text{intree}} = \frac{(U_{\text{mc}} - U)^2}{2g} = \frac{\left(\frac{Q}{\mu A_{\text{leiding}}} - U\right)^2}{2g} = \frac{U^2 \left(\frac{1}{\mu} - 1\right)^2}{2g} = \frac{U^2}{2g}$$

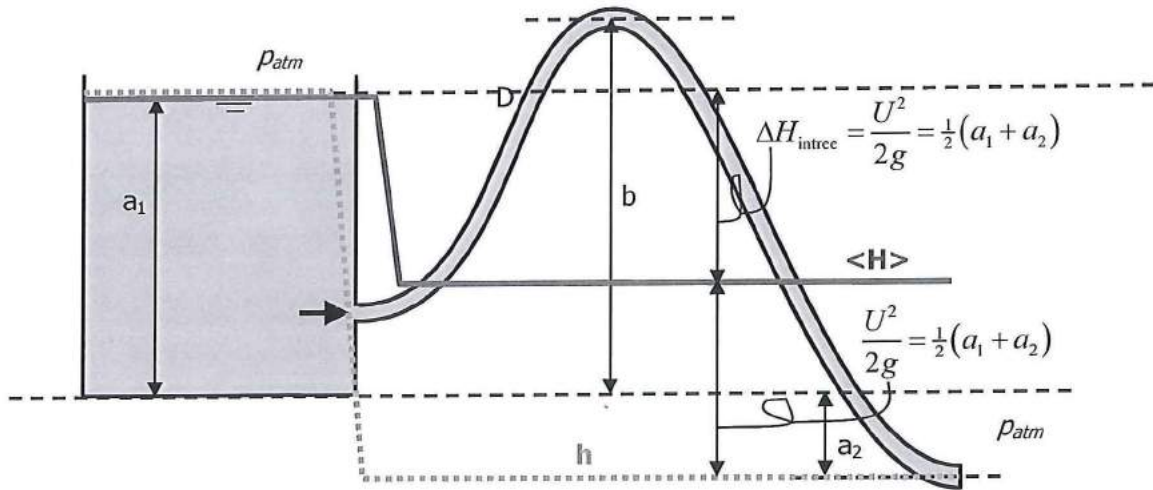
Invullen levert

$$\langle H \rangle_{\text{res}} = \Delta H_{\text{intree}} + \langle H \rangle_{\text{uitstroom}} \quad \leftrightarrow \quad a_1 = \frac{U^2}{2g} - a_2 + \frac{U^2}{2g}$$

$$\rightarrow \frac{U^2}{2g} = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$$

$$\rightarrow \Delta H_{\text{intree}} = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$$

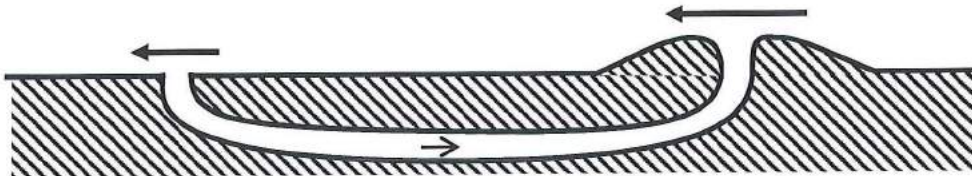
I.5



Vraagstuk II

II.1

Boven de ophoging is de stroomsnelheid van de lucht hoger dan boven het andere, lager gelegen, uiteinde van de tunnel. Dat betekent dat boven de ophoging de druk lager is dan boven het andere lager gelegen uiteinde van de tunnel. Door het drukverschil gaat er lucht in de tunnel stromen richting het hoger gelegen uiteinde.



II.2

Het vertragsingsverlies:

$$\Delta H_v = \frac{(U_1 - U_2)^2}{2g} = \frac{\left(\frac{Q}{\left(\frac{1}{4} \pi D_1^2 \right)} - \frac{Q}{\left(\frac{1}{4} \pi D_2^2 \right)} \right)^2}{2g} = \frac{8Q^2 \left(\frac{4}{D_1^2} - \frac{1}{D_2^2} \right)^2}{\pi g} = 72 \frac{Q^2}{\pi g D_2^4}$$

II.3

Het vertragsingsverlies igv een vergroting van de diameter in twee gelijke stappen:

$$\Delta H_v = \Delta H_{vl} + \Delta H_{vll} = 44,3 \frac{Q^2}{\pi g D_2^4}$$

$$\Delta H_{vl} = \frac{(U_1 - U_{1-2})^2}{2g} = \frac{\left(Q / \left(\frac{1}{4}\pi D_1^2\right) - Q / \left(\frac{1}{4}\pi D_{1-2}^2\right)\right)^2}{2g} = \frac{8Q^2 \left(4/D_2^2 - 16/(9D_2^2)\right)^2}{\pi g} = 39,5 \frac{Q^2}{\pi g D_2^4}$$

$$\Delta H_{vll} = \frac{(U_{1-2} - U_2)^2}{2g} = \frac{\left(Q / \left(\frac{1}{4}\pi D_{1-2}^2\right) - Q / \left(\frac{1}{4}\pi D_2^2\right)\right)^2}{2g} = \frac{8Q^2 \left(16/(9D_2^2) - 1/D_2^2\right)^2}{\pi g} = 4,8 \frac{Q^2}{\pi g D_2^4}$$

$$D_1 = \frac{1}{2} D_2$$

$$D_{1-2} = \frac{3}{4} D_2$$

II.4

In het geval van twee gelijke stappen in de vergroting van de diameter is het vertragsingsverlies kleiner dan in geval van een enkele stap in diameter. Immers naarmate we in steeds meer stappen de diameter vergroten tot een bepaalde waarde, komen we steeds dichterbij een gestroomlijnde situatie en wordt het vertragsingsverlies steeds kleiner.

Vraagstuk III

III.1

Druk bij de bodem:

$$p_{bodem} = \rho g Z_0 = 6,87 \text{ kPa}$$

Horizontale kracht:

$$F_h = \frac{1}{2} \rho g Z_0^2 L = 3,60 \text{ kN}$$

Verticale kracht:

$$F_v = 3,60 \text{ kN} \quad (\text{omlaag gericht, totale kracht moet immers loodrecht op wand staan})$$

Totale kracht:

$$F_v = \sqrt{F_h^2 + F_v^2} = 5,09 \text{ kN} \quad (\text{loodrecht op de wand})$$

III.2

$$\frac{dV}{dt} = A_0(Z) \frac{dZ}{dt} = -Q$$

III.3

Uitdrukking voor het debiet als functie van Z:

Bernoulli: $H_{\text{vrij opp}} = H_{\text{uitstroompunt}}$

waarin

$$H_{\text{vrij opp}} = Z$$

$$H_{\text{uitstroompunt}} = \frac{U^2}{2g}$$

Dit invullen in $H_{\text{vrij opp}} = H_{\text{uitstroompunt}}$ levert:

$$Z = \frac{U^2}{2g} \rightarrow U = \sqrt{2gZ}$$

$$Q = \mu A_{\text{opening}} U = 0,6 \cdot 0,1 \cdot L \sqrt{2gZ} = 0,06 L \sqrt{2gZ}$$

Uitdrukking voor het oppervlak van de waterspiegel A_0 als functie van Z :

$$\tan 45^\circ = \frac{\frac{1}{2} B(Z)}{Z} \rightarrow B(Z) = 2Z \tan 45^\circ = 2Z$$

$$A_0(Z) = L B(Z) = 2LZ$$

III.4

Hiervoor koppelen we de volumebalans aan de uitdrukking voor het debiet:

$$A_0(Z) \frac{dZ}{dt} = -Q \leftrightarrow$$

$$2LZ \frac{dZ}{dt} = -0,06 L \sqrt{2gZ} \leftrightarrow$$

$$\int_0^T dt = T = -\frac{2}{0,06\sqrt{2g}} \int_{0,7}^{0,2} \sqrt{Z} dZ = -\frac{4}{0,18\sqrt{2g}} Z^{3/2} \Big|_{0,7}^{0,2} = 2,47 \text{ s}$$

Vraagstuk IV

IV.1

Gebieden I en II: energiehoogte H constant (versnelling over korte afstand)

Gebieden III en IV: energiehoogte neemt af (vanwege vertragsingsverlies tgv verwijding profiel)

IV.2

Alleen voor balansgebied III is het impulstransport door de doorgangen gelijk.

IV.3

Op de overlaat zelf zijn de stroomlijnen nog evenwijdig en is de drukverdeling hydrostatisch. Achter de overlaat zijn de stroomlijnen t.g.v. de neer niet meer evenwijdig, echter de verticale snelheden in de neer zijn zo gering dat de resulterende afwijkingen van de hydrostatische drukverdeling maar klein zijn en in de meeste gevallen kunnen worden verwaarloosd.

IV.4

Pas de balansvergelijking voor de impuls in x-richting toe in balansgebied III (drukverdeling in doorgang 3 en 4 is hydrostatisch):

$$\frac{1}{2} \rho g d_3^2 + \rho \frac{q^2}{b} = \frac{1}{2} \rho g d_4^2 + \rho \frac{q^2}{d_4} \Rightarrow d_3^2 = d_4^2 + \frac{2q^2}{g} \left(\frac{1}{d_4} - \frac{1}{b} \right)$$

Alle termen in het rechterlid van de laatste vergelijking zijn bekend. Invullen hiervan geeft: $d_3 = 0,83 \text{ m}$.

IV.5

De energiehogte langs een stroomlijn van doorgang 1 via doorgang 2 naar doorgang 3 is constant (zie vraag II.1). Dan geldt:

$$H_1 = H_2 = H_3 = a + d_3 + \frac{u_3^2}{2g} = a + d_3 + \frac{q^2}{2gb^2} = 1,65 \text{ m}$$

IV.6

Pas de balansvergelijking voor impuls in x-richting toe in balansgebied II:

$$K_{x,schuif} = \rho \left(\frac{1}{2} g d_2^2 + \frac{q^2}{d_2} - \frac{1}{2} g d_3^2 - \frac{q^2}{b} \right)$$

Van de termen in het rechterlid is alleen d_2 onbekend.

We kunnen deze vinden uit de in de vorige vraag berekende energiehogte in doorgang 2:

$$H_2 = a + d_2 + \frac{q^2}{2gd_2^2} = 1,65 \text{ m}$$

met 1,65 m als startwaarde volgt na twee tot drie iteraties: $d_2 = 1,11 \text{ m}$ (niet gevraagd). Invullen in de vergelijking voor de horizontale kracht op de schuif geeft: $K_{x,schuif} = 1065,3 \text{ N/m}$ (ook niet gevraagd).

Uitwerking tentamen

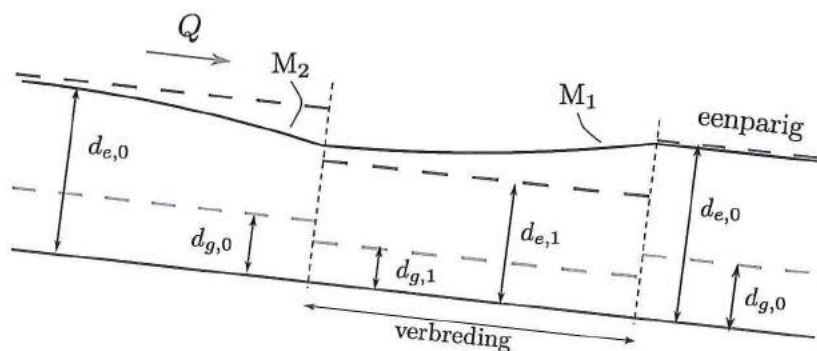
Vloeistofmechanica 2 (CT2140) 30 januari 2014

Vraagstuk V

V.1 Bij eenparige stroming is de waterdiepte gelijk aan de evenwichtsdiepte: $d_e = (q^2 c_f / g i_b)^{1/3}$. Met $q = Q/B_0 = 7,0 \text{ m}^2/\text{s}$ en de gegeven waarden voor c_f en i_b volgt nu $d_e = 5.72 \text{ m}$.

V.2 Voor het gedissipeerde vermogen geldt: $\Delta P_{diss} = \rho g Q \Delta H_w$. In de eenparige toestand geldt $\Delta H_w = i_b L$, waarin L de lengte is van het hier beschouwde traject (10 km). Met $\Delta H_w = 0,8 \text{ m}$ volgt nu $\Delta P_{diss} = 2747 \text{ kW}$.

V.3 Oorspronkelijk dwarsprofiel: $d_{e,0} = 5.72 \text{ m}$ (zie vraag V.1) en $d_{g,0} = (q^2/g)^{1/3} = 1.71 \text{ m}$; verbreding (zelfde formules met $q = Q/B_1 = 5.38 \text{ m}^2/\text{s}$): $d_{g,1} = 1.43 \text{ m}$ en $d_{e,1} = 4.80 \text{ m}$. (Let op het gebruik van de indices 0 en 1, overeenkomend met de breedte aanduiding op de figuur.) Subkritische stroming, flauwe helling, benedenstroomse randvoorwaarden zijn bepalend. Er treedt een M_1 -type stuwkromme op. Bovenstrooms van de verbreding gaat deze over in een M_2 -type. Zie figuur.



V.4 Zie figuur van vraag V.3: de maximale diepteverandering binnen het traject treedt op aan het bovenstroomse uiteinde ervan op een afstand $\Delta s = 10 \text{ km}$ van de benedenstroomse randvoorwaarde. Omdat verder benedenstrooms gelegen randvoorwaarden geen rol spelen heerst in dit punt de evenwichtsdiepte $d_{e,0}$. Voor de bijbehorende diepteverandering binnen dit traject geldt nu (oplossing verhanglijnvergelijking voor kleine afwijkingen van

de eenparige toestand): $\Delta d = (d_{e,0} - d_{e,1}) \exp -\Delta s/L_1$. Hierin is L_1 de aanpassingslengte in het verbrede riviertraject: $L_1 = d_{e,1}(1 - i_b/c_f)/3i_b = 19480$ m. Met $d_{e,0} - d_{e,1} = 0,92$ cm vinden we een maximaal diepteverschil (t.p.v. het bovenstrooms uiteinde) van 0,55 m.

V.5 Zie de figuur van vraag V.3. Bereken voor de stuwkromme van vraag V.4 eerst de afstand vanaf het benedenstroomse uiteinde van het verbrede traject waar de diepteverandering Δd gelijk is aan 0,25 m. Dit door de oplossing voor de verhanglijn te inverteren: $-\Delta s/L = \log \Delta d/(d_{e,0} - d_{e,1})$ waarin $\Delta d = 0.25$ m. Hieruit resulteert een bijbehorende afstand Δs van 6192 m. Het overige (bovenstroomse) deel van dit traject is de diepteverandering groter dan 0,25 m over een totale lengte van dus $10000 - 6192 = 3808$ m.

Vraagstuk VI

VI.1 Water stroomt om de roterbladen en door de hiermee gepaard gaande versnellingen treden drukverschillen op langs een rotorblad. Door de speciale vormgeving van de rotorbladen resulteert dit in een netto moment om de as van de rotor waardoor de rotor in draaiing wordt gebracht welke wordt overgedragen op een generator.

VI.2 Stel een energiebalans op voor de goot tussen de doorgang bij d_1 en de doorgang bij d_2 . Deze luidt: $\rho g Q (H_2 - H_1) = \Delta P$, waarin $H_{1,2} = d_{1,2} + U_{1,2}^2/2g$ (referentie niveau is de bodemhoogte van de horizontale goot). Invullen van de gegeven getalswaarden geeft (gebruikmakend van $U_{1,2} = Q/Bd_{1,2}$) een aan het water onttrokken vermogen $\Delta P = \Delta P_{rotor} = 17,93$ W (er zijn geen andere energieverliezen dan die door de rotor).

VI.3 Het door een omstroomd voorwerp aan het water onttrokken vermogen kan worden uitgedrukt als: $\Delta P_{rotor} = c_w \frac{1}{2} \rho U_0^3 A$, waarin U_0 de ongestoorde aanstroomsnelheid is, en A het aangestroomd oppervlak. De aanstroomsnelheid is hier de snelheid in de doorgang bovenstrooms van de rotor: $U_0 = Q/Bd_1 = 1,075$ m/s. Met het gegeven aangestroomd oppervlak $A = 500$ cm²) en het vermogen (berekend in vraag VI.2) volgt nu $c_w = 0,59$.

VI.4 Het netto rendement is het door de dynamo geleverde vermogen (14 W) gedeeld door het aan het water onttrokken vermogen (17,93 W): $\eta = 14/17,93 = 0,78$.

VI.5 Voor het netto geleverde vermogen in de werkelijk situatie, gebruiken we de eerder gegeven formule voor het aan het water onttrokken vermogen vermenigvuldigd met het netto rendement: $\Delta P = \eta c_w \frac{1}{2} \rho U_0^3 A$. Invullen van $U_0 = 1,35$ m/s en $\pi R^2 = 200$ m². geeft uiteindelijk: $\Delta P = 113,5$ kW. (Volgens een recent afstudeeronderzoek zou het netto vermogen van een dergelijke molen in Nederlandse situatie ca. 2 keer zoveel kunnen bedragen. Ter vergelijking: een moderne windmolen levert ca. 2-3 MW.)

Vraagstuk VII

VII.1 Een hevel is een gesloten buisleiding waarin stroming onder druk optreedt en waarbij het hoogste punt van de as van de buisleiding boven de respectievelijk niveau's van het instroom- en uitstroom einde ligt. Dit is mogelijk omdat het voor de stroming onder

druk in een gesloten leiding niet uitmaakt wat de hoogteligging van de buis is, het gaat slechts om het verhang van het piëzometrisch niveau (effecten m.b.t. de vorming van dampbellen bij lage vloeistofdrukken buiten beschouwing gelaten).

VII.2 Voor het weerstandsverlies over de buisleiding geldt: $\Delta H_w = \xi U^2/2g$. Hierin is ξ de gecombineerde verliesfactor met bijdragen van de wandweerstand ($\xi_w = f L/D$), het uittreeverlies ($\xi_{uit}=1$) en instroom- en bochtverliezen (hier te verwaarlozen, bijhorende waarde van ξ is nul). Voor de weerstandscoefficiënt geldt: $1/\sqrt{f} = 2 \log(3,7 D/k_N)$ (hydraulisch ruw) waaruit volgt: $f = 0.02$. Dit geeft een totale verliesfactor $\xi = f L/D + 1 = 7$. (Merk op dat het uitstroomverlies hier niet verwaarloosbaar is t.o.v. het wrijvingsverlies.) Met $\Delta H_w = h_{meer} - h_{zee} = 1$ m vinden we nu $U = 1,67$ m/s en $Q = UA = 0,95$ m³/s.

VII.3 Of de stroming turbulent dan wel laminair is wordt bepaald door het Reynolds-getal: $Re = UD/\nu = (1,67 \text{ m/s}) \times (0,85 \text{ m}) / (1,10 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}) \approx 1,4 \cdot 10^6$. De overgang van laminaire naar turbulente stroming vindt in een buis plaats voor Reynolds-getallen tussen ca. 2000 - 3500 zodat hier spake is van turbulente stroming ($Re \gg 3500$).

VII.4 De drukhoogte volg uit de energiehogte, bereken deze dus daarom eerst. Noem het hoogste punt P , dan geldt $H_P = H_{meer} - f \frac{L}{D} U^2/2g$ (er is geen instroomverlies en punt P ligt halverwege de leiding). We vinden zo: $H_P = 3,02$ m. Druk nu de energiehogte uit in termen van de drukhoogte: $H_P = z_P + (p/\rho g)_P + U^2/2g$. Voor de drukhoogte geldt dan: $(p/\rho g)_P = H_P - z_P - U^2/2g = 3,02 \text{ m} - 6 \text{ m} - 0,10 \text{ m} = -3,12 \text{ m}$. (Negatief, dus een druk in het hoogste punt lager dan de atmosferische druk.)

VII.5 Er moet een debiet geloosd kunnen worden van $Q = 1,25 \times 0,95 = 1,19$ m³/s bij een verval ΔH_w van 0,70 m. Voor dit debiet is het totale weerstandsverval: $\Delta H_w = \xi(L/D)(Q/A)^2/2g = 1,34$ m. De minimaal benodigde opvoerhoogte van de pomp is dus $\Delta H_{pomp, \min} = 1,34 - 0,70 = 0,64$ m. De pomp kan voor het nieuwe debiet een opvoerhoogte leveren van $\Delta P_{pomp}/(\rho g Q) = 0,56$ m. Dit is kleiner dan de benodigde 0,64 m, de pomp voldoet dus niet.

Vraag VIII

VIII.1 De stroming op de kruin van de overlaat is kritisch, dit betekent $u_k = \sqrt{gd_k}$ en $q = md_k u_k = md_k \sqrt{gd_k}$. Met $m = 1$ volgt hieruit $q = 0,13$ m²/s en $Q = qB_0 = 0,0391$ m³/s = 391 l/s. Voor de specifieke energiehogte bovenstrooms van de overlaat geldt: $E_0 = E_k + a_k = \frac{3}{2}d_k + a_k = 0,32$ m. Via $H_0 = d_0 + q^2/(2gd_0^2)$ volgt een waterdiepte $d_0 = 0,31$ m.

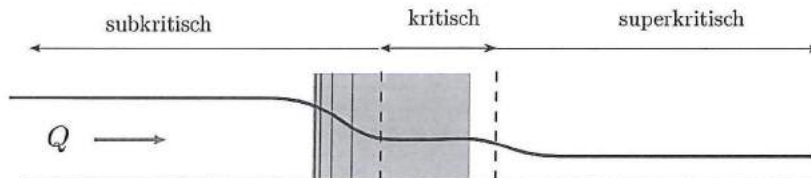
VIII.2 Gebruik hiervoor de balansvergelijking voor horizontale impuls: $F_0 = F_1^+$ (F_1^+ is de impulsoverdracht direct benedenstrooms van de versmalling). Uitgewerkt levert dit (op een constante factor ρ na): $\frac{1}{2}gB_0d_0^2 + Q^2/(B_0d_0) = \frac{1}{2}gB_1d_1^2 + Q^2/(B_1d_1)$. (let op het afwisselend gebruik van B_0 en B_1 in de verschillende termen hierin.) Het linkerlid kan direct worden berekend uit het antwoord van vraag VIII.1. De resulterende algebraïsche vergelijking voor de waterdiepte d_1 kan worden opgelost via de grafische rekenmachine (of iteratie). Er zijn 2 positieve oplossingen (behorend bij respectievelijk een sub- of superkritische stroming). De stroming is hier subkritisch, met als bijbehorend antwoord

$$d_1 = 0,29 \text{ m.}$$

VIII.3 Geleidelijk versnellende stroming, pas de energievergelijking toe, voor horizontale bodem: $E_2 = E_1$ oftewel $d_2 + (Q/B_0 d_2)^2/2g = d_1 + (Q/B_1 d_1)^2/2g =$. (Let op het gebruik van B_0 resp. B_1 .) Het rechterlid volgt direct uit het antwoord voor d_1 uit vraag VIII.2. Oplossen van de resulterende vergelijking voor d_2 geeft $d_2 = 0,32 \text{ m}$ (subkritische oplossing kiezen).

VIII.4 Pas wederom de impulsbalans toe (zie vraag VIII.2), nu is echter het rechterlid van de vergelijking bekend, deze volgt namelijk uit het gegeven dat de stroming tussen de versmalling kritisch is (gestuwde afvoer). Met $q_1 = Q/B_1 = 0,26 \text{ m}^2/\text{s}$ volgt hieruit $d_1 = d_{g,1} = (q_1^2/g)^{1/3} = 0,19 \text{ m}$. Oplossen van de resulterende vergelijking voor d_0 geeft nu $d_0 = 0,24 \text{ m}$ (subkritische oplossing). De specifieke energiehogte $E_0 = d_0 + (Q/B_0 d_0)^2/2g = 0,256 \text{ m}$. Met $E_0 = a_k + \frac{3}{2}d_k$ (zie vraag VIII.1) volgt een kruinhoogte a_k van $0,076 \text{ m}$ (de waterdiepte op de kruin, de lokale grensdiepte, is ongewijzigd vanwege Q is constant).

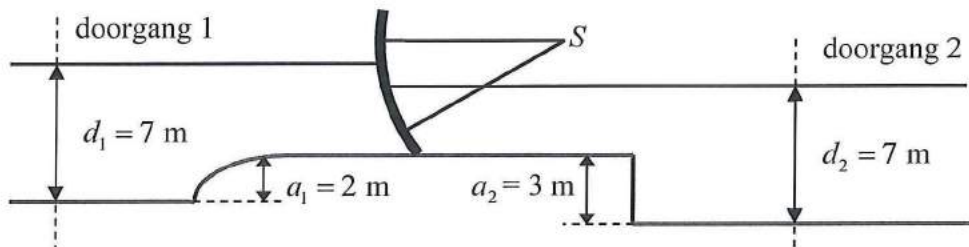
VIII.5 Bij een verdere afname van de schuifhoogte blijft de stroming ter hoogte van de versmalling kritisch, immers een verdere verlaging van de waterstand kan zich niet meer als een storing in bovenstroomse richting voorbij de versmalling voortplanten (vanwege $Fr_1 = 1$ en dus $U_1 = c_1$). De stroming bovenstrooms van de versmalling blijft dus ongewijzigd vergeleken met de situatie van vraag VIII.4. Bendenstrooms van het smalle deel is de stroming superkritisch, vanwege de vrije afstroming. De bijbehorende waterdiepte kan gevonden worden door bij de oplossing van de impulsvergelijking van vraag VIII.4 de superkritische oplossing te kiezen ($d = 0,049 \text{ m}$, maar dit was niet gevraagd). Zie figuur.



Vraagstukken Hoofdstuk 10 Snel variërende stromen

Vraagstuk 10.1

Een hoogwaterkering bestaat uit een lange overlaat en een cirkeldeur welke draaibaar is om het middelpunt S van de cirkel. Zie onderstaande figuur. Dit vraagstuk beschouwt de situatie per eenheid van breedte.



- 1.1 Waarom past men in dit soort constructies vaak deze zogenaamde sectorschuiwen toe?

De kering is aanvankelijk gesloten. De netto drukkrachten van het water op de deur worden volledig door het scharnierpunt S opgenomen.

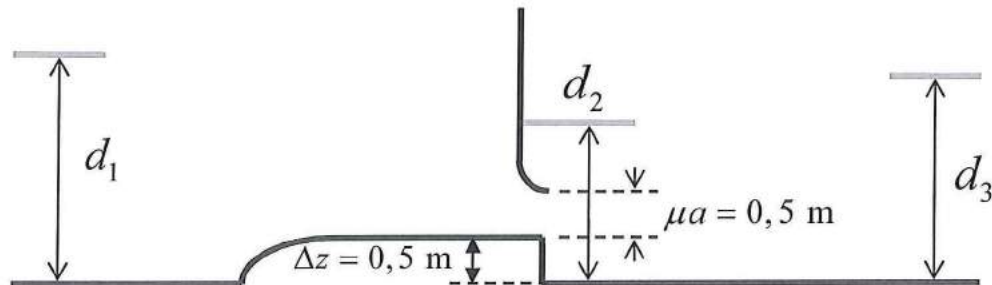
- 1.2 Bereken de netto horizontale kracht per eenheid van breedte die het water in het scharnierpunt S uitoefent.

De cirkeldeur wordt gedeeltelijk geopend met een netto doorstroomhoogte μa onder de deur van 1,0 m. De waterdiepte in doorgang 2 blijft daarbij hetzelfde als in de rusttoestand. Het specifieke debiet q bedraagt $5 \text{ m}^2/\text{s}$.

- 1.3 Neem bovenstaande tekening over en schets daarin het verloop van het waterniveau, het energieniveau en de snelheidshoogte in de situatie met de gedeeltelijk geopende kering. (De schets moet kwalitatief kloppen, getalswaarden hoeven *niet* te worden gegeven.)
- 1.4* Bereken de waterdiepte op de overlaat ter plaatse van het punt van maximum contractie. Let op, de berekening bestaat uit twee stappen!
- 1.5* Bereken de netto horizontale kracht per eenheid van breedte die het stromende water in het scharnierpunt S uitoefent.
- 1.6* Bereken het door het kunstwerk gedissipeerde vermogen per eenheid van breedte.

Vraagstuk 10.2

In een irrigatiekanaal bevindt zich een regelwerk bestaande uit een lange overlaat gecombineerd met een schuif. Dit vraagstuk beschouwt de lokale stroming rondom het kunstwerk, en wel per eenheid van breedte. Zie onderstaande tekening.



- 2.1* Neem bovenstaande tekening over en schets daarin het verloop van het waterniveau, het energieniveau en de snelheidshoogte. (De schets moet kwalitatief kloppen, getalswaarden hoeven *niet* te worden gegeven.)

De waterdiepten d_1 en d_2 bedragen respectievelijk 2,50 m en 2,20 m.

- 2.2 Bereken het bijbehorende specifieke debiet q . (Ga in het vervolg van dit vraagstuk uit van $q = 1,1 \text{ m}^2/\text{s}$ als je het antwoord op deze vraag niet weet.)

- 2.3 Bereken de bijbehorende waterdiepte d_3 .

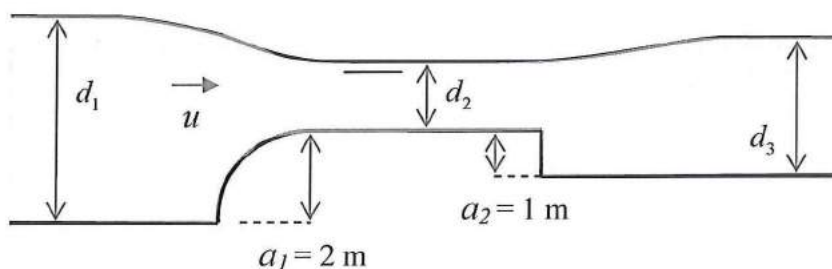
- 2.4* Bereken het door het kunstwerk gedissipeerde vermogen ΔP_{diss} . Waar en via welk mechanisme treedt deze energiedissipatie voornamelijk op?

Op zeker moment laat men de schuif een stukje zakken. De benedenstroomse waterdiepte d_3 en de afvoer q blijven ongewijzigd.

- 2.5 Beredeneer of de waterdiepte d_2 hierdoor toeneemt dan wel afneemt.

Vraagstuk 10.3

Een nieuw te bouwen uitwateringssluis met constante breedte bestaat uit een lange onvolkomen overlaat met ongelijke drempelhoogten aan de voor- en achterzijde. Zie onderstaande langsdoorsnede van de situatie bij een volledig geopende sluis.

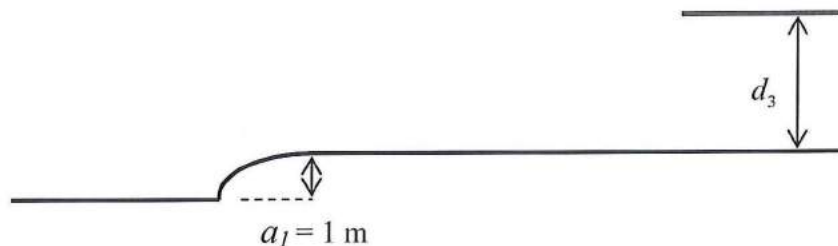


- 3.1 Leg uit waarom op de kruin van een lange overlaat het verticale verloop van de druk hydrostatisch is.

De waterdiepten op de overlaat en benedenstrooms van de overlaat bedragen respectievelijk $d_2 = 1,5$ m en $d_3 = 2,6$ m.

- 3.2* Bereken het specifieke debiet q door de sluis.
- 3.3 Bereken de waterdiepte d_1 bovenstrooms van de sluis.
- 3.4 Bereken het door het stromende water gedissipeerde vermogen per eenheid van breedte tussen de doorgangen ter plaatse van d_1 en d_3 .

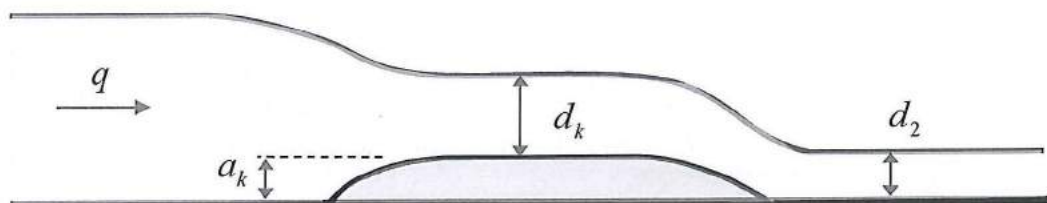
Een aangepast ontwerp van de sluis heeft een verlaagde kruinhoogte volgens onderstaande schets.



- 3.5* Beredeneer of bij gelijkblijvend debiet en dezelfde benedenstroomse waterdiepte d_3 het totale verval over de sluis zal toenemen of juist zal afnemen ten opzichte van dat van het oorspronkelijke ontwerp. Een berekening mag ook maar is niet strikt noodzakelijk.

Vraagstuk 10.4

In een afvoerkanaal met horizontale bodem en constante breedte bevindt zich een lange, aan de voor- en achterzijde afgeronde overlaat met een kruinhoogte $a_k = 0,50$ m. Het Froude-getal op de kruin van de overlaat bedraagt $Fr = 1$.



- 4.1 Omschrijf de kenmerkende verschillen tussen een volkomen en een onvolkomen overlaat. Met welk type hebben we hier te maken?

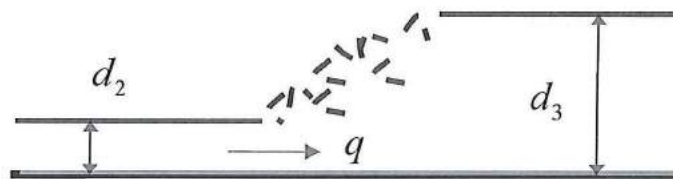
De waterdiepte d_k ter plaatse van de kruin van de overlaat bedraagt 0,35 m en de afvoercoëfficiënt m is gelijk aan 1.

4.2 Bereken het specifieke debiet q .

Vlak achter de overlaat (doorgang 2) is de stroming super-kritisch. Door de vorm van de overlaat vindt de afstroming plaats zonder energieverliezen.

4.3* Bereken de waterdiepte d_2 achter de overlaat.

Op korte afstand van de overlaat gaat de stroming via een watersprong over in sub-kritische toestand. Zie onderstaande figuur.

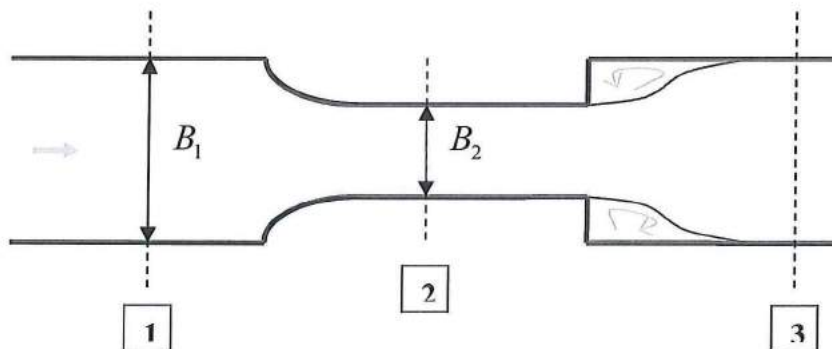


4.4* Bereken de waterdiepte d_3 achter de watersprong.

4.5* Bereken het door de watersprong gedissipeerde vermogen p.e.v. breedte.

Vraagstuk 10.5

Een irrigatiekanaal met een vlakke, horizontale bodem en verticale zijwanden is plaatselijke versmald. In het kanaal heerst een stationaire stromingstoestand. Zie het bovenaanzicht van de situatie.



5.1 Geef voor elk van de volgende grootheden aan of deze in de gegeven stromingstoestand constant is langs het kanaal of juist variabel:

- A de energiehogte,
- B de specifieke energiehogte,
- C het debiet,
- D het specifieke debiet.

De kanaalbreedten in de doorgangen 1 en 2 bedragen respectievelijk $B_1 = 8$ m en $B_2 = 4$ m. De bijbehorende waterdiepten d_1 en d_2 bedragen resp. 2 m en 1,5 m.

5.2 Bereken het debiet Q in het kanaal.

De stroomvoerende breedte in doorgang 3 is gelijk aan B_1 (8 m).

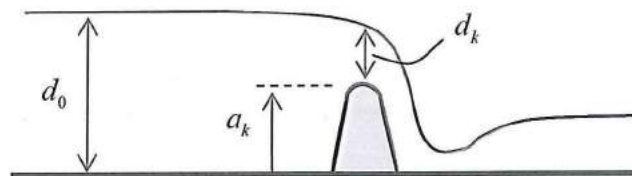
5.3* Bereken de waterdiepte d_3 in doorgang 3. (Neem $Q = 15 \text{ m}^3/\text{s}$ als je het antwoord op vraag 5.2 niet wist).

5.4 Bereken het door het stromende water gedissipeerde vermogen tussen de doorgangen 1 en 3.

5.5* Welke waarde neemt de waterdiepte d_2 aan wanneer bij gelijkblijvend debiet Q de waterdiepte d_3 steeds verder verkleind wordt?

Vraagstuk 10.6

Beschouw een volkomen overlaat met kruinhoogte a_k , diepte op de kruin d_k en bovenstroomse waterdiepte d_0 . Zie schets.



6.1 Waarom is bij een volkomen overlaat het Froude-getal ter plaatse van de kruin gelijk aan 1?

6.2* Leid af dat voor de volkomen overlaat geldt: $d_k = \frac{2}{3} E_k$. Hierin is E_k de specifieke energiehogte op de kruin.

De getekende korte overlaat heeft een afvoercoëfficiënt $m = 1,05$.

6.3 Waarom heeft een korte overlaat in het algemeen een afvoercoëfficiënt m groter dan 1?

In de getekende situatie is de diepte d_k op de kruin gelijk aan 0,75 m.

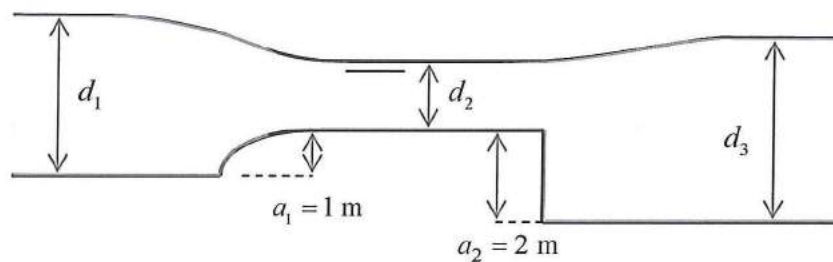
6.4* Bereken het specifieke debiet q over de overlaat.

De hoogte a_k van de overlaat bedraagt 1,5 m.

6.5 Bereken de waterdiepte d_0 bovenstrooms van de overlaat.

Vraagstuk 10.7

Een nieuw te bouwen uitwateringssluis met constante breedte bestaat uit een lange onvolkomen overlaat met ongelijke drempelhoogten aan de voor- en achterzijde. Zie onderstaande langsdoorsnede van de situatie bij een volledig geopende sluis.



7.1 Omschrijf het verschil tussen een volkomen en een onvolkomen overlaat.

De waterdiepten d_1 en d_2 bedragen respectievelijk 3,0 en 1,75 m.

7.2 Bereken het specifieke debiet q door de sluis.

7.3* Bereken de waterdiepte d_3 . Welke aanname is hierbij nodig?

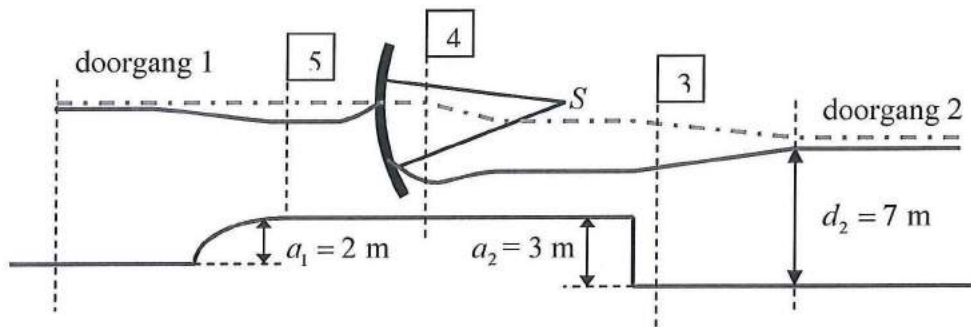
7.4 Waar, en via welk mechanisme treedt energiedissipatie op?

7.5 Bereken de door het stromende water op de sluis uitgeoefende horizontale kracht K_H per eenheid van breedte.

Uitwerking vraagstukken Hoofdstuk 10

Vraagstuk 10.1

- 1.1 De druk staat altijd op een zijdelingse begrenzing in de vloeistof. Vanwege de cirkelvorm heeft de netto drukkracht op de schuif dan het aangrijpingspunt in het een enkel punt, het middelpunt van de cirkel. De oplegreactie in het scharnierpunt S (dat samenvalt met het middelpunt) is dan slechts een (druk)kracht zonder resulterend moment op de oplegging en de schuif als geheel.
- 1.2 Krachtenevenwicht in x-richting voor een balansgebied met verticale begrenzingen aan weerszijden van de schuif geeft:
- $$K_H = \frac{1}{2} \rho g (d_1 - a_1)^2 - \frac{1}{2} \rho g (d_2 - a_2)^2 = 44,15 \text{ kN/m}$$
- 1.3 Schets energiehogte (streep-stip lijn), waterniveau (doorgetrokken lijn) en snelheidshogte (verschil energiehogte-waterniveau):



Aandachtspunten:

- Energiehoogte constant vanaf doorgang 1 tot vlak achter schuif (punt van maximum contractie);
- Afname energiehogte van maximum contractiepunt tot einde drempel (vertragsgebied) en vervolgens een verdere afname van einde drempel tot doorgang 2 (eveneens vertraging);
- Daling waterniveau ter plaatse van afgeronde overgang naar drempel (energiehoogte constant, toename snelheidshogte);
- Waterniveau gelijk aan energiehogte in stuwpunt aan bovenstroomse zijde schuif;
- Waterniveau minimaal ter plaatse van vena contracta en vervolgens in twee stappen (vertraging na vena contracta en vertraging na drempel) toename van de waterstand tot een resulterende waterdiepte van 7 meter in doorgang 2.
- Snelheidshogte in doorgang 2 is groter dan die in doorgang 1 (energiehoogte in 2 is lager, zelfde debiet).

- 1.4 Stap 1: Vertragszone einde drempel (doorgang 3) tot doorgang 2 => impulsbalans:

$$\frac{1}{2} \rho g d_3^2 + \rho \frac{q^2}{d_3 - a_2} = \frac{1}{2} \rho g d_2^2 + \rho \frac{q^2}{d_2} \Rightarrow d_3 = \sqrt{d_2^2 + \frac{2q^2}{g} \left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_3 - a_2} \right)}$$

Oplossen (itereren, grafische rekenmachine) geeft: $d_3 = 6,96 \text{ m}$.

Stap 2: Vertragszone vena contracta (doorgang 4) tot einde drempel (doorgang 3) => impulsbalans:

$$\frac{1}{2} \rho g d_4^2 + \rho \frac{q^2}{\mu a} = \frac{1}{2} \rho g (d_3 - a_2)^2 + \rho \frac{q^2}{d_3 - a_2} \Rightarrow d_4 = \sqrt{(d_3 - a_2)^2 + \frac{2q^2}{g} \left(\frac{1}{d_3 - a_2} - \frac{1}{\mu a} \right)}$$

Oplossen (rechtstreeks) geeft: $d_4 = 3,45$ m.

- 1.5 Bereken eerst de waterdiepte in doorgang 5 => energiebalans tussen doorgang 5 en doorgang 4 (versnellingsgebied):

$$E_5 = E_4 \Leftrightarrow d_5 + \frac{q^2}{2gd_5^2} = d_4 + \frac{q^2}{2g(\mu a)^2} \Rightarrow d_5 = d_4 + \frac{q^2}{2g} \left(\frac{1}{(\mu a)^2} - \frac{1}{d_5^2} \right)$$

Oplossen (iteratie, grafische rekenmachine) geeft: $d_5 = 4,66$ m.

De horizontale kracht van het stromende water op de schuif volgt nu uit de impulsbalans tussen doorgang 5 en doorgang 4:

$$K_H = \frac{1}{2} \rho g d_5^2 + \rho \frac{q^2}{d_5} - \frac{1}{2} \rho g d_4^2 - \rho \frac{q^2}{\mu a} = 28,70 \text{ kN/m.}$$

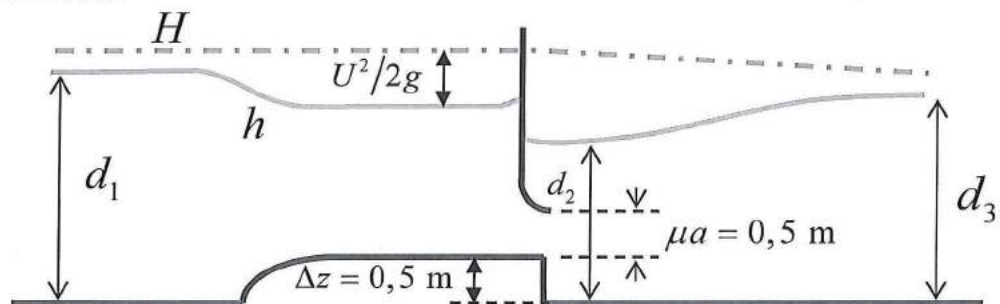
- 1.6* Energiebalans tussen doorgang 5 en doorgang 2 (in plaats van doorgang 5 kun je ook doorgang 1 kiezen (geen energiedissipatie tussen doorgang 1 en doorgang 5) maar dan moet je eerst via een energiebalans de waterdiepte in doorgang 1 berekenen wat extra werk met zich meebrengt.) De energiebalans geeft nu (kies bodemhoogte in doorgang 2 als referentieniveau):

$$\Delta P_{diss} = \rho g q (H_5 - H_2) = \rho g q \left(a_2 + d_5 + \frac{q^2}{2gd_5^2} - d_2 - \frac{q^2}{2gd_2^2} \right)$$

Invullen geeft: $\Delta P_{diss} = 34,03$ kW/m.

Vraagstuk 10.2

- 2.1 zie schets:



- 2.2 Tussen doorgangen 1 en 2 (t.p.v. d_1 resp. d_2) is de energiehoogte constant:

$$H_1 = H_2 \Rightarrow d_1 + \frac{U_1^2}{2g} = d_2 + \frac{U_2^2}{2g} \Leftrightarrow d_1 + \frac{q^2}{2gd_1^2} = d_2 + \frac{q^2}{2g(\mu a)^2}$$

$$\text{Dit leidt tot: } q^2 = 2g \frac{d_1 - d_2}{(\mu a)^{-2} - d_1^{-2}} \Rightarrow q = 1,24 \text{ m}^2/\text{s}$$

- 2.3 Tussen doorgangen 2 en 3 (t.p.v. d_2 resp. d_3) is de impulsoverdracht constant:

$$F_{x,2} = F_{x,3} \Rightarrow \frac{1}{2} \rho g d_2^2 + \rho q U_2 = \frac{1}{2} \rho g d_3^2 + \rho q U_3 \Leftrightarrow \frac{1}{2} g d_2^2 + \frac{q^2}{\mu a} = \frac{1}{2} g d_3^2 + \frac{q^2}{d_3}$$

De gevraagde waterdiepte volgt nu uit de volgende iteratie:

$$\frac{1}{2} g (d_3^2)^{k+1} = \frac{1}{2} g d_2^2 + \frac{q^2}{\mu a} - \frac{q^2}{(d_3)^k} \quad (k \text{ is hier de teller van de iteratie})$$

eindantwoord: $d_3 = 2,31 \text{ m}$

- 2.4 Dissipatie: $\Delta P_{diss} = \rho g \Delta H q$ (p.e.v. breedte), uitwerken en invullen geeft:

$$\Delta H = H_1 - H_3 = d_1 + \frac{U_2^2}{2g} - d_3 - \frac{U_3^2}{2g} = d_1 + \frac{q^2}{2g d_1^2} - d_3 - \frac{q^2}{2g d_3^2} = 0,19 \text{ m}$$

$$\Delta P_{diss} = 1000 \times 9,81 \times 0,19 \times 1,24 = 2,30 \text{ kW/m}$$

- 2.5 Als d_3 en q gelijk blijven blijft ook het impulstransport in doorgang 3 gelijk. Vanwege impulsbehoud tussen doorgangen 2 en 3 blijft dan ook het impulstransport door doorgang 2 gelijk. De impulsverdracht door meevoering neemt in doorgang 2 neemt bij kleinere doorstroomopening toe, immers het debiet q blijft gelijk en de stroomsnelheid neemt toe. De impulsverdracht door de hydrostatische drukkracht moet dus afnemen, de waterdiepte d_2 neemt dus af.

Vraagstuk 10.3

- 3.1 Omdat de lengte van de overlaat groot is ten opzichte van de drempelhoogte kunnen de stroomlijnen boven de kruin als vrijwel recht worden beschouwd. De consequentie hiervan is dat de druk als hydrostatisch te benaderen is.
- 3.2* Omdat er tussen doorsnede twee en drie energie gedissipeerd wordt moeten we met een impulsbalans werken. De impulsbalans tussen twee en drie is gegeven door:

$$\frac{1}{2} g (d_2 + a_2)^2 + \frac{q^2}{d_2} = \frac{1}{2} g d_3^2 + \frac{q^2}{d_3}$$

Waar gebruik is gemaakt van het behoud van volume ($q_2 = q_3 \Leftrightarrow d_2 U_2 = d_3 U_3$).

Oplossen voor q geeft

$$q^2 = \left(\frac{1}{2} g d_3^2 - \frac{1}{2} g (d_2 + a_2)^2 \right) \left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_3} \right)^{-1}$$

Invullen van $d_2 = 1.5 \text{ m}$, $d_3 = 2.6 \text{ m}$ en $a_2 = 1.0 \text{ m}$ geeft $q = 2.98 \text{ m}^2/\text{s}$

- 3.3 Tussen doorgang een en twee is een kort versnellingsgebied. Hier geldt behoud van energie en kunnen we dus Bernoulli toepassen:

$$z_1 + h_1 + \frac{U_1^2}{2g} = z_2 + h_2 + \frac{U_2^2}{2g}$$

We leggen het referentieniveau $z=0$ op het niveau van de bodem bovenstrooms. Verder gebruiken we de volume balans:

$$q_1 = q_2 \Leftrightarrow d_1 U_1 = d_2 U_2$$

Invullen geeft:

$$d_1 + \frac{q^2}{2gd_1^2} = a_1 + d_2 + \frac{q^2}{2gd_2^2}$$

Om te itereren schrijven we dit als:

$$d_1 = a_1 + d_2 + \frac{q^2}{2gd_2^2} - \frac{q^2}{2gd_1^2} = 0$$

Invullen met $a_1 = 2.0 \text{ m}$, $q = 2.98 \text{ m}^2/\text{s}$ en $d_2 = 1.5 \text{ m}$. Enkele malen itereren geeft als oplossing $d_1 = 4.05 \text{ m}$

- 3.4 Het gedissipeerde vermogen per eenheid van breedte is gegeven door:

$$p = \rho g q \Delta H$$

Het verval in energie hoogte ΔH is:

$$\Delta H = d_1 + \frac{q^2}{2gd_1^2} - a_2 - d_3 - \frac{q^2}{2gd_3^2} = 0.369 \text{ m}$$

Dit geeft een gedissipeerd vermogen per eenheid van breedte tussen de doorgangen ter plaatse van d_1 en d_3 van $p = 10.8 \text{ kW}$.

- 3.5* In dit geval is er geen vertragsgebied meer en is er dus ook geen energieverlies meer over de sluis. De energiebalans over de sluis was:

$$H_1 = \Delta H + H_3$$

Nu is er echter geen dissipatie meer en geldt dus dat: $H_1 = H_3$. Omdat zowel het benedenstrooms debiet als het piëzometrisch niveau constant blijven betekend dit dat het energieniveau in doorgang 1 lager ligt dan in het oorspronkelijke ontwerp. De energiehoogte als functie van de diepte is:

$$H(d) = d + \frac{q^2}{2gd^2}$$

De afgeleide is:

$$\frac{dH}{dd} = 1 - \frac{q^2}{gd^3} = 1 - Fr^2$$

Dus voor subkritische stroming ($Fr < 1$) geldt dat H een monotoom stijgende functie is. Met andere woorden: $H(d_1) > H(d_2)$ als $d_1 > d_2$ (zie paragraaf 10.3 dictaat).

In dit geval ligt het energieniveau lager dan in de oorspronkelijke situatie, en is de stroming subkritisch. Hieruit volgt dat de waterstand d_1 afneemt en het verval dus ook.

Vraagstuk 10.4

4.1 volkomen overlaat:

- stroming op de kruin is kritisch, $Fr_k = 1$
- waterstandsverandering benedenstrooms kan zich niet over de kruin in bovenstroomse richting voortplanten
- afstroming hangt niet af van benedenstroomse waterstand
- ongestuwde afvoer

onvolkomen overlaat:

- stroming op de kruin is sub-kritisch, $Fr_k < 1$
- storing benedenstrooms kan zich wèl over de kruin voortplanten
- afstroming hangt af van beneden- en bovenstroomse waterstand
- gestuwde afvoer

op grond hiervan is het duidelijk dat we met een volkomen overlaat te maken hebben

4.2 vanwege $Fr_k = 1$ geldt: $u_k = \sqrt{gd_k} \Rightarrow d_k u_k = d_k \sqrt{gd_k}$ zodat $q = md_k \sqrt{gd_k}$
na invullen van de gegevens volgt $q = 0,648 \text{ m}^2/\text{s}$

4.3* energievergelijking geeft: $H_1 = H_2 \Rightarrow a_k + d_k + \frac{u_k^2}{2g} = d_2 + \frac{u_2^2}{2g}$

met $u = q/d$ gaat dit over in: $H_1 = H_2 \Rightarrow a_k + \frac{3}{2}d_k = d_2 + \frac{q^2}{2gd_2^2}$

er zijn twee positieve oplossingen voor d_2 , één waarbij het Froude-getal $Fr_2 < 1$ en één waarbij $Fr_2 > 1$; omdat gegeven is dat de stroming in doorgang 2 super-kritisch is is de laatste de gevonden oplossing
iteratie (of grafische rekenmachine) geeft: $d_2 = 0,157 \text{ m}$

(terzijde: een gesloten oplossing van een derde-graads vergelijking zoals hierboven kan worden verkregen met de methode van Cardano, kijk bijvoorbeeld eens op wikipedia)

4.4* impulsbalans over de watersprong geeft: $F_2 = F_3 \Rightarrow \frac{1}{2}gd_2^2 + qu_2 = \frac{1}{2}gd_3^2 + qu_3$

via $u = q/d$ en enig herschrijven volgt: $d_3 = \sqrt{d_2^2 + \frac{2q^2}{g}(d_2^{-1} - d_3^{-1})}$

na enige iteraties vindt men: $d_3 = 0,66 \text{ m}$

4.5 energiebalans over de watersprong: $\rho g q H_2 - \Delta P_{diss} = \rho g q H_3$

waarin: $H_2 = H_k = a_k + \frac{3}{2}d_k = 1,025 \text{ m}$; $H_3 = d_3 + \frac{q^2}{2gd_3^2} = 0,71 \text{ m}$

zodat $\Delta P_{diss} = 2,00 \text{ kW/m}$

Vraagstuk 10.5

- 5.1 A: energiehogte variabel,
B: specifieke energiehogte variabel,
C: debiet constant,
D: specifieke debiet variabel.

- 5.2 Versnelling over korte afstand: Bernoulli: $H_1 = H_2 \Leftrightarrow h_1 + \frac{u_1^2}{2g} = h_2 + \frac{u_2^2}{2g}$

Omdat de bodemhoogte constant is gaat dit over in: $d_1 + \frac{Q^2}{2gA_1^2} = d_2 + \frac{Q^2}{2gA_2^2}$.

Met $A_1 = B_1 d_1$ en $A_2 = B_2 d_2$ gegeven valt hieruit Q op te lossen. Herschrijf Bernoulli daartoe als volgt:

$$2g(d_1 - d_2) = Q^2 \left(\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2} \right) \Leftrightarrow Q^2 = \frac{2g(d_1 - d_2)}{A_2^{-2} - A_1^{-2}}.$$

Invullen geeft: $Q = 20,27 \text{ m}^3/\text{s}$.

- 5.3 Vertraging over korte afstand: impulsbalans. Het balansgebied wordt daarbij begrensd door de doorgangen 2 en 3. Op een constante factor ρ na geeft dit

$$F_2 + K = F_3 \Leftrightarrow Qu_2 + \frac{1}{2}gd_2^2B_2 + K = Qu_3 + \frac{1}{2}gd_3^2B_3 \text{ met:}$$

- stroomsnelheid $u_2 = Q/A_2$,
- K is de horizontale drukkracht (gedeeld door ρ) uitgeoefend door de dwarswanden t.p.v. de verbreding, omdat hier de hydrostatische drukverdeling heerst met een over de breedte uniforme waterdiepte d_2 (zie dictaat) geldt: $K = \frac{1}{2}gd_2^2(B_1 - B_2)$
- stroomsnelheid $u_3 = Q/A_3 = Q/B_1d_3$ (vanwege $B_3 = B_1$).

De impulsbalans gaat hiermee over in: $\frac{Q^2}{A_2} + \frac{1}{2}gd_2^2B_1 = \frac{Q^2}{B_1d_3} + \frac{1}{2}gd_3^2B_1$, waarin d_3

de enige onbekende is. Na enig itereren volgt $d_3 = 1,81 \text{ m}$. Itereren doe je als volgt:

$$(d_3^{k+1})^2 = \frac{2}{gB_1} \left(F_L - \frac{Q^2}{B_1d_3^k} \right), \text{ waarin } F_L \text{ het linkerlid van de impulsbalans is en } d_3^{k+1}$$

en d_3^k respectievelijk de nieuwe en oude schatting voor de diepte d_3 .

- 5.4 Gedissipeerde vermogen tussen doorgangen 1 en 3:

$$\Delta P_{diss} = \rho g Q (H_1 - H_3) = \rho g Q \left(d_1 + \frac{Q^2}{2gA_1^2} - d_3 - \frac{Q^2}{2gA_3^2} \right). \text{ Alle grootheden in het}$$

rechterlid zijn bekend, waaruit na invullen hiervan volgt: $\Delta P_{diss} = 34,4 \text{ kW}$

- 5.5 De diepte d_2 neemt uiteindelijk de grensdiepte aan (super-kritische stroming, $Fr = 1$), een verdere verlaging van de diepte d_3 kan zich dan niet meer in

stroomopwaartse richting voortplanten. Dit geeft: $Fr_2 = 1 \Leftrightarrow U_2 = \sqrt{gd_2}$, waaruit

$$\text{met } U = Q/Bd \text{ volgt: } d_2 = \left(\frac{Q^2}{gB_2^2} \right)^{1/3} = 1,38 \text{ m}.$$

Vraagstuk 10.6

- 6.1 Volkomen overlaat: een verandering van de benedenstroomse waterstand leidt niet tot een aanpassing van het debiet. De oorzaak hiervan is de hoge stroomsnelheid op de kruin die geen verstoringen van het wateroppervlak doorlaat. Storingen planten zich voort met snelheid $c = \sqrt{gd}$ zodat voor de minimum diepte op de kruin geldt: $u_k = \sqrt{gd_k}$. De definitie van het Froude-getal ($Fr = u/c$) impliceert dan dat het Froude-getal op de kruin gelijk is aan één.
- 6.2 Definitie specifieke energiehoopte: $E = d + \frac{u^2}{2g}$ (energiehoopte tov bodemhoopte).
Uit $Fr = 1$ op de kruin volgt: $u_k^2 = gd_k$ (zie vraag III.1). Invullen geeft nu:
$$E_k = d_k + \frac{u_k^2}{2g} = d_k + \frac{gd_k}{2g} = \frac{3}{2}d_k.$$
- 6.3 Boven een korte overlaat zijn de stroomlijnen sterk gekromd. Op de kruin neemt het piëzometrisch niveau dan af in de richting van het wateroppervlak naar de bodem (zie Euler vergelijking in n-richting). Omdat de energiehoopte constant is (geleidelijk versnellende toestroming vanuit een gebied met constante energiehoopte) neemt de snelheid van oppervlak naar bodem toe. De diepte gemiddelde snelheid is dus groter dan de snelheid langs de stroomlijn bij het vrij oppervlak. Dit leidt tot een afvoercoëfficiënt m groter dan één.
- 6.4 Er geldt: $q = d_k u_k$. Met $u_k = \sqrt{gd_k}$ (vraag III.1) geeft dit: $q = d_k \sqrt{gd_k}$ en na toepassing afvoercoëfficiënt $q = m d_k \sqrt{gd_k}$. Invullen geeft: $q = 2,1361 \text{ m}^2/\text{s}$.
- 6.5 Specifieke energiehoopte op de kruin: $E_k = \frac{3}{2}d_k = 1,125 \text{ m}$. De specifieke energiehoopte E_0 bovenstrooms van de overlaat bedraagt nu:
$$E_0 = d_0 + \frac{u_0^2}{2g} = a_k + E_k = 2,625 \text{ m}.$$

Via $u_0 = \frac{q}{d_0}$ kan nu de waterdiepte d_0 worden berekend (via iteratie): $d_0 = 2,59 \text{ m}$.

Vraagstuk 10.7

- 7.1 Volkomen overlaat: Froude-getal op de kruin van de overlaat = 1, benedenstroomse waterstand heeft geen invloed op de grootte van de afvoer.
Onvolkomen overlaat: Froude-getal op de kruin van de overlaat is kleiner dan 1, benedenstroomse waterstand beïnvloedt de grootte van de afvoer.
- 7.2 tussen doorsnede 1 en doorsnede 2 is er energiebehoud (versnellende stroming over korte afstand): $H_1 = H_2 \Leftrightarrow d_1 + \frac{q^2}{2gd_1^2} = a_1 + d_2 + \frac{q^2}{2gd_2^2}$
Hieruit volgt voor het specifieke debiet: $\frac{q^2}{2g} = \frac{d_1 - a_1 - d_2}{d_2^{-2} - d_1^{-2}} \Rightarrow q = 4,77 \text{ m}^2/\text{s}$
- 7.3 Benodigde aanname:
- de druk in de overgang van de overlaat naar naar het diepere deel (met diepte d_3) is hydrostatisch (stroomsnelheden in de neer achter de overlaat zijn klein met verwaarloosbare snelheidshoopte)

De impulsbalans van doorgang 2 naar doorgang 3 luidt nu:

$$F_2 = F_3 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \rho g (d_2 + a_2)^2 + \rho \frac{q^2}{d_2} = \frac{1}{2} \rho g d_3^2 + \rho \frac{q^2}{d_3}$$

We kunnen dit ook schrijven als:

$$d_3^2 = (d_2 + a_2)^2 + \frac{2q^2}{g} \left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_3} \right) \Rightarrow d_3 = 3,85 \text{ m}$$

itereren

- 7.4 Energiedissipatie treedt hoofdzakelijk op achter de overlaat in de menglaag tussen de hoofdstroming (hoge stroomsnelheden) en de bodemneer (lage stroomsnelheden) via omzetting van kinetische energie van de hoofdstroming in turbulente energie (wervels).

- 7.5 Impulsbalans toepassen tussen doorgang 1 en doorgang 3:

$$F_1 - F_3 - K_H = 0 \Rightarrow K_H = \rho \left(\frac{1}{2} g d_1^2 + \frac{q^2}{d_1} - \frac{1}{2} g d_3^2 - \frac{q^2}{d_3} \right)$$

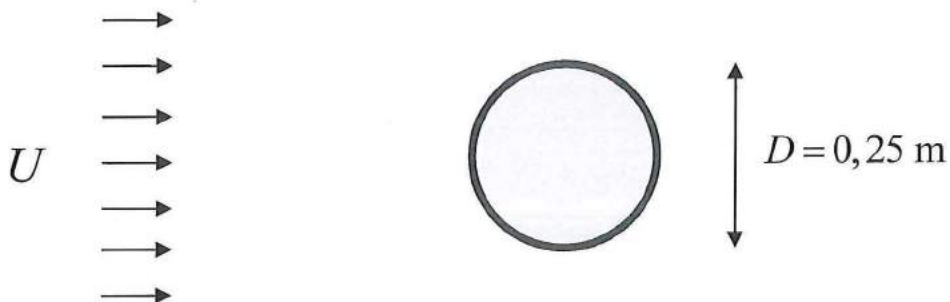
Invullen van de reeds berekende grootheden: $K_H = -26,71 \text{ kN/m}$

(Let op: kracht is van rechts naar links i.v.m. grotere waterdiepte achter de drempel).

Vraagstukken Hoofdstuk 11 Stromen om starre lichamen

Vraagstuk 11.1

Om de stroomkrachten op een in zee te plaatsen windmolen te kunnen bepalen wordt een schaalproef uitgevoerd. Hiertoe wordt in een laboratorium een cylinder met een diameter $D = 0,25$ m in stromend water geplaatst. In de proefopstelling zijn op grote afstand bovenstrooms van de cylinder de stroomlijnen evenwijdig met een uniforme aanstroomsnelheid U . Zie onderstaande schets.



- 1.1 Geef de definitie en de fysische betekenis van het Reynolds-getal Re in bovenstaande situatie.

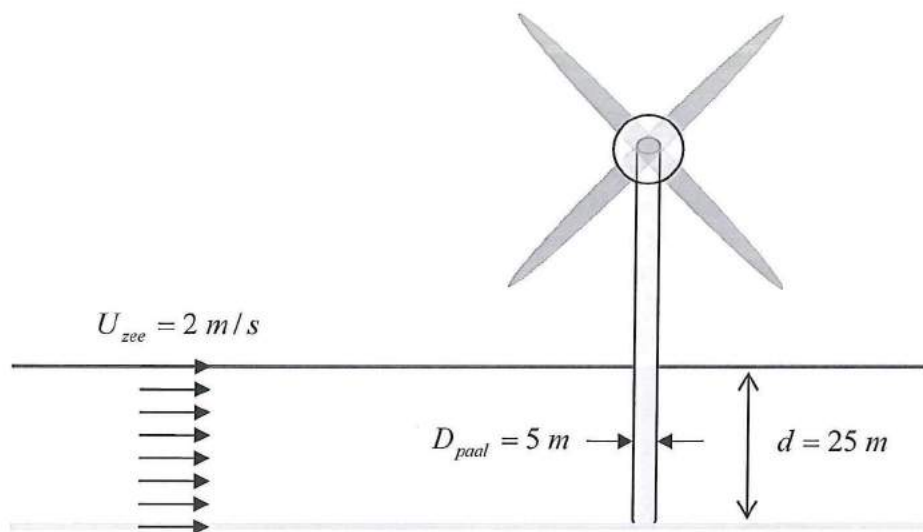
Voor een ruwe cylinder blijkt voor $Re > \text{ca. } 1 \cdot 10^5$ de drag-coëfficiënt c_w vrijwel onafhankelijk te zijn van het Reynolds-getal.

- 1.2 Bereken de vereiste minimale aanstroomsnelheid U in het experiment zodanig dat aan de voorwaarde $Re > 1 \cdot 10^5$ voldaan wordt.

Voor een aanstroomsnelheid $U = 0,65$ m/s meet men de sleepkracht F_w op de cylinder. Uitgedrukt per eenheid van lengte bedraagt deze kracht $F_w = 10$ N/m.

- 1.3 Bereken de drag-coëfficiënt c_w van de cylinder.

Ter bepaling van de belasting van de zeestroming op de windmolen dient het experimentele resultaat vertaald te worden naar de praktijk. Daartoe wordt verondersteld dat de drag-coëfficiënt van de paal van de windmolen gelijk is aan de in het experiment vastgestelde waarde. Zie onderstaande figuur.



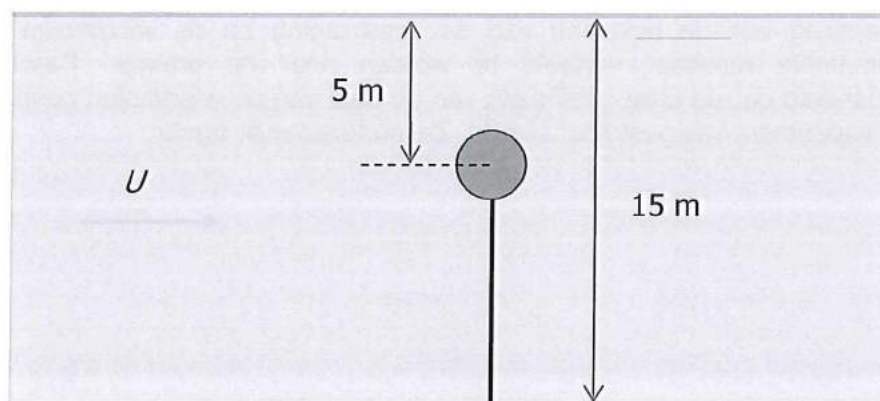
- 1.4* Bereken de sleepkracht die door de zeestroming op de windmolen wordt uitgeoefend. Overige gegevens: paaldiameter: $D_{paal} = 5 \text{ m}$, waterdiepte: $d = 25 \text{ m}$, aanstroomsnelheid: $U_{zee} = 2 \text{ m/s}$ (uniform).

In werkelijkheid is op zee de verticale verdeling van de aanstroomsnelheid niet uniform maar, onder invloed van de bodemschuifspanning, logaritmisch.

- 1.5 Wat verandert er hierdoor aan de verticale verdeling van de stuwdruk en het stroombeeld rondom de paal van de windmolen ten opzichte van de geïdealiseerde situatie met uniforme aanstroming?

Vraagstuk 11.2

Een bol met een diameter van 30 cm en een verwaarloosbare massa wordt d.m.v. een ankerlijn, met een eveneens verwaarloosbare massa, op een diepte van 5 m onder water vastgehouden. De totale waterdiepte is 15 m. Voor een bol met straal R geldt: inhoud $= \frac{4}{3}\pi R^3$, oppervlakte $= 4\pi R^2$ en doorsnede $= \pi R^2$.



- 2.1 Bereken de kracht in de ankerlijn wanneer het water in rust is.
- 2.2 Bereken de horizontale uitwijking van de ankerlijn wanneer het water gaat stromen met een snelheid van 2 m/s. De weerstandscoefficiënt c_w van de bol is 0,1. De stromingsweerstand van de ankerlijn mag verwaarloosd worden. Aanwijzing: bereken eerst de horizontale kracht die het stromende water op de bol uitoefent.
- 2.3 Geef een korte omschrijving van het begrip 'loslating'. Welke parameter(s) bepalen in belangrijke mate waar de stroming loslaat van een omstroomd lichaam?

Uitwerking vraagstukken Hoofdstuk 11 Strooming om starre lichamen

Vraagstuk 11.1

- 1.1 Definitie Reynolds-getal voor een cylinder met diameter D :

$$Re \equiv \frac{UD}{\nu} = \frac{\rho UD}{\eta} \quad \nu, \eta \text{ kinematische resp. dynamische viscositeit}$$

Het Reynolds-getal is een dimensieloze parameter die de verhouding aangeeft tussen de traagheidskrachten en de schuifkrachten in een stromende vloeistof als snelheidsvariaties zich over een bepaalde afstand (hier D) voordoen.

1.2 Eis: $Re = \frac{UD}{\nu} > 1.10^5 \Rightarrow U > 1.10^5 \frac{\nu}{D} = 1.10^5 \frac{1.10^{-6}}{0,25} = 0,40 \text{ m/s}$

1.3 Voor de sleepkracht geldt: $F_w = \underbrace{c_w}_{\text{evenredigheidsconstante}} \underbrace{\frac{1}{2} \rho U^2}_{\text{maximale stuwdruk}} \underbrace{A}_{\text{aangestroomd oppervlak}}$

Het aangestroomd oppervlak per meter cylinderlengte is hier $1 \times D = D$ zodat,

$$c_w = \frac{F_w}{\frac{1}{2} \rho U^2 D} = \frac{10}{500 \times 0,65^2 \times 0,25} = 0,19$$

1.4 Sleepkracht: $F_w = c_w \frac{1}{2} \rho U_{\text{zee}}^2 A$

Drag-coëfficiënt (c_w) volgens het experiment: $c_w = 0,19$ (vraag III.3)

Aangestroomd dwarsoppervlak: lengte paal $\times$ waterdiepte = $5 \times 25 = 125 \text{ m}^2$

Dit geeft uiteindelijk: $F_w = 0,19 \times \frac{1}{2} \times 1000 \times 2^2 \times 125 = 47,5 \text{ kN}$

- 1.5 Door het snelheidsverschil in verticale richting (samenhangend met het logaritmisch snelheidsprofiel) is de stuwdruk aan de voorkant van de paal bij het wateroppervlak hoger dan bij de bodem. Door de resulterende verticale drukgradiënt ondergaat het water aan de voorkant van de paal een versnelling omlaag. Deze neerwaartse stroming buigt bij de bodem af in een spiraalvormige, stroomafwaartse beweging ("horse shoe vortex"). Deze kan sterke erosie veroorzaken rondom de paalvoet.

Vraagstuk 11.2

- 2.1 de (verticale) kracht in de ankerlijn is gelijk aan het gewicht van het door de bol verplaatste watervolume:

$$F_V = \rho g I_{\text{bol}} = \rho g \frac{4}{3} \pi R^3 = 138,7 \text{ N}$$

- 2.2 de horizontale, door de stroming uitgeoefende, kracht op de bol is evenredig met het product van de druk in het stuwpunt en het aangestroomde oppervlak, met evenredigheidsconstante c_w :

$$F_H = c_w \rho \frac{1}{2} u^2 A_{\text{bol}} = c_w \rho \frac{1}{2} u^2 \pi R^2 = 14,14 \text{ N}$$

de ankerlijn maakt een hoek met de verticaal van:

$$\varphi = \arctan \frac{F_H}{F_V} = \arctan \frac{c_w \frac{3}{8} u^2}{gR} = 0,10 \text{ rad}$$

met lengte L van de ankerlijn (10 m) is de horizontale uitwijking dan: $L \sin \varphi \approx 1 \text{ m}$ (1,01 m)

2.3 loslating: zie diktaat blz. 169

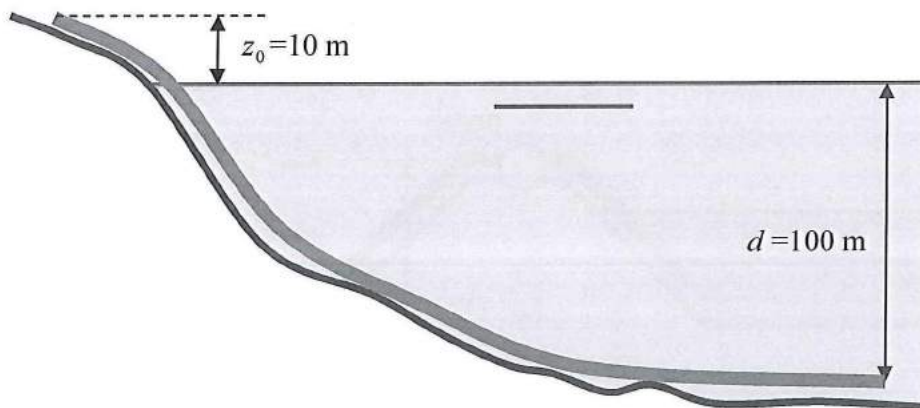
loslating wordt bepaald door met name de volgende parameters:

- Reynolds-getal $\frac{Ul}{\eta}$ (verhouding traagheid-visceuze schuifkracht), hierin in l een karakteristieke afmeting van het lichaam
- de huidruwheid
- de vorm van het lichaam

Vraagstukken Hoofdstuk 12

Vraagstuk 12.1

Via een rioolleiding met een lengte L van 3000 m en een diameter D van 0,50 m wordt voorbehandeld afvalwater geloosd op de bodem van de zee op een diepte d van 100 m. Het begin van de leiding bevindt zich op een hoogte $z_0 = 10$ m t.o.v. zeeniveau. Zie onderstaande schets van de situatie.



De wandstroming in de leiding is hydraulisch ruw.

- 1.1 Omschrijf het kenmerkende verschil tussen hydraulisch ruwe wandstroming respectievelijk hydraulisch gladde wandstroming.

Aan het eind van de leiding stroomt het rioolwater in zee via een nauwe uitstroomopening met een netto doorstroomoppervlak μA van $0,02 \text{ m}^2$. De Nikuradse-ruwheidshoogte k_N van de wand van de leiding bedraagt 2 mm.

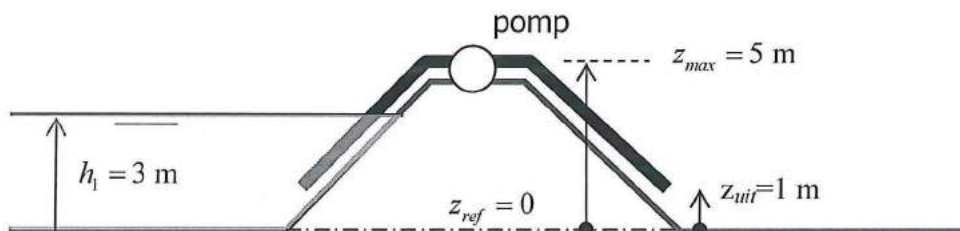
- 1.2* Bereken de totale verliescoëfficiënt ξ van de leiding onder verwaarlozing van de instroomverliezen en de bochtverliezen.
- 1.3 Welke drukhoogte is aan het begin van de leiding nodig om een debiet Q van $0,4 \text{ m}^3/\text{s}$ te kunnen lozen?
- 1.4* Als deze drukhoogte wordt geleverd door een pomp, wat is dan het bijbehorende pompvermogen?

Door de aanleg van een nieuwe woonwijk moet er anderhalf keer zoveel rioolwater geloosd worden. De met het ontwerp belaste ingenieur besluit daartoe 50% extra pompvermogen te installeren.

- 1.5 Laat via een berekening zien of deze ingenieur een goede beslissing heeft genomen.

Vraagstuk 12.2

Via een hevel wordt water uit een meer over een dijk gepompt. De leiding heeft een diameter $D=0,75$ m en lengte $L=100$ m. Het constante waterniveau h_1 in het meer bedraagt 3 m. De pomp bevindt zich op het hoogste punt ($z_{max} = 5$ m) van de leiding en de uitstroomopening heeft een hoogte z_{uit} van 1 m. Zie onderstaande figuur.



- 2.1 Stel een energiebalans op voor het systeem van hevel plus pomp waarmee je het debiet door de leiding zou kunnen berekenen als functie van het pompvermogen. De intree- en bochtverliezen mogen daarbij verwaarloosbaar klein worden verondersteld.

De Nikuradse wandruwheid van de leiding k_N bedraagt 1 mm. Ga uit van hydraulisch ruwe wandstroming.

- 2.2 Bereken de weerstandsfactor f van de buisleiding.

Het netto pompvermogen ΔP_{pomp} bedraagt 40 kW.

- 2.3* Bereken het debiet Q door de leiding. Maak gebruik van het antwoord op vraag 2.1.

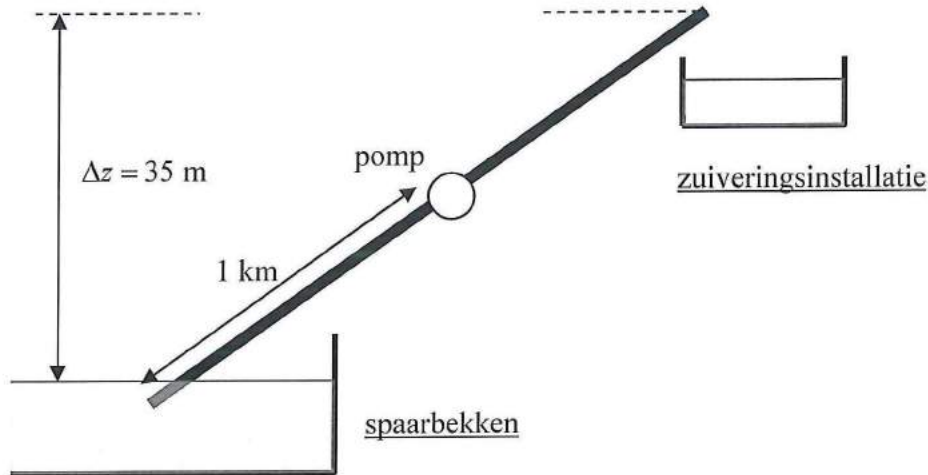
- 2.4 Bereken de bijbehorende opvoerhoogte ΔH_{pomp} van de pomp.

De pomp bevindt zich precies halverwege de leiding.

- 2.5* Teken het verloop van de waterdruk langs de leiding voorzien van de bijbehorende getalswaarden.

Vraagstuk 12.3

Via een leiding met een diameter D van 0,80 m en een totale lengte L van 2 km wordt drinkwater van een laaggelegen spaarbekken naar een hoger gelegen zuiveringsinstallatie getransporteerd. Het te overbruggen hoogteverschil Δz bedraagt 35 m. Hiertoe bevindt zich precies halverwege de leiding een pomp. Zie onderstaande schets.



De Nikuradse wandruwheid k_N van de leiding bedraagt $0,5 \cdot 10^{-3}$ m.

3.1 Bereken de weerstandsfactor f van de leiding onder de aanname van hydraulisch ruwe wandstroming.

3.2

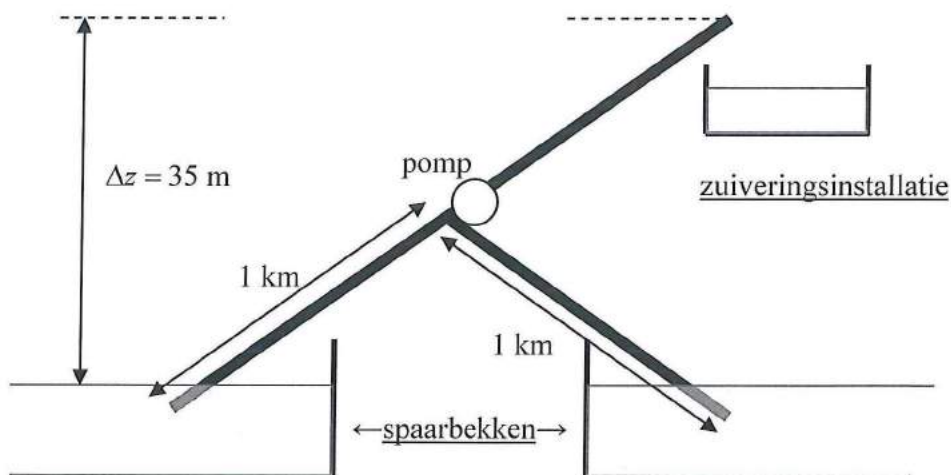
De opvoerhoogte van de pomp ΔH_{pomp} bedraagt 45 m.

3.2* Bereken het debiet Q in de leiding wanneer de pomp aan staat. De in- en uitstroomverliezen mogen worden verwaarloosd.

3.3 Bereken het bijbehorende pompvermogen ΔP_{pomp} .

3.3 Maak een schets van het verloop van de energiehogte langs de leiding voorzien van de bijbehorende getalswaarden.

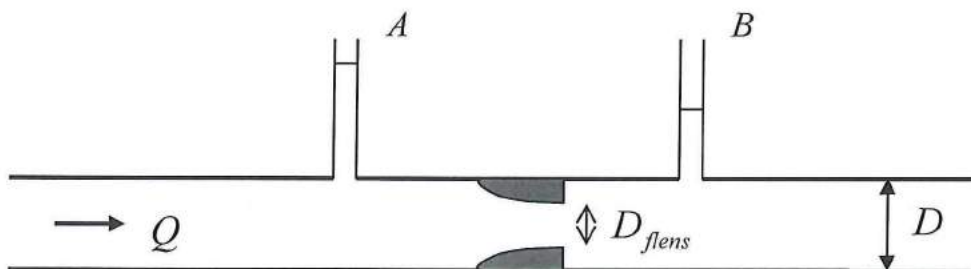
Een tweede spaarbekken met een niveau gelijk aan het oorspronkelijke bekken wordt in gebruik genomen en via een nieuw leidingdeel met een gelijke diameter aangesloten op de bestaande leiding. Zie onderstaande schets.



- 3.5* Hoeveel extra pompvermogen moet er vervolgens worden geïnstalleerd om het oorspronkelijke debiet van vraag 3.2 te verdubbelen? Eventuele extra verliezen ter plaatse van de aansluiting mogen verwaarloosd worden.

Vraagstuk 12.4

In een buisleiding met constante diameter D bevindt zich een zogenaamde meetflens bestaande uit een plaatselijke vernauwing met een abrupte verwijding en twee stijgbuisjes A en B waarmee de piëzometrische niveau's voor en achter de flens kunnen worden afgelezen. Zie onderstaande schets.



- 4.1 Leg kort uit op welk principe de werking van dit meetinstrument berust.

De diameter D van de leiding bedraagt 0,50 m terwijl $D_{flens} = 0,5 D$. Het gemeten verschil in piëzometrisch niveau $\Delta h = h_A - h_B$ bedraagt 30 cm.

- 4.2* Bereken het debiet Q in de leiding. (Neem in vervolgvragen $Q = 0,10 \text{ m}^3/\text{s}$ als je het antwoord niet weet, dit is uiteraard niet het goede antwoord.)

De wandstroming in de leiding is hydraulisch ruw.

- 4.3 Omschrijf kort het fysische verschil tussen hydraulische gladde en hydraulisch ruwe wandstroming.

De leiding heeft een totale lengte L van 500 m. De Nikuradse ruwheidshoogte k_N van de buiswand bedraagt 2 mm.

- 4.4 Bereken voor het debiet van vraag 4.2 het weerstandsverval ΔH_0 over de leiding. Breng naast het wrijvingsverlies en het energieverlies bij de meetflens ook het uitstroomverlies in rekening ($\xi_{uit} = 1$).

Bij gelijkblijvend verval ΔH_0 (zie vraag 4.4) schakelt men een pomp in met een opvoerhoogte $\Delta H_{pomp} = \Delta H_0$.

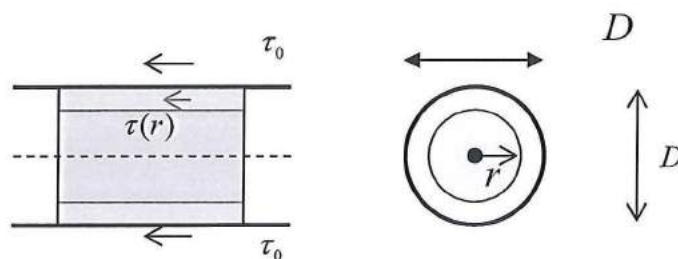
- 4.5* Bereken het piëzometrisch niveauverschil $h_A - h_B$ als de pomp aan staat.

Vraagstuk 5

Een lange, rechte buisleiding heeft een constante diameter $D = 0,25$ m. De stroming in de leiding is éénparig met een weerstandsverhang $i_w = 10^{-3}$.

- 5.1* Bereken de grootte van de schuifspanning τ_0 langs de buiswand.

Beschouw nu een cilindervormig balansgebied in de leiding met straal r .

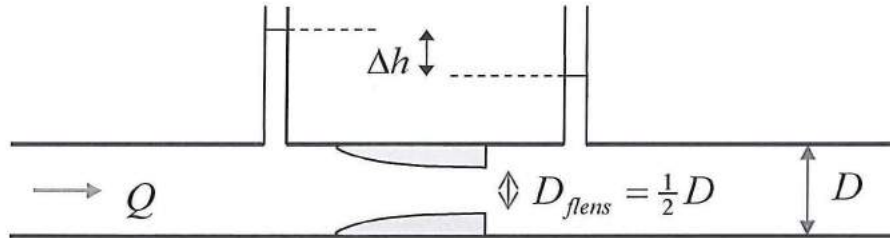


- 5.2* Leid via een evenwichtsbeschouwing voor het balansgebied het verloop af van de schuifspanning $\tau(r)$.

De Nikuradse ruwheidshoogte k_N van de buiswand bedraagt 0,5 mm.

- 5.3 Bereken het debiet Q in de leiding. De wandstroming is hydraulisch ruw.

In de leiding bevindt zich een zogenaamde meetflens bestaande uit een lokale vernauwing en twee stijgbuisjes, een en ander volgens onderstaande figuur.



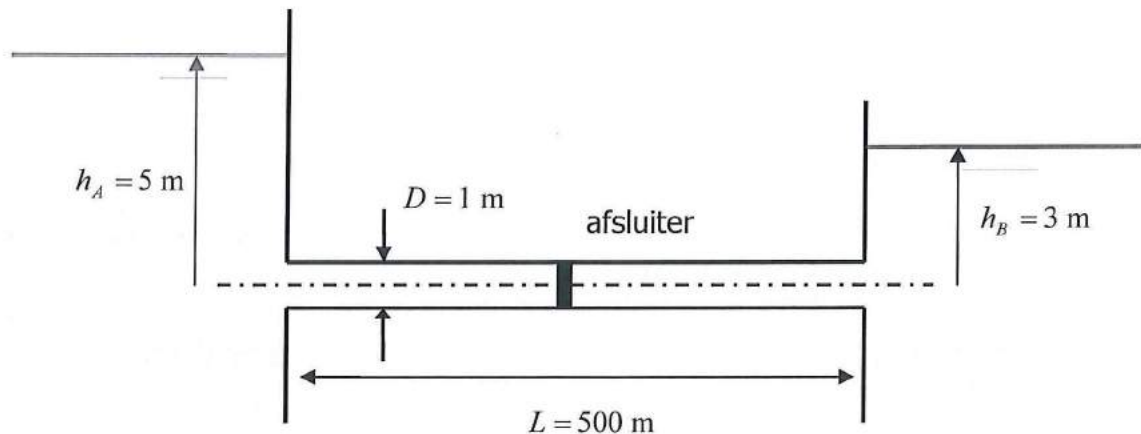
5.4* Bereken voor het debiet van 5.3 het verschil in piëzometrisch niveau Δh .

Door inschakeling van een pomp neemt Δh over de meetflens toe met 0,25 m.

5.5* Bereken het nieuwe weerstandsverhang i_w in de leiding na inschakeling van de pomp.

Vraagstuk 6

Een ronde, horizontale buisleiding met constante diameter $D = 1$ m en lengte $L = 500$ m verbindt twee grote waterreservoirs met constante maar onderling verschillende waterniveaus $h_A = 5$ m en $h_B = 3$ m, gemeten ten opzichte van de as van de buisleiding. Halverwege de leiding bevindt zich een afsluiter welke aanvankelijk dicht staat. Zie onderstaande schematische figuur.



6.1 Teken de verticale drukverdelingen in de leiding aan weerszijden van de afsluiter voorzien van de bijbehorende getalswaarden.

6.2 Bereken de netto horizontale drukkracht F_H van het water op de afsluiter.

Op tijdstip $t = 0$ wordt de afsluiter volledig geopend waarna de waterkolom in de leiding geleidelijk in beweging komt.

6.3 Bereken de versnelling van de vloeistof in de leiding op tijdstip $t = 0$.

Na verloop van tijd is de stroming in de leiding éénparig.

6.4* Bereken voor de éénparige toestand het debiet Q in de leiding. De wandstroming in de leiding is hydraulisch ruw met een Nikuradse-ruwheidshoogte $k_N = 1$ mm. Voor het instroomverlies geldt $\xi_{in} = 1$.

Men wil het beschikbare verval benutten voor energiewinning via het plaatsen van een turbine in de leiding. Vanwege de energieonttrekking door de turbine neemt het debiet in de leiding daarbij af tot $Q = 0,8 \text{ m}^3/\text{s}$. Alle overige gegevens blijven ongewijzigd.

6.5 Bereken het nominaal door de turbine opgewekte vermogen ΔP .

Vraagstuk 7

Een ronde buisleiding met diameter $D = 15$ cm en lengte $L = 200$ m verbindt twee waterreservoirs met onderling verschil in piëzometrisch niveau $\Delta h = 2,5$ m. De wandstroming is hydraulisch glad. Vertragsingsverliezen mogen worden verwaarloosd.

7.1 Bereken de schuifspanningssnelheid u_* in de leiding.

7.2 Bereken de dikte van de laminaire sublaag δ .

7.3 Bereken het debiet Q in de leiding.

Men schakelt een op de leiding aangesloten pomp aan met een netto opvoerhoogte $\Delta H_{pomp} = 2,5$ m.

7.4 Bereken het door de pomp geleverde vermogen ΔP_{pomp} .

Uitwerkingen

Vraagstuk 1

1.1 Langs een wand in een turbulent stromende vloeistof bevindt zich een dun laagje waar de stroming laminair is, de laminaire sublaag. Als de ruwheidselementen van de wand (korrels, oneffenheden) verzonken liggen in de laminaire sublaag is de wandstroming hydraulisch glad, steken ze er doorheen dan is de wandstroming hydraulisch ruw. (Er is ook nog een overgangsgebied.) Het is belangrijk dit onderscheid te maken omdat het iets zegt over het mechanisme van de overdracht van schuifspanning tussen de wand en de vloeistof.

1.2 Breng twee verliestermen in rekening: wandweerstand en uitstroomverlies. Voor wandweerstand geldt: $\Delta H_w = f \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g}$. Het uitstroomverlies is door de vernauwing aan het

eind van de leiding een vertragsverlies waarvoor geldt: $\Delta H_v = \frac{U_{gat}^2}{2g}$. Voor het totale

verlies geldt nu: $\Delta H = f \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g} + \frac{U_{gat}^2}{2g} = \left(f \frac{L}{D} + \frac{A^2}{(\mu A)^2} \right) \frac{U^2}{2g} = \xi \frac{U^2}{2g}$. De

weerstandscoefficiënt f kan bij hydraulisch ruwe wandstroming berekend worden via:

$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \frac{3,7D}{k_N}$, dit geeft $f = 0,0284$. Voor de totale verliescoëfficiënt van de leiding

geeft dit: $\xi = 0,0284 \times \frac{3000}{0,50} + \frac{\frac{1}{4}\pi 0,50^2}{0,02} = 267$.

1.3 Totale weerstandverlies: $H_{in} - H_{uit} = \Delta H_w = \xi \frac{U^2}{2g}$. Met het zeeniveau als

referentieniveau levert dit: $z_0 + \frac{\Delta p}{\rho g} + \frac{U^2}{2g} - 0 = \xi \frac{U^2}{2g}$, waarin $\Delta p / \rho g$ de gevraagde

drukhoogte aan het begin van de leiding is. Hiervoor geldt uiteindelijk (met $U = Q/A = 2,04$

m/s): $\Rightarrow \frac{\Delta p}{\rho g} = (\xi - 1) \frac{U^2}{2g} - z_0 = 46,24$ m.

1.4 Pompvermogen: $\Delta P_{pomp} = \rho g Q \Delta H_{pomp}$ waarbij $\Delta H_{pomp} = \frac{\Delta p}{\rho g}$ uit de vorige vraag

(ga dit zelf na). Na invulling volgt: $\Delta P_{pomp} = 1000 \times 9,81 \times 0,4 \times 46,24 = 181$ kW.

1.5 Het is hier het eenvoudigst het benodigd pompvermogen te berekenen bij een anderhalf keer zo groot debiet ($0,6 \text{ m}^3/\text{s}$). Een herhaling van IV.3 met een aangepaste waarde van Q geeft dan: $\frac{\Delta p}{\rho g} = 116,54 \text{ m}$ waarvoor het benodigd pompvermogen gegeven

is door (zie vraag IV.4) $\Delta P_{\text{pomp}} = 981 \times 0,6 \times 116,54 = 686 \text{ kW}$ (dit is ruim een verdrievoudiging). De ingenieur zou dus zijn tentamen vloeistofmechanica nog eens over moeten doen! In formulevorm is e.e.a. na te gaan als: $\Delta P_{\text{pomp}} = \rho g Q \left[(\xi - 1) \frac{Q^2}{2gA^2} - z_0 \right]$ waaruit blijkt dat het vermogen ongeveer evenredig is met de derde macht van het debiet (op een kleine term met z_0 na). Een debietverhoging met 50% geeft dus inderdaad ruim een verdrievoudiging van het pompvermogen.

Vraagstuk 2

2.1 De energiebalans is: $\Delta H + \Delta H_{\text{pomp}} = \Delta H_w + \Delta H_v$

Waarin $\Delta H = h_1 - z_{\text{uit}}$ (verval) $\Delta H_{\text{pomp}} = \frac{P}{\rho g Q}$ (opvoerhoogte pomp)

$\Delta H_w = f \frac{L}{D} \frac{Q^2}{2A^2 g}$ (wandwrijving) $\Delta H_v = \xi_{\text{uit}} \frac{Q^2}{2A^2 g}$ (uittreeverlies)

Dit geeft: $h_1 - z_2 + \frac{P}{\rho g Q} = \left(f \frac{L}{D} + \xi_{\text{uit}} \right) \frac{Q^2}{2A^2 g}$.

2.2 Voor de weerstandsfactor (hydr ruw) geldt $\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \frac{3,7D}{k_N} \Rightarrow f = 0,0159$

2.3 Het debiet wordt gegeven door (zie vraag 1):

$h_1 - z_2 + \frac{P}{\rho g Q} = \left(f \frac{L}{D} + \xi_{\text{uit}} \right) \frac{Q^2}{2A^2 g}$ Deze vergelijking kan d.m.v iteratie worden opgelost.

Herschrijf bijvoorbeeld tot:

$$Q_k = \sqrt{\frac{2A^2 g \left(h_1 - z_2 + \frac{P}{\rho g Q_{k-1}} \right)}{f \frac{L}{D} + \xi_{\text{uit}}}}$$

Starten met $Q^0 = 1 \text{ m}^3/\text{s}$ en $\xi_{uit} = 1$, $A = \frac{1}{4}\pi D^2 = 0.44 \text{ m}^2$ en $f = 0,0159$ geeft:

$$Q_1 = 2.02 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$$

$$Q_2 = 2.01 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$$

$$Q_3 = 2.01 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$$

Dus het debiet Q door de leiding is ongeveer $2.01 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$.

2.4 De opvoerhoogte van de pomp wordt gegeven door: $\Delta H_{pomp} = \frac{P}{\rho g Q} = 2.02 \text{ m}$

2.5 Bij de opening is het energieniveau gelijk aan $H_1 = h_1 = 3 \text{ m}$. Aangezien Q constant is, is de snelheid U bij de opening bekend. Dit geeft een stijghoogte in de instroomopening

van $h_m = h_1 - \frac{Q^2}{2gA^2} = 1.94 \text{ m}$ en dus een waterdruk van $p_0 = 19.1 \text{ kN}$

Vlak voor de pomp is de energiehoopte (alleen energieverlies door wrijving):

$$H_2 = H_1 - f \frac{\frac{1}{2}L}{D} \frac{Q^2}{2A^2g} = 1.52 \text{ m}$$
 Dit geeft een stijghoogte van

$$h_2 = H_2 - z_p - \frac{Q^2}{2gA^2} = -4.54 \text{ m}$$
 en een druk van $p_2 = -44.6 \text{ kN}$. Vlak na de pomp stijgt de

energiehoopte met $\Delta H_{pomp} = 2.02 \text{ m}$ en wordt daar dus $H_3 = H_2 + 2.02 = 3.54 \text{ m}$. De

stijghoogte is dan $h_3 = -2.52 \text{ m}$ en de druk dus $p_3 = -24.7 \text{ kN}$. Van de pomp tot de

uitstroomopening daalt de energiehoopte weer linear door wrijving:

$$H_{uit} = H_3 - f \frac{\frac{1}{2}L}{D} \frac{Q^2}{2A^2g} = 2.06 \text{ m}$$
. Dit geeft een stijghoogte van

$$h_{uit} = H_{uit} - z_{uit} - \frac{Q^2}{2gA^2} = 0 \text{ m}$$
 en een druk van $p_3 = 0 \text{ kN}$. Dit resultaat was te verwachten

aangezien de druk bij de uitstroomopening atmosferisch is (en deze hebben we op nul gesteld).

Vraag 3

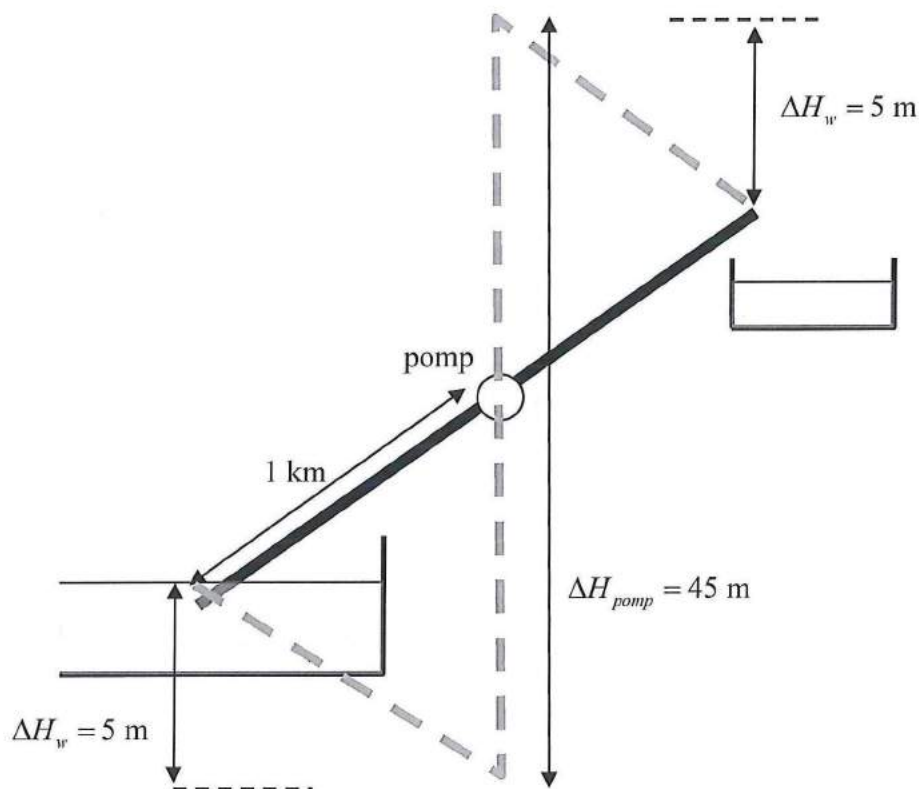
3.1 Zie formuleblad: $\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \frac{3.7D}{k_N} \Rightarrow f = 0,0196$.

3.2* Opvoerhoogte: $\Delta H_{pomp} = \Delta z + \Delta H_w = \Delta z + f \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g} = \Delta z + f \frac{L}{D} \frac{Q^2}{2gA^2}$.

Uit de gegevens volgt nu: $Q = \sqrt{\frac{D}{fL}} A \sqrt{2g(\Delta H_{pomp} - \Delta z)} = 1,06 \text{ m}^3/\text{s}$.

3.3 Pompvermogen: $\Delta P_{pomp} = \rho g Q \Delta H_{pomp} = 469,0 \text{ kW}$.

3.4 Zie onderstaande figuur.



3.5* Het weerstandsverval over de twee leidingen vóór de pomp bedraagt:

$$\Delta H_{w,1} = f \frac{L_1}{D} \frac{Q_1^2}{2gA^2} = f \frac{\frac{1}{2}L}{D} \frac{(\frac{1}{2}Q)^2}{2gA^2} = \frac{1}{8} f \frac{L}{D} \frac{Q^2}{2gA^2}, \text{ en het weerstandsverval in de enkele}$$

$$\text{leiding na de pomp bedraagt: } \Delta H_{w,2} = f \frac{L_2}{D} \frac{Q_2^2}{2gA^2} = \frac{1}{2} f \frac{L}{D} \frac{Q^2}{2gA^2}.$$

In totaal geeft dit: $\Delta H_{pomp} = \Delta z + \Delta H_{w,1} + \Delta H_{w,2} = \Delta z + \frac{5}{8} f \frac{L}{D} \frac{Q^2}{2gA^2}$.

De benodigde opvoerhoogte voor $Q = 2 \text{ m}^3/\text{s}$ wordt:

$$\Delta H_{pomp} = \Delta z + \frac{5}{8} f \frac{L}{D} \frac{Q^2}{2gA^2} = 59,75 \text{ m. Dit komt overeen met een vermogen:}$$

$\Delta P_{pomp} = \rho g \Delta H_{pomp} Q = 1,1724 \text{ MW}$ een extra vermogen ten opzichte van de oorspronkelijke situatie van 729 kW.

Vraag 4

4.1 De flens geeft een vertragsingsverlies evenredig met de snelheidshoogte: $\Delta H \propto \frac{u^2}{2g}$

(Carnot verlies). Als dit verband exact bekend is (hangt af van de geometrie), kan door het meten van ΔH via de twee stijgbuisjes de stroomsnelheid u bepaald worden.

4.2 Regel van Carnot:
$$\Delta H = \frac{(\Delta u)^2}{2g} = \frac{(u_B - u_{flens})^2}{2g} = \xi_{flens} \frac{u_B^2}{2g},$$

$$\text{waarin : } \xi_{flens} = \left(1 - \frac{u_{flens}}{u_B}\right)^2 = \left(1 - \frac{A}{A_{flens}}\right)^2 = 9$$

Vanwege $u_A = u_B$ geldt $\Delta H = h_A - h_B = \Delta h = 0,30 \text{ m}$.

Hieruit volgt: $u_B = \sqrt{2g\Delta h / \xi_{flens}} = 0,81 \text{ m/s}$ en $Q = \frac{1}{4} \pi D^2 u_B = 0,16 \text{ m}^3/\text{s}$.

4.3 In een turbulente stroming is de stroming tot een afstand δ van de wand laminair (laminaire sublaag). Bij hydraulisch ruwe wandstroming steken de ruwheidselementen (met hoogte k) door deze laminaire sublaag heen in de turbulente hoofdstroming: $k \gg \delta$. De wandstroming is hydraulisch glad indien de ruwheidselementen volledig verzonken liggen in de laminaire sublaag: $k \ll \delta$. Het is van belang dit onderscheid te maken omdat in het gladde geval de ruwheid geen invloed heeft op de turbulente hoofdstroom. De verhouding k/δ is hiervoor bepalend.

4.4 Energieverval over de leiding:
$$\Delta H_0 = \left(f \frac{L}{D} + \xi_{flens} + \xi_{uit} \right) \frac{u^2}{2g}$$

White-Colebrook (hydraulisch ruw): $\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \frac{3,7D}{k_N} \Rightarrow f = 0,0284$

Voor $\xi_{flens} = 9$, $\xi_{uit} = 1$ volgt nu (met $u = 0,81$ m/s): $\Delta H_0 = 1,28$ m.

- 4.5 Met de pomp aan geldt: $\Delta H_0 + \Delta H_{pomp} = \xi \frac{u^2}{2g}$, waarin ξ de totale verliesfactor van de leiding is ($\xi = fL/D + \xi_{flens} + \xi_{uit}$). Door de pomp neemt de snelheidshoogte in de leiding toe met een factor $\frac{\Delta H_0 + \Delta H_{pomp}}{\Delta H_0} = 2$. Het energieverlies bij de flens is evenredig met de snelheidshoogte en neemt dus ook toe met een factor twee tot $2 \times 30 \text{ cm} = 60 \text{ cm}$.

Vraagstuk 5

5.1* éénparige stroming: verhangkracht maakt evenwicht met de schuifspanning geïntegreerd langs de natte omtrek:

$$\tau_0 P = \rho g A i_w \text{ waaruit eenvoudig volgt: } \tau_0 = \frac{\rho g A i_w}{P} = 0,613 \text{ N/m}^2$$

5.2 toepassing van hetzelfde principe op een cilindertje met willekeurige straal r geeft:

$$\tau(r) = \frac{\rho g A(r) i_w}{P(r)} = \rho g i_w \frac{\pi r^2}{2\pi r} = \frac{1}{2} \rho g i_w r \text{ de schuifspanning verloopt lineair met de}$$

afstand r tot de as van de buis

5.3* voor het weerstandsverhang geldt: $i_w = \frac{f U^2}{D 2g} \Rightarrow U = \sqrt{\frac{2g D i_w}{f}}$ en

$$Q = A \sqrt{\frac{2g D i_w}{f}} \text{ de weerstandsfactor berekenen we via: } \frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \frac{3,7D}{k} \Rightarrow f = 0,0234$$

waaruit volgt: $Q = 0,0225 \text{ m}^3/\text{s}$ ($U = 0,46$ m/s).

5.4* verschil in piëzometrisch niveau over de flens is gelijk aan het bijbehorende verschil in energiehoopte (gelijke doorsneden) welke we kunnen berekenen met de regel van Carnot:

$$\Delta h_{flens} = \Delta H_{flens} = \frac{\Delta U_{flens}^2}{2g} = \frac{1}{2g} \left(\frac{Q}{A} - \frac{Q}{A_{flens}} \right)^2 = \frac{Q^2}{2gA^2} \left(1 - \frac{A}{A_{flens}} \right)^2 = \frac{Q^2}{2gA^2} \times 9$$

we krijgen zo uiteindelijk: $\Delta h_{flens} = 9,61 \text{ cm}$

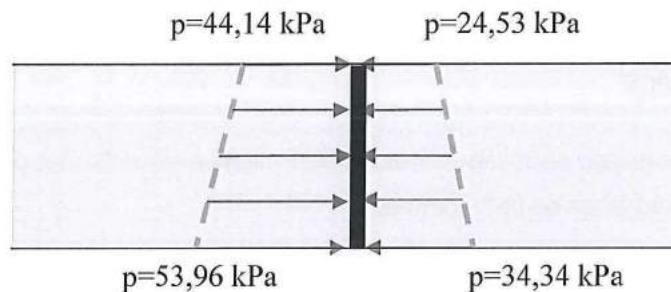
5.5* zowel het verval over de flens als het weerstandsverhang i_w zijn even-redig met Q^2 , een toename van het verval over de flens geeft dus een evenredige toename van het

weerstandsverhang: $i_w = 10^{-3} \times \frac{25 + 9,81}{9,81} = 0,0809$

Vraagstuk 6

6.1 Druk verloopt hydrostatich volgens:

$$p - p_{atm} = \rho g (h - z) \Rightarrow \text{lineair afh. van } z$$



6.2 Formeel gaat de berekening als volgt:

$$F_H = \iint_A (p_{links} - p_{rechts}) dA = \rho g \iint_A (h_A - z - (h_B - z)) dA = \rho g (h_A - h_B) \iint_A dA = \rho g \Delta h \times A$$

$$A = \frac{1}{4} \pi D^2 = 0,785 \text{ m}^2 \Rightarrow F_H = 15,41 \text{ kN}$$

6.3 Op $t=0$ is de wandweerstand (evenredig met U^2 gelijk aan nul) en geldt de

$$\text{vergelijking van Euler in s-richting: } \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \left(\frac{1}{2} U^2 \right)}{\partial s} = -g \frac{\partial h}{\partial s} = \frac{h_B - h_A}{L}$$

Op $t=0$ is de tweede term aan de linkerkant (de zgn. advectione versnelling) ook gelijk aan nul (omdat $U=0$ op $t=0$), er blijft dan over:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -g \frac{h_B - h_A}{L} = -9,81 \times \frac{3-5}{500} = +0,0392 \text{ m/s}^2 \text{ (merk op dat alle waterdeeltjes in de}$$

leiding op $t=0$ dezelfde versnelling ondergaan, beredeneer zelf waarom).



6.4 In de éénparige toestand geldt:

$$\Delta H = \underbrace{\Delta H_w}_{\text{verliezen tgv wandweerstand}} + \underbrace{\Delta H_v}_{\text{vertragsverliezen}} = \left(f \frac{L}{D} + \xi_{in} + \xi_{uit} \right) \frac{U^2}{2g} = h_A - h_B = 2 \text{ m}$$

Bereken eerst de

weerstandsfactor f (White-Colebrook):

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log_{10} \frac{3,7D}{k_N} \quad (\text{hydraulisch ruw dus } \delta \text{ is niet van belang}) \Rightarrow f = 0,0196 \quad \text{Er volgt}$$

$$\text{nu: } \left(0,0196 \times \frac{500}{1} + 1 + 1 \right) \frac{U^2}{2g} = 11,8 \frac{U^2}{2g} = 2 \text{ m} \Rightarrow U = 1,82 \text{ m/s, } Q = UA = 1,43 \text{ m}^3/\text{s}$$

6.5 Bereken eerst het verval over de turbine:

$$\Delta H = \Delta H_w + \Delta H_v + \Delta H_{turbine} = h_A - h_B = 2 \text{ m}$$

$$\text{Werk dit weer om tot: } \Delta H = \left(f \frac{L}{D} + \xi_{in} + \xi_{uit} \right) \frac{U^2}{2g} + \Delta H_{turbine} = 2 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \Delta H_{turbine} = 2 - 11,8 \frac{U^2}{2g} = 2 - 11,8 \frac{Q^2}{2gA^2} = 2 - 11,8 \frac{0,8^2}{2g \times 0,78^2} = 1,375 \text{ m}$$

Het door de turbine geleverde vermogen is nu:

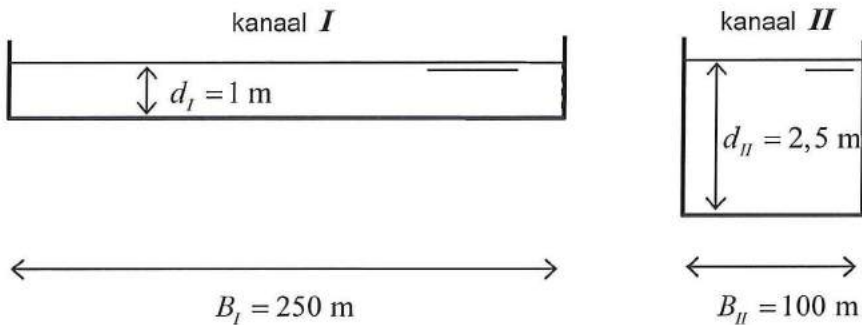
$$\Delta P_{turbine} = \rho g \Delta H_{turbine} Q = 10,79 \text{ kW (ca. 10 stofzuigers!)}$$

Vraagstuk 7

Uitgewerkt op college.

Vraagstuk 1

Twee prismatische kanaalsecties *I* en *II* hebben een even groot stroomvoerend oppervlak maar een verschillende diepte en breedte. Het bodemverhang i_b bedraagt in beide gevallen $2 \cdot 10^{-4}$. Zie onderstaande schematische weergave:



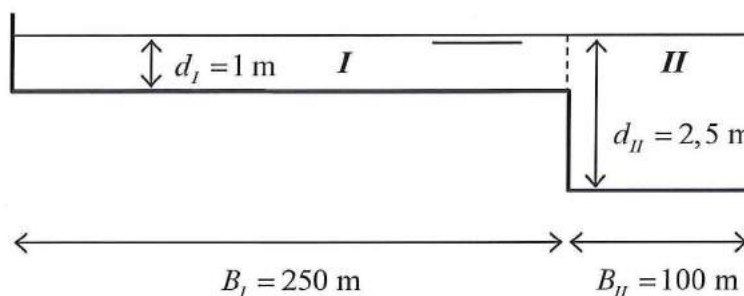
In beide kanaalsecties heerst een éénparige stromingstoestand.

- 1.1 Bereken per kanaalsectie de weerstandskracht W per meter kanaallengte en de gemiddelde resulterende wandschuifspanning $\langle \tau_0 \rangle$ langs de natte omtrek P .

De maatgevende ruwheidshoogte k bedraagt in beide secties 15 cm waarbij de wandstroming hydraulisch ruw is.

- 1.2 * Bereken de gemiddelde stroomsnelheid in kanaal *I* en de gemiddelde stroomsnelheid in kanaal *II*. Neem daarbij $R = d$.

Een prismatische rivier heeft tijdens hoogwater een dwarsprofiel bestaande uit een uiterwaard (*I*) en een geul (*II*), waarvan de afmetingen overeenkomen met de respectievelijke kanaalprofielen uit het voorgaande deel van dit vraagstuk.



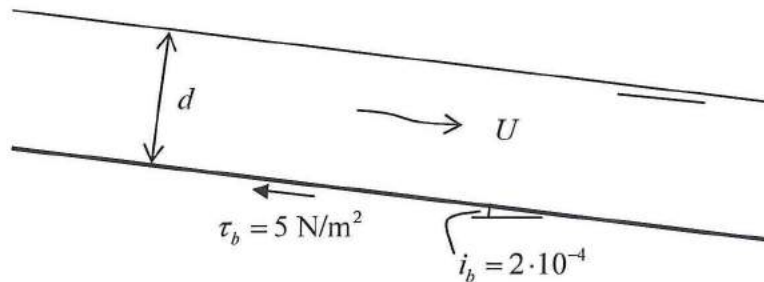
De bodemhelling i_b van de rivier bedraagt eveneens $2 \cdot 10^{-4}$.

- 1.3 Bereken voor de éénparige toestand de gemiddelde schuifspanning $\langle \tau_0 \rangle$ langs de natte omtrek P van de rivier. Wat kun je daarbij zeggen over de gemiddelde schuifspanning in de deelgebieden *I* en *II* afzonderlijk?

- 1.4* Geef voor een ruwheidshoogte k van 15 cm het debiet in de rivier. Neem aan dat tussen de delen I en II (langs de stippellijn in de figuur) en langs de zijwanden geen schuifspanning wordt overgedragen.

Vraagstuk 2

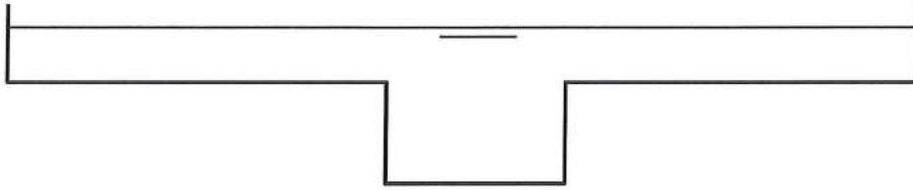
Beschouw de éénparige stroming van water in een zeer breed kanaal met constante diepte d en bodemhelling $i_b = 2 \cdot 10^{-4}$. De stroming is turbulent met een bodemschuifspanning τ_b van 5 N/m^2 en een schuifspanning aan het oppervlak τ_{opp} gelijk aan nul. Zie onderstaande schets.



- 2.1* Maak een schets van het verloop van de (turbulente) schuifspanning over de waterdiepte voorzien van een korte uitleg.
- 2.2 Bereken de waterdiepte d .
- De Nikuradse wandruwheid k_N bedraagt 5 cm.
- 2.3* Bereken de schuifspanningssnelheid u_* en controleer of de wand-stroming hydraulisch ruw of glad is.
- 2.4 Bereken de diepte-gemiddelde stroomsnelheid.
- 2.5 Maak een tekening van het snelheidsprofiel. Schets in dezelfde figuur het snelheidsprofiel van een laminaire stroming met eenzelfde gemiddelde snelheid en diepte, voorzien van kort commentaar.

Vraagstuk 3

Beschouw een recht prismatisch kanaal met bodemhelling i_b en een éénparige stroming. De dwarsdoorsnede van het kanaal is schetsmatig weergegeven in onderstaande figuur.



- 3.1 Geef aan waarom in bovenstaand voorbeeld de bodemschuifspanning τ_b varieert langs de natte omtrek.
- 3.2 Welke krachten zijn met elkaar in evenwicht op het moment dat de stroming éénparig is?
- 3.3 Geef uitgaande van dit evenwicht een uitdrukking voor de gemiddelde bodemschuifspanning $\langle \tau_b \rangle$ langs de natte omtrek.

De dwarsprofiel gemiddelde schuifspanningssnelheid $\langle u_* \rangle$ in bovenstaande situatie bedraagt 0,05 m/s en de hydraulische straal R bedraagt 3,5 m.

- 3.4 Bereken de bodemhelling i_b .

Uitwerkingen

Vraagstuk 1

- 1.1 In de ééparige toestand maakt de weerstand W evenwicht met de component van de gewichtskracht van het water in stroomrichting. Voor een stukje kanaal met een lengte Δs in stroomrichting luidt dit evenwicht:

$$\Delta W = \rho g B d i_b \Delta s$$

De beide kanaalsecties hebben een gelijk dwarsoppervlak Bd waardoor in beide gevallen de weerstandskracht per m gelijk wordt aan:

$$\Delta W = \rho g \underbrace{Bd}_{250 \text{ m}^2} \underbrace{i_b \Delta s}_{1 \text{ m}} = 0,49 \text{ kN/m}$$

Omdat beide kanalen een van elkaar verschillende natte omtrek hebben ($P = B + 2d$) is de gemiddelde wandschuifspanning voor beide kanalen verschillend. In formulevorm:

$$\langle \tau_0 \rangle = \frac{\Delta W}{P \Delta s} = \frac{\rho g B d i_b}{B + 2d} = \rho g R i_b$$

(mag hier evt. worden vereenvoudigd tot: $\langle \tau_0 \rangle = \rho g d i_b$)

Zodat:

$$\langle \tau_0 \rangle_I = \frac{\Delta W_I}{P_I \Delta s} = 1,95 \text{ N/m}^2$$

$$\langle \tau_0 \rangle_{II} = \frac{\Delta W_{II}}{P_{II} \Delta s} = 4,67 \text{ N/m}^2$$

- 1.2 De gemiddelde bodemschuifspanning is evenredig met het kwadraat van de gemiddelde stroomsnelheid volgens:

$$\langle \tau_0 \rangle = c_f \rho U^2, \quad \text{met} \quad \frac{1}{\sqrt{c_f}} = 5,75 \log \frac{12R}{k}$$

$$\text{Zodat} \quad U = \frac{1}{\sqrt{c_f}} \sqrt{g R i_b} = 5,75 \log \left(\frac{12R}{k} \right) \sqrt{g R i_b}$$

Invullen van de gegeven grootheden waarbij $R = Bd/(B + 2d)$ geeft tenslotte:

$$U_I = 0,48 \text{ m/s}$$

$$U_{II} = 0,90 \text{ m/s}$$

Een smal, diep kanaal kan dus bij een zelfde verhang meer water afvoeren dan een breed en ondiep kanaal met hetzelfde stroomvoerend oppervlak.

1.3 Gemiddelde bodemschuifspanning:

$$\langle \tau_0 \rangle = \frac{\Delta W}{P \Delta s} = \frac{\rho g A i_b}{P} = 2,76 \text{ N/m}^2$$

De gemiddelde schuifspanning in de uiterwaard (deel I) is vrijwel gelijk aan het bij vraag 1.1 gegeven antwoord voor kanaal I. De door de schuifspanning te compenseren component van de gewichtskracht in stroomrichting is voor beide dwarsprofielen immers gelijk. De natte omtrek is in beide gevallen vrijwel hetzelfde resulterend in een nagenoeg gelijke schuifspanning. (Een geheel analoge redenering geldt voor respectievelijk de geul en kanaal II.)

1.4 Het totale debiet is gelijk aan de som van de debieten van de kanaalsecties I en II uit vraag 1.2 (zie diktaat blz. 215):

Vraagstuk 2

- 2.1 Beschouw de situatie per eenheid van breedte. Kies daarbij de x-richting langs de bodem en de z-richting loodrecht op de bodem met $z = 0$ t.p.v. de bodem en $z = d$ t.p.v. de waterspiegel. Uit de impulsbalans in x-richting voor een waterkolom tussen een hoogte z vanaf de bodem tot het wateroppervlak volgt bij éénparige stroming dat de schuifspanning $\tau(z)$ gelijk is aan de gewichtsc component van de kolom water langs de bodem (netto bijdrage impulstransport drufgradiënt is immers gelijk aan nul):

$$\tau(z) \Delta x = \underbrace{\rho g (d - z) \Delta x}_{\text{gewicht p.e.v. breedte kolom met lengte } \Delta x} \times \underbrace{i_b}_{\text{component ervan langs bodem}} \Leftrightarrow \tau(z) = \underbrace{\rho g d i_b}_{\text{bodemschuifspanning } \tau_b} \left(1 - \frac{z}{d}\right)$$

Dit geeft een lineair variërend verloop in z-richting van de schuifspanning met een maximale waarde $\rho g d i_b = \tau_b$ bij de bodem en een waarde nul aan het oppervlak (zie figuur 13.2 uit het collegediktaat).

2.2 Uit voorgaande formule volgt: $\tau(z=0) = \tau_b = \rho g i_b d$

waaruit met de gegeven getalswaarden volgt: $d = \frac{\tau_b}{\rho g i_b} = 2,55 \text{ m.}$

2.3 Voor de schuifspanningsnsnheid u_* geldt per definitie: $\rho u_*^2 = \tau_b$

Met de gegeven waarde van τ_b vinden we: $u_* = 0,07 \text{ m/s}$. De wandstroming is nu hydraulisch ruw als (zie formuleblad):

$$Re_* = \frac{u_* k_N}{\nu} > 1, \quad \nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

Met de gegeven waarde van k_N geeft dit $Re_* = 3500 \gg 1$, de wandstroming is dus hydraulisch ruw.

2.4 Voor de diepte-gemiddelde stroomsnelheid U geldt:

$$U = \frac{u_*}{\sqrt{c_f}}, \quad \text{immers } u_*^2 = c_f U^2$$

Hierin is c_f een dimensieloze weerstandscoefficiënt gegeven door (hydraulisch ruwe stroming):

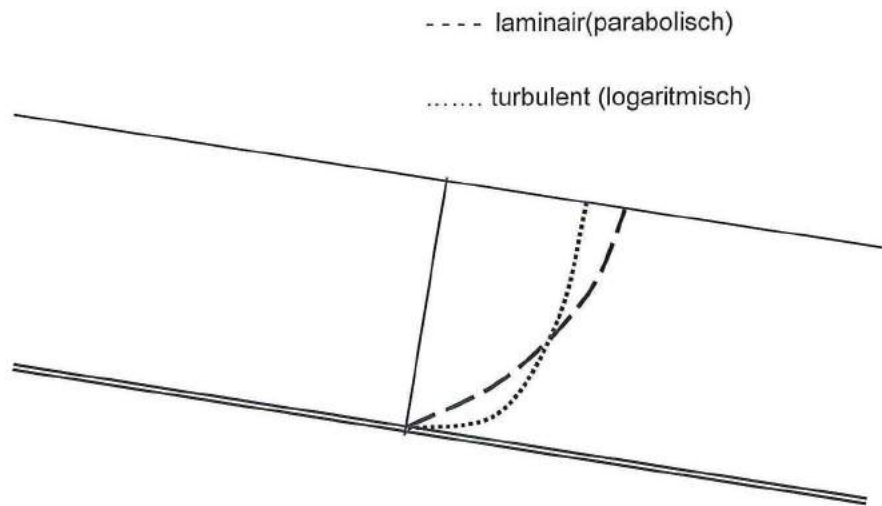
$$\frac{1}{\sqrt{c_f}} = 5,75 \log \frac{12d}{k} = 16,02$$

De gemiddelde stroomsnelheid U bedraagt dan $16,02 \times 0,07 = 1,12 \text{ m/s}$

2.5 Laminaire stroming: parabolisch snelheidsprofiel (met $u=0$ aan de bodem en $du/dz = 0$ aan het oppervlak).

Turbulente stroming: logaritmisch snelheidsprofiel: van de wand af is door de sterke (turbulente) menging het snelheidsprofiel gelijkmatig, dichtbij de

wand is bij gelijke gemiddelde snelheid de gradient van de snelheid relatief groot. Zie onderstaande figuur:



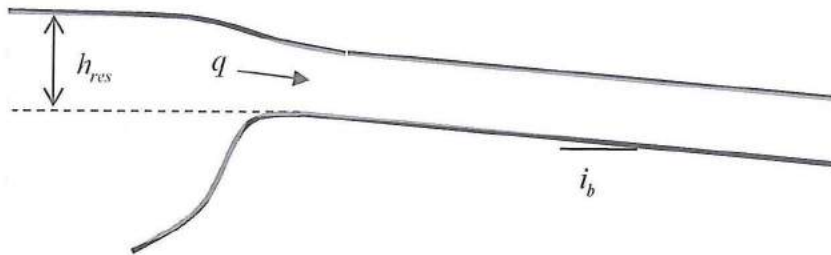
Vraagstuk 3

Uitwerking op college.

Vraagstukken Hoofdstuk 14 Langzaam variërende stromen

Vraagstuk 14.1

Water stroomt uit een reservoir via een korte, vloeiende overgang in een prismatisch kanaal met bodemhelling $i_b = 1 \times 10^{-4}$ en weerstandsfactor $c_f = 5 \times 10^{-3}$. De benedenstroomse randvoorwaarde ligt zover weg dat de invloed ervan bij het instroompunt niet merkbaar is. Zie onderstaande schets van de situatie.

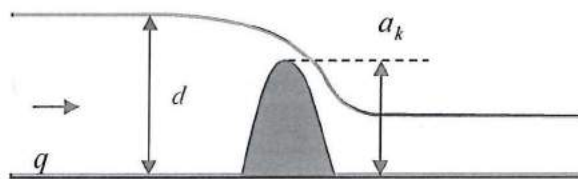


- 1.1 Beargumenteer waarom onmiddellijk na instroming uit het reservoir de waterdiepte in het kanaal de evenwichtsdiepte d_e aanneemt.

Het reservoirpeil h_{res} ligt 4 m boven de bodemhoogte bij het instroompunt.

- 1.2* Bereken de waterdiepte d_e en het specifieke debiet q in het kanaal.

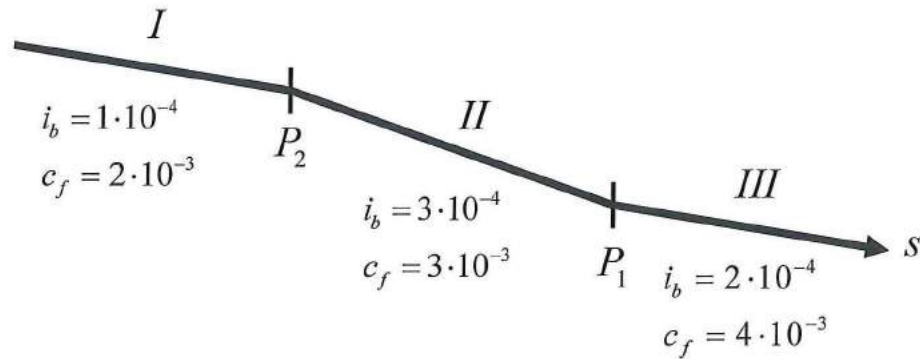
Op zeer grote afstand van het instroompunt bevindt zich over de volle breedte van het kanaal een volkomen overlaat met kruinhoogte $a_k = 3$ m ten opzichte van het lokale bodemniveau. Zie onderstaande schets.



- 1.3 Bereken de waterdiepte d_k op de kruin van de overlaat.
Gebruik $q = 5 \text{ m}^2/\text{s}$ als je het antwoord op vraag 1.2 niet kon berekenen.
- 1.4 Bereken de waterdiepte d vlak vóór de overlaat.
- 1.5* Bereken de waterdiepte 10 km bovenstrooms van de overlaat. Gebruik de oplossing voor kleine afwijkingen van de eenparige toestand.

Vraagstuk 14.2

In een rivier met constante breedte zijn drie verschillende trajecten te onderscheiden, respectievelijk *I*, *II* en *III*, met onderling verschillende bodemhellingen i_b en weerstandscoefficienten c_f . Zie onderstaande schets.



- 2.1 Leg in de context van de theorie van verhanglijnen het verschil uit tussen een 'steile' en een 'flauwe' bodemhelling en toon aan dat alle hier beschouwde bodemhellingen flauw zijn.

De benedenstroomse randvoorwaarde ligt zover weg dat de invloed ervan in punt P_1 niet merkbaar is. De waterdiepte in punt P_1 bedraagt 3 m.

- 2.2* Bereken de afvoer per eenheid van breedte q die in de gegeven situatie optreedt. De rivierbreedte mag daarbij zeer groot worden verondersteld t.o.v. de waterdiepte. (Kom je er niet uit, neem dan in het vervolg van dit vraagstuk $q = 4 \text{ m}^2/\text{s}$ aan.)
- 2.3 Bereken de evenwichtsdiepten en de grensdiepten langs de trajecten *I*, *II* en *III* en maak hiervan een schets tezamen met het kwalitatieve verloop van de waterstand in de drie kanaalsecties.

Traject *II* heeft een totale lengte van 5 km. De waterdiepte in de gehele rivier ligt in de buurt van de lokale evenwichtsdiepte.

- 2.4 Bereken de waterdiepte in punt P_2 .

Men overweegt op een afstand Δs benedenstrooms van P_1 een stuw aan te leggen zodanig dat de waterdiepte in P_1 vergroot wordt.

- 2.5* Voor welke afstand Δs is bij een debiet gelijk aan dat van vraag 1.2 de maximale opstuwing bij de stuw nog voor 50% in P_1 merkbaar?

Vraagstuk 14.3

Beschouw een rivier met bodemhelling $i_b = 2 \cdot 10^{-4}$ en breedte $B = 80$ m. De rivier heeft een afvoer $Q = 360$ m³/s en de weerstandscoefficiënt c_f bedraagt 0,004.

- 3.1 Geef een beknopte omschrijving van de begrippen "grensdiepte" en "evenwichtsdiepte" en bereken beide grootheden voor de gegeven situatie.
- 3.2 Hebben we hier te maken met een "flauwe" of een "steile" bodemhelling? Geef op grond hiervan aan of voor verhanglijnberekeningen de waterstandsrandvoorwaarde bovenstrooms of benedenstrooms moet worden opgelegd.

De rivier mondt uit in een meer met een constant waterpeil. De waterdiepte d_0 in de rivier ter plaatse van de monding bedraagt 4 m. Een bovenstrooms gelegen punt P heeft een afstand tot de monding van 7,5 km.

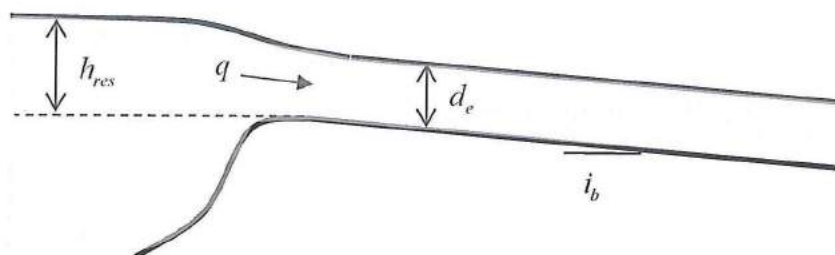
- 3.3* Bereken de water diepte d_p in het punt P . Maak gebruik van de theorie voor kleine afwijkingen van de éénparige toestand.

Vanaf zeker moment wordt ten behoeve van de drinkwatervoorziening in punt P een debiet ΔQ van 150 m³/s aan de rivier onttrokken.

- 3.4* Maak een duidelijke schets van het verloop van de waterstand in de rivier vanaf de monding tot een punt op ruime afstand bovenstrooms van P . Geef hierin het verloop van de grensdiepte en de evenwichtsdiepte langs het getekende riviertraject weer voorzien van de bijbehorende getalswaarden.
- 3.5 Bereken de verandering van de waterstand in P als gevolg van de onttrekking. Ga wederom uit van kleine afwijkingen van de éénparige toestand.

Vraagstuk 14.4

Water stroomt uit een reservoir via een korte, vloeiende overgang in een prismatisch kanaal met bodemhelling $i_b = 10^{-4}$ en weerstandsfactor $c_f = 2 \cdot 10^{-3}$. Zie onderstaande schets van de situatie.



- 4.1 Geef een kernachtige omschrijving van de begrippen "flauwe" en "steile" bodemhelling, en toon aan dat de bodemhelling in dit geval flauw is.

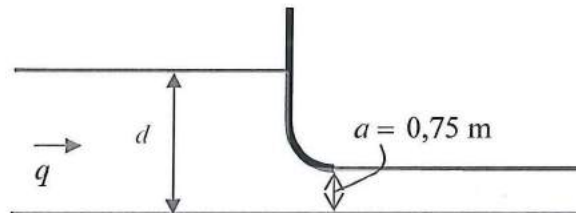
De afvoer in het kanaal is vooralsnog ongestuwd.

- 4.2 Beargumenteer waarom onmiddellijk na instroming uit het reservoir de waterdiepte in het kanaal de evenwichtsdiepte d_e aanneemt.

Het reservoirpeil h_{res} bedraagt 5 m t.o.v. de bodemhoogte bij het instroompunt.

- 4.3* Bereken het specifieke debiet q in het kanaal.

Op zeer grote afstand van het instroompunt wordt over de volle breedte een stuw aangelegd. Zie onderstaande schets bij een gedeeltelijk geopende stuw.



- 4.4 Bereken de waterdiepte d vlak voor de stuw. Neem $q = 7 \text{ m}^2/\text{s}$ als je het antwoord op vraag 4.3 niet kon berekenen.
- 4.5* Bereken de waterdiepte 10 km bovenstrooms van de stuw en maak een schets van de bijbehorende stuwkromme voorzien van kort commentaar. Gebruik de oplossing voor kleine afwijkingen van de eenparige toestand.

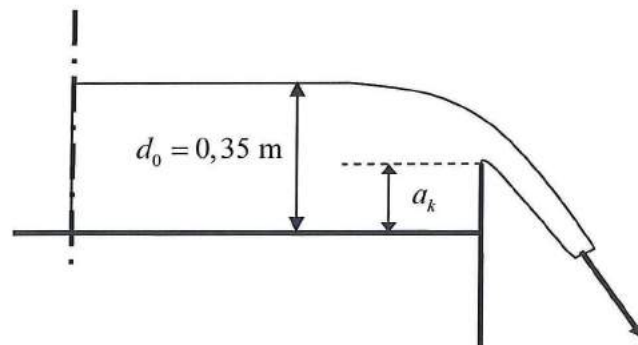
Vraagstuk 14.5

Een afvoergoot van het dak van een tuinbouwkas heeft een bodemhelling i_b van $1 \cdot 10^{-2}$ en een dimensieloze weerstandscoefficient c_f van $5 \cdot 10^{-3}$. Het specifieke debiet q in de goot bedraagt $0,35 \text{ m}^2/\text{s}$.

- 5.1 Geef een korte omschrijving van het begrip grensdiepte en bereken de grensdiepte voor de gegeven situatie.
- 5.2 Idem voor de evenwichtsdiepte.
- 5.3 Is in dit geval sprake van een flauwe of een steile bodemhelling? Beargumenteer je antwoord.

De goot stroomt uit via een korte overlaat met afvoerrelatie $q = m \frac{2}{3} E_k \sqrt{\frac{2}{3} g E_k}$, waarin E_k de energiehogte is ten opzichte van de kruin en m de afvoercoëfficiënt.

De waterdiepte d_0 op korte afstand van de overlaat bedraagt 0,35 m. Zie onderstaande schets.



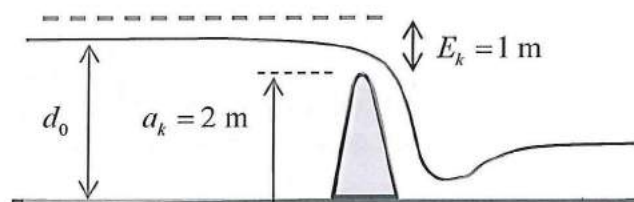
5.4* Bepaal voor $m = 1,25$ de kruinhoogte a_k ten opzichte van de bodem van de goot.

Op relatief grote afstand bovenstrooms van de overlaat geldt $d = d_e$.

5.5* Maak een ruwe schets van het verloop van de waterstand in de goot, voorzien van kort commentaar (een berekening hoeft niet).

Vraagstuk 14.6

Een rivier heeft een constante breedte B van 65 m. Ten behoeve van een irrigatieproject bouwt men over de volledige breedte van de rivier een stuw uitgevoerd als een korte volkomen overlaat met een kruinhoogte a_k van 2 m ten opzichte van de lokale bodemhoogte. De specifieke energiehogte E_k op de kruin van de stuw bedraagt 1 m. Zie onderstaande schets van de situatie.



De stuw heeft een afvoercoëfficiënt $m = 1,05$.

6.1 Bereken het debiet Q in de rivier.

6.2 Bereken de waterdiepte d_0 juist bovenstrooms van de stuw.

De rivier heeft een bodemverhang i_b van $1 \cdot 10^{-4}$ en een representatieve dimensieloze weerstandsfactor c_f van $5 \cdot 10^{-3}$.

- 6.3 Geef een korte omschrijving van het begrip evenwichtsdiepte en bereken deze voor de gegeven situatie.
- 6.4 Wat is in de theorie van de verhanglijnen het verschil tussen een steile bodem en een flauwe bodem en waarvan is in dit geval sprake?
- 6.5* Bereken de waterdiepte op een afstand 10 km bovenstrooms van de stuw en maak een schets van het bovenstroomse verloop van de verhanglijn. Gebruik de oplossing voor kleine afwijkingen van de éénparige toestand.

Vraagstuk 14.7

Een rivier mondt uit in een diep meer met een constant peil. De rivier heeft een constante breedte B van 50 m, een constant bodemverhang i_b van $3 \cdot 10^{-5}$ en een weerstandsfactor c_f van $5 \cdot 10^{-3}$. De rivierafvoer Q bedraagt $85 \text{ m}^3/\text{s}$.

- 7.1 Bereken de evenwichtsdiepte d_e en de grensdiepte d_g van de stroming in de rivier.
- 7.2 Beschrijf kort het verschil tussen een flauwe en een steile bodemhelling. Welk criterium is hiervoor bepalend en met welk type hebben we hier te maken?

Om de verhanglijn in de rivier te kunnen berekenen is een randvoorwaarde voor de waterdiepte nodig.

- 7.3 Waar moet deze randvoorwaarde in dit geval gegeven zijn en waarom? Ga uit van subkritische stroming.

De onder 7.3 bedoelde randvoorwaarde voor de waterdiepte in de rivier bedraagt 4,25 m. Neem in het vervolg van dit vraagstuk aan dat de oplossing voor kleine afwijkingen van de eenparige toestand gebruikt mag worden.

- 7.4 Bereken de waterdiepte op een afstand 10 km stroomopwaarts van de monding. Welk type stuwkromme treedt hier op?

Op grote afstand van de monding ($s_0 - s \gg \text{aanpassingslengte } L$) wordt vanaf zeker moment een hoeveelheid water aan de rivier onttrokken van $25 \text{ m}^3/\text{s}$. Het debiet bovenstrooms van de onttrekking blijft gelijk evenals alle overige gegevens.

- 7.5 Bereken voor de nieuwe situatie de waterdiepte in het onttrekkingspunt.
- 7.6 Schets voor de nieuwe situatie het verloop van de bodemhoogte en de waterstand langs de rivier vanaf de riviermonding tot ruim bovenstrooms van het onttrekkingspunt. Geef hierbij ook de ligging van de grens- en evenwichtsdiepten aan voorzien van de getalswaarden.

Uitwerkingen

Vraagstuk 14.1

- 1.1 De éénparige stroming in het kanaal is sub-kritisch (flauwe bodemhelling omdat $i_b < c_f$). De randvoorwaarde voor de waterdiepte in het kanaal ligt dan benedenstrooms van het reservoir waarbij de waterdiepte zich in bovenstroomse richting geleidelijk aanpast aan de evenwichtsdiepte en uiteindelijk. Op grote afstand, waarvan hier sprake is, neemt de waterdiepte dan de evenwichtsdiepte aan.
- 1.2 De diepte na instroming is gelijk aan de evenwichtsdiepte, dit geeft: $d_e^3 = \frac{q^2}{g} \frac{c_f}{i_b}$ en $q^2 = g d_e^3 \frac{i_b}{c_f}$. Over het instroomtraject (geleidelijke versnelling) blijft de energiehogte constant: $H_{res} = h_{res} = d_e + \frac{q^2}{2g d_e^2}$. Combinatie van beide vergelijkingen leidt tot: $h_{res} = d_e + \frac{g d_e^3 i_b / c_f}{2g d_e^2} = d_e + \frac{d_e i_b}{2c_f}$ zodat $d_e = \frac{h_{res}}{1 + \frac{1}{2} i_b / c_f} = 3,96$ m. De bijbehorende waarde van het specifiek debiet is: $q = 3,49$ m²/s.
- 1.3 Volkomen overlaat: Froude-getal op kruin is gelijk aan 1 met een bijbehorende waterdiepte gelijk aan de grensdiepte: $d_{kruin} = d_g = \left(\frac{q^2}{g} \right)^{1/3} = 1,08$ m.
- 1.4 Gebruik de energiebalans (versnelling over korte afstand) kies de bodemhoogte als referentieniveau: $d + \frac{q^2}{2g d^2} = a_k + \frac{3}{2} d_g \Rightarrow d = a_k + \frac{3}{2} d_g - \frac{q^2}{2g d^2}$. Oplossen (iteratief) geeft: $d = 4,58$ m.
- 1.5.1 Oplossing verhanglijnvergelijking voor kleine afwijkingen van de éénparige toestand: $d(s) = d_e + [d(s_0) - d_e] \exp\{(s - s_0)/L\}$ waarbij de positieve s-richting samenvalt met de stroomrichting, s_0 de plaats van de randvoorwaarde aangeeft (overlaat) en $s - s_0 = -10000$ m de afstand in bovenstroomse richting is. De aanpassingslengte $L = \frac{1 - i_b/c_f}{3i_b} d_e = 12937$ m. De gevraagde waterdiepte op 10 km bovenstrooms van de overlaat is dan: $d(-10\text{km}) = 3,96 + (4,58 - 3,96) \times \exp(-10000/12937) = 4,25$ m.

Vraagstuk 14.2

- 2.1 Flauwe bodemhelling:
de éénparige stroming is sub-kritisch, de grensdiepte (diepte waarvoor bij gegeven afvoer de stroming juist kritisch is) is dan kleiner dan de evenwichtsdiepte (diepte

waarvoor de stroming bij gegeven debiet juist éénparig is) e.e.a leidt tot $d_e > d_g \Leftrightarrow c_f > i_b$

Steile bodemhelling:

de éénparige stroming is super-kritisch wat leidt tot $d_e < d_g \Leftrightarrow c_f < i_b$

- 2.2 Op grote afstand van een storing (opstuwing, debietonttrekking) is de stroming éénparig en de diepte gelijk aan de evenwichtsdiepte. Hiervan is hier sprake langs traject III (de randvoorwaarde ligt benedenstrooms van P_1) zodat:

$$d = d_{e,III} = \left(\frac{c_{f,III}}{i_{b,III}} \frac{q^2}{g} \right)^{1/3} = 3 \text{ m} \Rightarrow q = \sqrt{d^3 g i_{b,III} / c_{f,III}} \text{ invullen geeft nu}$$

$$q = 3,64 \text{ m}^2/\text{s}.$$

- 2.3 Algemene formules: $d_g = \left(\frac{q^2}{g} \right)^{1/3}$ $d_e = \left(\frac{c_f}{i_b} \frac{q^2}{g} \right)^{1/3} = \left(\frac{c_f}{i_b} \right)^{1/3} d_g$

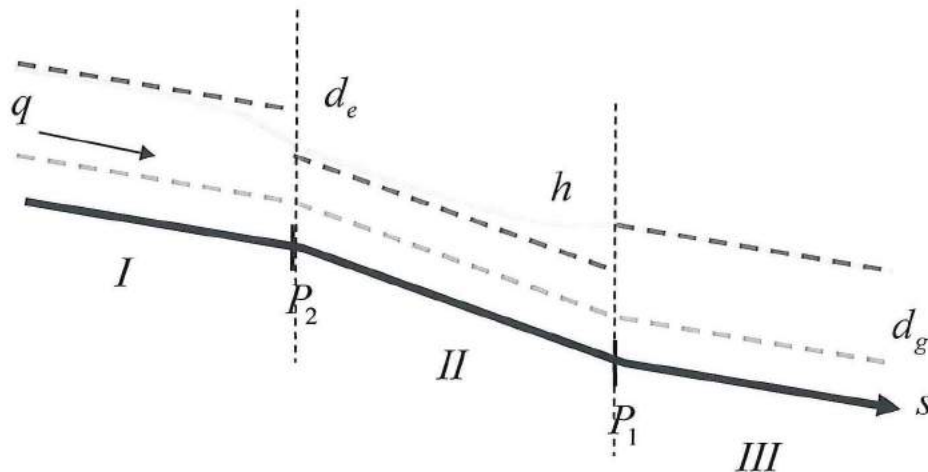
Grensdiepte is gelijk voor alle drie trajecten (q varieert immers niet): $d_g = 1,10 \text{ m}$

Voor de evenwichtsdiepten volgt nu na invullen:

$d_{e,I} = d_{e,III} = 3 \text{ m}$ (traject I en III hebben zelfde verhouding verhang/weerstandscöff.)

$$d_{e,II} = 2,38 \text{ m}$$

Schets:



- 2.4 Gebruik de theorie voor kleine afwijkingen van de éénparige toestand (immers er is gegeven dat overal langs de rivier geldt: $|d - d_e| = |\Delta d| \ll d_e$) De algemene

$$\text{oplossing hiervan luidt: } \Delta d(s) = d(s) - d_e = \Delta d_0 e^{(s-s_0)/L}, \quad L = \frac{1 - i_b/c_f}{3i_b} d_e$$

(aanpassingslengte). We beschouwen hier traject II, de evenwichtsdiepte en aanpassingslengte worden bepaald op grond van de kenmerken van traject II: .

Randvoorwaarde in punt P_1 : $\Delta d_0 = d_{P_1} - d_{e,II} = 3 - 2,38 = 0,62 \text{ m}$. Afstand P_1 - P_2

gerekend in stroomrichting: $s - s_0 = -5 \text{ km}$

Er volgt nu: $\Delta d(s) = d_{p_2} - d_{e,II} = 0,62 \exp(-5000/2381) = 0,076 \text{ m}$, dan geldt ook: $d_{p_2} = 2,38 + 0,076 = 2,46 \text{ m}$

- 2.5 Langs traject III geldt dezelfde formule, maar nu met L en d_e bepaald op grond van de eigenschappen van traject III: $L_{III} = 4750 \text{ m}$, $d_{e,III} = 3 \text{ m}$. Voor de opstuwing Δd in P_1 ten gevolge van een stuw op afstand Δs geldt dan:

$$\Delta d_{P_1} = \Delta d_{stuw} \exp(\Delta s / L), \text{ voor } \Delta d_{P_1} / \Delta d_{stuw} = 50\% \text{ geeft dit}$$

$$\exp(\Delta s / L) = 0,5 \Rightarrow \frac{\Delta s}{L} = \ln 0,5 = -0,69 \Rightarrow \Delta s = -0,69 \times L = -3278 \text{ m}$$

Let op: de berekende afstand is de afstand in stroomrichting tussen de stuw en punt P_1 , de stuw moet dus 3,278 km benedenstrooms van P_1 worden geplaatst.

Vraagstuk 14.3

- 3.1 grensdiepte:

- diepte waarbij gegeven q de stroming kritisch is
- uit $u_g = \sqrt{gd_g}$ volgt $u_g d_g = q = d_g \sqrt{gd_g} \Rightarrow d_g = (q^2 / g)^{1/3} = 1,27 \text{ m}$

evenwichtsdiepte:

- diepte waarbij gegeven q het weerstandsverhang gelijk is aan het bodemverhang, de stroming is dan éénparig
- uit $\tau_b = \rho g d i_b = \rho c_f u_e^2 = \rho c_f q^2 / d_e^2$ volgt: $d_e = (c_f q^2 / g i_b)^{1/3} = 3,46 \text{ m}$

- 3.2 flauwe helling: de éénparige stroming is sub-kritisch, ofwel $d_e > d_g$

steile helling: de éénparige stroming is super-kritisch, ofwel $d_e < d_g$

via de formules voor de grens- en evenwichtsdiepte kan worden afgeleid dat een bodemhelling flauw is als $i_b < c_f$, we hebben hier dus met een flauwe helling te maken; de waterstandsrandvoorwaarde voor verhanglijnberekeningen moet dan benedenstrooms worden opgegeven daar verstoringen zich tegen de stroomrichting in kunnen voortplanten (vergelijk gestuwde vs. ongestuwde afvoer bij een overlaat)

- 3.3* verhanglijnvergelijking (voor vrijwel-éénparige stroming):

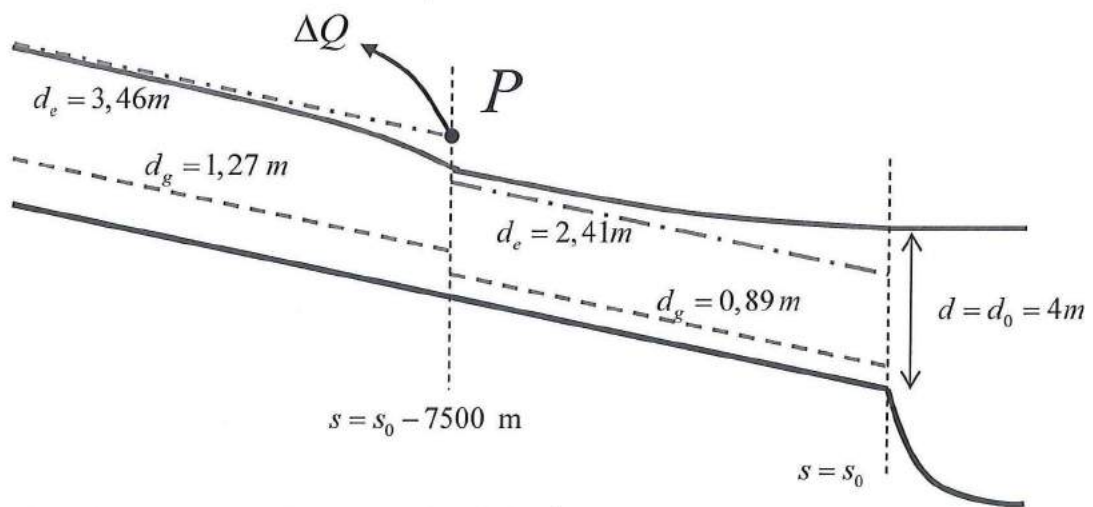
$$\Delta d_p = d_p - d_e = (d_0 - d_e) \exp\left(\frac{s_p - s_0}{L}\right)$$

hierin is $s_p - s_0$ het afstandsverschil is tussen de monding en het beschouwde punt P (in stroomrichting, is dus negatief!)

$$\text{de aanpassingslengte } L \text{ gegeven is door: } L = \frac{1 - i_b / c_f}{3 i_b} d_e = 5472 \text{ m}$$

met $s_p - s_0 = -7500 \text{ m}$ volgt: $\Delta d_p = 0,14 \text{ m}$ dus $d_p = d_e + \Delta d_p = 3,60 \text{ m}$

- 3.4 bovenstrooms van P blijven de evenwichts- en grensdiepte ongewijzigd, benedenstrooms van P nemen ze beiden af als gevolg van het kleinere debiet aldaar, de waterstand past zich daarbij in bovenstroomse richting geleidelijk aan de heersende evenwichtsdiepte aan



- 3.5 benedenstrooms van P geldt nu $Q = 210 \text{ m}^3/\text{s}$
 bijbehorende parameters: $d_e = 2,41 \text{ m}$ en $L = 3820 \text{ m}$
 dit geeft: $d_p = d_e + (d_0 - d_e) \exp\left(\frac{s_p - s_0}{L}\right) = 2,63 \text{ m}$, dit is dus een
 waterstandsverandering t.o.v. de oorspronkelijke toestand van $0,97 \text{ m}$

Vraag 14.4

- 4.1 Flauwe bodemhelling: de eenparige stroming bij een gegeven debiet is sub-kritisch, de grensdiepte is in dat geval kleiner dan de evenwichtsdiepte. Steile bodem: bij een gegeven debiet is de eenparige stroming super-kritisch, de grensdiepte is groter dan de evenwichtsdiepte. Uitwerken van de uitdrukkingen voor grens- en evenwichtsdiepte geeft de volgende voorwaarden:
- flauwe bodemhelling: $i_b < c_f$,
 - steile bodemhelling: $i_b > c_f$.
- Hieruit volgt dat de gegeven situatie een flauwe bodemhelling heeft.
- 4.2 De eenparige stroming is hier sub-kritisch (flauwe bodemhelling). De benedenstroomse randvoorwaarde bepaalt in dat geval het verloop van de waterstand bovenstrooms. De afvoer is hier ongestuwd (storingen bevinden zich op grote afstand van het instroompunt) waardoor de waterdiepte bij het instroompunt de evenwichtsdiepte aanneemt.
- 4.3 Ter plaatse van de aansluiting gelden twee voorwaarden:
- Bernoulli (versnelling over korte afstand):

$$H_{res} = h_{res} = d_e + \frac{u_e^2}{2g} = d_e + \frac{q^2}{2gd_e^3},$$
 - relatie debiet-evenwichtsdiepte: $d_e^3 = \frac{c_f}{i_b} \frac{q^2}{g}.$
- Hieruit volgt na enig omwerken (dictaat p237): $h_{res} = \left(1 + \frac{1}{2} i_b / c_f\right) d_e$. De
 getalsmatige oplossing hiervan luidt: $d_e = 4,88 \text{ m}$ en $q = \sqrt{d_e^3 g i_b / c_f} = 7,55 \text{ m}^2/\text{s}$.

4.4 Pas Bernoulli toe: $d + \frac{q^2}{2gd^2} = a + \frac{q^2}{2ga^2}$.

Na invullen van de gegevens is het rechterlid hierin bekend, waarna via enkele iteraties volgt: $d = 5,82$ m.

4.5 De oplossing van de verhanglijnvergelijking voor kleine afwijkingen van de evenwichtsdiepte luidt (zie formuleblad):

- $d(s) = d_e + \Delta d_0 \exp\{(s - s_0)/L\}$, $\Delta d_0 = d(s_0) - d_e$, afwijking van de (gegeven) diepte in een punt s_0 t.o.v. de evenwichtsdiepte, hier: 0,95 m;
- $s - s_0$, afstand (in stroomrichting) ten opzichte van het punt waar de randvoorwaarde voor de waterdiepte is gegeven, hier: -10000 m (let op het min-teken!);
- $L = d_e(1 - i_b/c_f)/3i_b$, aanpassingslengte, hier: 15477 m.

Vraagstuk 14.5

5.1 Grensdiepte: waterdiepte die bij een gegeven debiet wordt aangenomen wanneer de stroming kritisch is ($Fr = 1$).

Bij kritische stroming geldt: $u = \sqrt{gd} \Rightarrow \frac{q}{d_g} = \sqrt{gd_g} \Leftrightarrow d_g^3 = \frac{q^2}{g}$

Invullen van de gegeven getallen geeft: $d_g = 0,23$ m.

5.2 Evenwichtsdiepte: waterdiepte die bij een gegeven debiet wordt aangenomen wanneer de stroming éénparig is.

In de éénparige toestand geldt:

$$\tau_b = \rho c_f u^2 = \rho g d_e i_b \Rightarrow d_e = \frac{c_f u^2}{i_b g} \Rightarrow d_e^3 = \frac{c_f q^2}{i_b g}$$

Met de gegeven getalswaarden volgt: $d_e = 0,18$ m.

5.3 Flauwe helling: stroming in de éénparige toestand is subkritisch ($d_g < d_e$)

Steile helling: stroming in de éénparige toestand is superkritisch ($d_g > d_e$)

Uit de antwoorden van 5.1 en 5.2 volgt dat we hier te maken hebben met een steile helling, immers $d_g > d_e$.

5.4 Bereken met de gegeven afvoerformule en de gegeven waarde van q eerst de

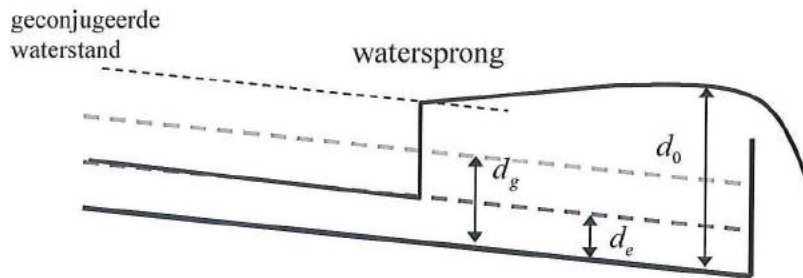
energiehoogte E_k : $E_k = \left(\frac{q}{m^{2/3} \sqrt{2/3} g} \right)^{2/3} = 0,30$ m. Voor E_k geldt:

$$E_k + a_k = d_0 + \frac{q^2}{2gd_0^2} \Rightarrow a_k = d_0 + \frac{q^2}{2gd_0^2} - E_k = 0,10$$
 m.

5.5 Vlak voor de overlaat is de stroming subkritisch: $Fr_0 = \frac{q}{\sqrt{gd_0^3}} = 0,54 < 1$.

Op grote afstand vóór de overlaat is de stroming superkritisch, immers de diepte (d_e) is kleiner dan de grensdiepte zodat $Fr > 1$. Ergens in de goot gaat de stroming

over van super- naar subkritische toestand. Dit is alleen mogelijk via een watersprong. De plaats ervan kan bepaald worden door de geconjugeerde van de bovenstroomse waterstand te snijden met de stuwkromme.



Vraagstuk 14.6

- 6.1 volkomen overlaat: $Fr_{krit} = 1 \Leftrightarrow gd_k = u_k^2 \Rightarrow E_k = \frac{3}{2} d_k$
 Energiehoogte t.o.v. kruin: $E_k = 1 \text{ m} \Rightarrow d_k = \frac{2}{3} E_k = 0,67 \text{ m}$
 Er geldt nu: $q = md_k u_k = md_k \sqrt{gd_k} = 1,80 \text{ m}^2/\text{s}$
 Het totale debiet wordt dan: $Q = B_k q = 116 \text{ m}^3/\text{s}$

- 6.2 Pas de energiebalans toe: $H_0 = E_k + a_k = d_0 + \frac{q^2}{2gd_0^2} \Rightarrow d_0 = 3 \text{ m} - \frac{q^2}{2gd_0^2}$

Itereren geeft: $d_0 = 2,98 \text{ m}$

- 6.3 De evenwichtsdiepte is de diepte in een waterloop waarvoor bij een zeker specifiek debiet q het bodemverhang i_b gelijk is aan het wrijvingsverhang i_w . De stroming is dan éénparig (niet-versnellend).

$$i_b = i_w = c_f \frac{U^2}{gd_e} = c_f \frac{q^2}{gd_e^3} \Rightarrow d_e^3 = \frac{c_f q^2}{gi_w}$$

Invullen geeft: $d_e = 2,53 \text{ m}$

- 6.4 Een waterloop heeft een (positieve) bodemhelling i_b . Beschouw de éénparige stromingstoestand waarin de bodemweerstand in evenwicht is met de verhangkracht:
- de stroming in de éénparige toestand is sub-kritisch: flauwe helling
 - de stroming in de éénparige toestand is super-kritisch: steile helling

Een criterium hiervoor vinden we door de grensdiepte (d_g , de diepte wanneer de stroming juist kritisch is) te vergelijken met de evenwichtsdiepte (d_e):

- grensdiepte: $Fr = 1 \Rightarrow d_g = \left(\frac{q^2}{g} \right)^{\frac{1}{3}}$
- evenwichtsdiepte: $d_e = \left(\frac{c_f q^2}{i_b g} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{c_f}{i_b} \right)^{\frac{1}{3}} d_g$

De evenwichtsdiepte is hier groter dan de grensdiepte omdat $c_f > i_b$. De éénparige stroming is sub-kritisch en we hebben in dit geval dus te maken met een flauwe bodemhelling.

- 6.5 Oplossing van de verhanglijn voor kleine afwijkingen van de éénparige toestand:

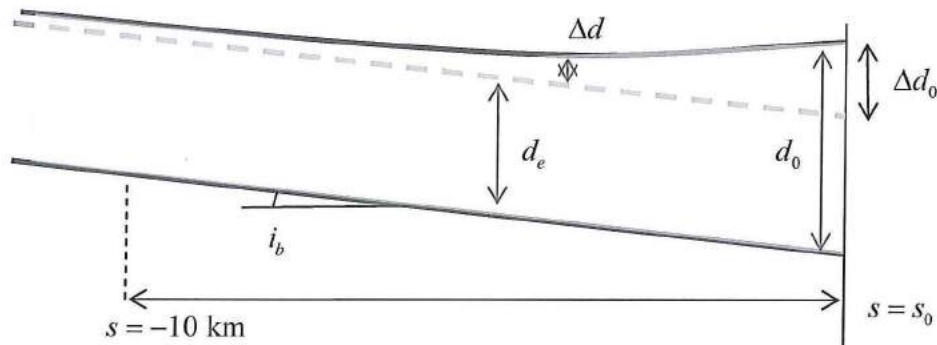
$$\Delta d = d - d_e = \Delta d_0 \exp\left(\frac{s-s_0}{L}\right), \quad \text{met} \quad \Delta d_0 = d_0 - d_e = 0,45 \text{ m}$$

$$\text{aanpassingslengte: } L = \frac{1-i_b/c_f}{3i_b} d_e = 8288 \text{ m}$$

$$\text{afstand bovenstrooms: } s - s_0 = -10 \text{ km} \Rightarrow \Delta d = d - d_e = 0,13 \text{ m}$$

$$\text{de lokale waterdiepte is dan: } d = d_e + \Delta d = 2,66 \text{ m}$$

Zie onderstaande figuur:



Vraagstuk 14.7

7.1 De evenwichtsdiepte d_e treedt op als het wrijvingsverhang i_w gelijk is aan het

$$\text{bodenvverhang } i_b: i_b = i_w = c_f \frac{u|u|}{gR_e} \approx c_f \frac{u|u|}{gd_e} = c_f \frac{q|q|}{gd_e^3} \Rightarrow d_e^3 = \frac{c_f q^2}{gi_b}$$

Invullen van de gegevens (met $q=Q/B=1,7 \text{ m}^2/\text{s}$) geeft: $d_e=3,66 \text{ m}$.

De grensdiepte d_g treedt op als het Froude-getal gelijk is aan 1:

$$Fr_g = 1 = \frac{u_g}{c_g} = \frac{u_g}{\sqrt{gd_g}} = \frac{q}{\sqrt{gd_g^3}} \Rightarrow d_g^3 = \frac{q^2}{g}$$

Invullen geeft: $d_g=0,67 \text{ m}$.

7.2 Flauw of steil is in dit verband een relatief begrip. De bodemhelling is flauw wanneer de evenwichtsdiepte groter is dan de grensdiepte. Bij een steile bodemhelling is het omgekeerde het geval, de evenwichtsdiepte is dan kleiner dan de grensdiepte. Bepalend hiervoor is de waarde van het Froude-getal bij eenparige afstroming (de

$$\text{diepte is dan gelijk aan } d_e): Fr_e^2 = \frac{u_e^2}{gd_e} = \frac{gi_b R_e}{c_f g d_e} \approx \frac{i_b}{c_f} \quad (\text{omdat } R_e \approx d_e).$$

Flauwe bodemhelling: $Fr_e < 1 \Rightarrow i_b < c_f$

Steile bodemhelling: $Fr_e > 1 \Rightarrow i_b > c_f$

In dit geval is $i_b = 3 \cdot 10^{-5}$ en $c_f = 5 \cdot 10^{-3}$ ($i_b < c_f$), we hebben hier dus te maken met een flauwe bodemhelling (zie ook diktaat blz. 230).

- 7.3 Er is één randvoorwaarde nodig (de vergelijking van Bélanger is een eerste orde DV). De stroming is subkritisch. Verstoringen in de stroming kunnen zich dan in zowel stroomopwaartse als stroomafwaartse richting voortplanten. De waterdiepte in de monding heeft dus invloed op de waterdiepte in de gehele rivier, en moet daarom in dit geval als randvoorwaarde worden gekozen.
- 7.4 De (benaderende) formule voor kleine afwijkingen van de eenparig toestand luidt (zie formuleblad):

$$d - d_e = (d_0 - d_e) \cdot e^{\frac{s-s_0}{L}}, \quad L = \frac{1 - i_b / c_f}{3i_b} d_e$$

De aanpassingslengte L is met invulling van de gegevens 40423 m. Op 10 km bovenstrooms van de monding is $s-s_0 = -10000$ m zodat met een waterdiepte d_0 in de monding van 4,25 m de gevraagde diepte uiteindelijk 4,12 m wordt. De stuwkromme is van het M -type (mild-slope, om precies te zijn M_1).

- 7.5 Het debiet Q benedenstrooms van het onttrekkingspunt neemt ten gevolge van de onttrekking af tot $85-25=60$ m³/s. Benedenstrooms van het onttrekkingspunt veranderen daarmee ook de evenwichtsdiepte en de grensdiepte. Invullen van $q=Q/B=1,25$ m²/s in de onder IV.1 gegeven formules geeft voor het traject benedenstrooms van de onttrekking: $d_e=2,90$ m en $d_g=0,53$ m. Het onttrekkingspunt zelf ligt op zeer grote afstand van de monding waardoor de waterdiepte hier gelijk is aan de benedenstroomse evenwichtsdiepte $d_e=2,90$ m (in de formule gegeven onder IV.4 gaat de waarde van de exponent naar 0 voor $s_0-s \gg L$ zodat $d=d_e$).
- 7.6 Bovenstrooms van het onttrekkingspunt is het debiet gelijk aan 85 m³/s waardoor hier de evenwichts- en grensdiepte gelijk zijn aan die in de situatie zonder onttrekking. De waterdiepte in het onttrekkingspunt berekend in de vorige vraag is de (interne) koppelingsvoorwaarde voor het riviertraject bovenstrooms van de onttrekking. Omdat deze waterdiepte kleiner is dan de evenwichtsdiepte langs dit traject (maar groter dan de grensdiepte) treedt hier een M_2 -type stuwkromme op (mild-slope met $d_g < d < d_e$).

Schets:

